ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 3, с. 465–480

УДК 519.633

МИНИМИЗАЦИЯ МАССЫ ТОНКОГО ПРЯМОГО КРЫЛА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ ПО СКОРОСТИ ДИВЕРГЕНЦИИ[1)]

© 2019 г. В. Ю. Гончаров[1,*], Л. А. Муравей[1,**]

([1]125993 Москва, Волоколамское ш. 4, МАИ, Россия)

*e-mail: fulu.happy@gmail.com

**e-mail: l_muravey@mail.ru

Поступила в редакцию 03.07.2018 г.

Рассматривается задача определения оптимального распределения толщины обшивки тонкого прямого крыла, удовлетворяющего заданному ограничению на скорость дивергенции (т.е. скорость, при превышении которой происходит закручивание крыла вплоть до разрушения), при котором достигается наименьшее возможное значение массы обшивки. Математическая формулировка задачи имеет следующий вид: минимизировать линейный функционал на некотором множестве существенно ограниченных измеримых функций, для которых наименьшее собственное значение задачи Штурма–Лиувилля не меньше заданного значения. Доказывается, что эта задача обладает единственным решением. Поскольку только кусочно-гладкие распределения толщины удовлетворяют требованиям приложений, изучается вопрос о регулярности оптимального решения. Оказывается, что оптимальное решение является непрерывной по Липшицу функцией. Кроме того, показывается, что решение непрерывно зависит от параметра, определяющего наименьшее возможное значение скорости дивергенции, т.е. рассматриваемая задача является корректной в смысле Адамара. Наконец, предлагается итерационный метод, позволяющий строить минимизирующие последовательности, сходящиеся к оптимальному решению в пространствах Гёльдера, а также приводятся и обсуждаются результаты численных расчетов. Библ. 21. Фиг. 4.

Ключевые слова: оптимальное проектирование, тонкое прямое крыло, регулярность решений, оптимизация собственных значений, минимизация веса, обратная задача, корректная задача, дивергенция крыла, седловая точка, итерационный метод.

DOI: 10.1134/S0044466919030086

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу о дивергенции тонкого прямого крыла (см. [1]). Основное уравнение и граничные условия, записанные в безразмерной форме, имеют вид (см. [2], [3]):

$$(a^3 u\theta')'(x) + \lambda(a^2\theta)(x) = 0, \quad x \in \Omega \triangleq (0,1), \tag{1}$$

$$\theta(0) = 0, \quad \left(a^3 u\theta'\right)(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь u – фиксированное распределение толщины обшивки крыла; a – длина хорды профиля крыла. Наименьшее собственное значение краевой задачи (1), (2) соответствует (критической) скорости дивергенции. Собственная функция θ, соответствующая наименьшему собственному значению краевой задачи (1), (2), представляет собой распределение угла закручивания крыла по размаху при скорости дивергенции.

Пусть

$$a \in C^{0,1}(\bar{\Omega}), \quad \check{a} \triangleq \inf_{x\in\Omega} a(x) > 0, \quad \hat{a} \triangleq \sup_{x\in\Omega} a(x),$$
$$0 < \alpha < \beta < +\infty.$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16-01-00425_а).

Введем множество

$$U = \left\{u \in L^{\infty}(\Omega) : \alpha \le u(x) \le \beta \text{ п. в. на } \Omega\right\}$$

допустимых распределений толщины обшивки крыла. Для $u \in U$ обобщенная постановка задачи (1), (2) имеет следующий вид: найти пару $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R} \times (V \setminus \{\vartheta\})$ такую, что

$$\int_0^1 a^3(x)u(x)\theta'(x)\varphi'(x)dx = \lambda \int_0^1 a^2(x)\theta(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in V, \tag{EVP$_1$}$$

где $V = \{\varphi \in H^1(\Omega)\colon \varphi(0) = 0\}$, ϑ – нулевой элемент пространства $H^1(\Omega)$. Известно (см., например, [4]), что первое собственное значение $\lambda_1[u]$ этой задачи является простым, а соответствующий ему собственный элемент сохраняет знак на Ω. Кроме того, справедливо следующее вариационное представление:

$$\begin{gathered}\lambda_1[u] = \min_{\varphi \in V \setminus \{\vartheta\}} \Phi(u, \varphi),\\ \Phi(u, \varphi) \triangleq \int_0^1 a^3(x)u(x)\varphi'^2(x)dx \Big/ \int_0^1 a^2(x)\varphi^2(x)dx.\end{gathered} \tag{VC$_1$}$$

Пусть $\check{v} = \lambda_1[\alpha]$, $\hat{v} = \lambda_1[\beta]$. Для $v \in (\check{v}, \hat{v})$ введем множество

$$U(v) = \{u \in U : \lambda_1[u] \ge v\},$$

состоящее из допустимых распределений толщины обшивки крыла, для каждого из которых скорость дивергенции не меньше заданного значения v. Для $u \in U$ безразмерная масса обшивки крыла $M[u]$ определяется формулой

$$M[u] = \int_0^1 a(x)u(x)dx.$$

Поскольку крыло закручивается вплоть до разрушения при скорости, превышающей соответствующую ему скорость дивергенции, необходимо принимать во внимание данное явление при проектировании крыла. Одним из параметров проектирования, оказывающих влияние на скорость дивергенции, является масса крыла. Однако увеличение массы крыла не только приводит к увеличению скорости дивергенции, но также делает его более дорогим с точки зрения производства и, кроме того, повышает расход топлива во время полета. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачу минимизации массы обшивки крыла на множестве $U(v)$: найти элемент $w \in U(v)$ такой, что

$$M[w] = \inf_{u \in U(v)} M[u]. \tag{$\mathcal{P}_1$}$$

Подобные задачи для крыльев летательных аппаратов рассматривались только в нескольких работах. Близкая к ($\mathcal{P}_1$) задача была поставлена Макинтошем и Истепом в работе [2], в которой рассмотрена задача минимизации массы обшивки крыла при заданном значении скорости дивергенции и получено решение в случае линейного распределения хорды. Их подход был обобщен Н.В. Баничуком в [5] на случай переменных параметров крыла и более общего типа краевых условий. Интересный факт состоит в том, что в [2], [5] на распределения толщины обшивки крыла не накладываются никакие ограничения и, как следствие, полученные там оптимальные решения обращаются в нуль в точке, соответствующей свободному концу крыла. Поэтому случай наличия положительной нижней грани для значений толщины обшивки крыла имеет гораздо большую практическую важность по сравнению со случаем без ограничений. Задача минимизации массы обшивки прямоугольного крыла при заданном значении скорости дивергенции была рассмотрена Ж.-Л. Арманом и В. Дж. Витте в [6], где рассмотрен как случай без ограничений, так и случай общей положительной нижней грани для значений толщины, а также дан вывод аналитических решений. Кроме того, следует отметить работу Ю.А. Арутюнова и А.П. Сейраняна [3], в которой рассмотрена задача минимизации массы обшивки крыла при различных дополнительных интегральных ограничениях. Для численного решения в [3], [6] применялся алгоритм переходной матрицы, подробно описанный в [7]. Что касается непосредственно задачи ($\mathcal{P}_1$), то отме-

тим, что она является выпуклой, и поэтому может достаточно эффективно решаться различными методами оптимизации [8].

Цель данной статьи – представить достаточно полное исследование экстремальной задачи $(\mathcal{P}_1)$. Доказывается, что существует единственное решение задачи $(\mathcal{P}_1)$, причем имеет место непрерывная зависимость решения этой задачи от параметра v, т.е. задача $(\mathcal{P}_1)$ является корректной в смысле Адамара. Поскольку допустимые управления принадлежат классу существенно ограниченных измеримых функций, оптимальное решение может не представлять практического интереса. Таким образом, возникает необходимость исследования вопроса регулярности оптимального решения. Вместе с тем существует ряд задач оптимального управления (см. [9]), связанных с уравнениями математической физики, в которых необходимость рассмотрения более "узкого" класса допустимых управлений обусловливается зависимостью функционала от управляющей переменной и ее местом в уравнении состояния. При рассмотрении задачи $(\mathcal{P}_1)$ мы не будем следовать этому подходу и покажем, что истинные свойства оптимального решения вполне согласуются с естественным требованием гладкости поверхности оптимального крыла. В действительности мы покажем, что оптимальное решение задачи $(\mathcal{P}_1)$ принадлежит пространству равномерно непрерывных по Липшицу на Ω функций. Кроме того, предлагается метод, который строит последовательности, сходящиеся к оптимальному решению в пространствах Гёльдера $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ для $\alpha \in (0,1)$, при условии, что удается найти решение некоторой вспомогательной экстремальной задачи. Насколько известно авторам, в настоящее время в литературе по данной теме нет исследований, посвященных как вопросу регулярности оптимальных решений, так и вопросу строгого обоснования методов, которые позволяют строить последовательности, сходящиеся к оптимальным решениям.

Упомянутые выше результаты естественным образом следуют из аналогичных свойств следующей экстремальной задачи: для фиксированного значения m массы обшивки крыла найти элемент

$$w \in \mathcal{U}(m) \triangleq \{u \in U : M[u] = m\}$$

такой, что

$$\lambda_1[w] = v_{\max}(m) \triangleq \sup_{u \in \mathcal{U}(m)} \lambda_1[u]. \qquad (\mathcal{P}_2)$$

Здесь функция $v_{\max}(\cdot)$ выражает зависимость максимального значения скорости дивергенции на множестве $\mathcal{U}(m)$ от значения m массы обшивки крыла. Отметим, что задача $(\mathcal{P}_2)$ является экстремальной для первого собственного значения задачи (EVP_1). Имеется обширная литература, посвященная экстремальным задачам для собственных значений эллиптических операторов; см., например, [10], [11] и приводимые там ссылки. Близкие к $(\mathcal{P}_2)$ задачи рассматривались в [11]–[14]. А. Энро [11, Разд. 10.2] рассмотрел $(\mathcal{P}_2)$, когда $a(x) \equiv 1$, $V = H_0^1(\Omega)$, и получил четное решение релейного типа, однако, к сожалению, вывод этого решения сопровождается некорректными рассуждениями. Дело в том, что используемая в [11, Теорема 10.2.2] замена переменных преобразует исходный интервал, на котором соответствующая краевая задача определена, в интервал, который зависит от управляющей переменной, т.е. последний изменяется вместе с управляющей переменной. Именно по этой причине доказательство [11, Теорема 10.2.2 (ii)] ошибочно использует известный результат М.Г. Крейна [15] (необходимо отметить, что доказательство [11, Теорема 10.2.2 (ii)] станет корректным, если заменить класс допустимых управлений, введенный в [11, Раздел 10.1], множеством его экстремальных точек). В действительности результаты этой статьи показывают, что четное решение задачи максимизации наименьшего первого собственного значения, рассмотренной в [11, Раздел 10.2.2], должно быть непрерывной по Липшицу функцией. Треш в [12] получил точное аналитическое решение задачи максимизации второго собственного значения (1) при краевых условиях Неймана и $a(x) \equiv 1$ в случае без ограничений. Его результат был распространен на случай ограничений на значения управляющих функций К. Бэндл в [13]. В рамках задачи Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны Ю.В. Егоров и В.А. Кондратьев [14] рассмотрели $(\mathcal{P}_2)$ в случае без ограничений, когда $a(x) \equiv 1$,

$$\theta(0) = \theta(1) = 0, \quad \int_0^1 \theta(x)dx = 0,$$

и получили оценку для экстремального значения первого собственного значения. В действительности авторы работ [12]–[14] сделали больше, чем мы упомянули. Здесь мы только выделили результаты, имеющие отношение к задаче $(\mathcal{P}_2)$.

Статья имеет следующую структуру. Задача $(\mathcal{P}_2)$ рассматривается в разд. 1. В разд. 2 устанавливается взаимосвязь между задачами $(\mathcal{P}_1)$ и $(\mathcal{P}_2)$, а также показывается, что все полученные в разд. 1 результаты формируют основу для эффективного численного решения задачи $(\mathcal{P}_1)$. В разд. 3 обсуждается метод решения задачи $(\mathcal{P}_1)$. Результаты проведенных вычислительных экспериментов приводятся в разд. 4.

1. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРЫЛЬЕВ ПРОТИВ ДИВЕРГЕНЦИИ

Из (VC_1) легко получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Существуют такие* $\check{\lambda}, \hat{\lambda} \in \mathbb{R}$, *что* $0 < \check{\lambda} \le \lambda_1[u] \le \hat{\lambda}$ *для всех* $u \in U$.

Функционал $\lambda_1[\cdot]$ имеет еще одно представление. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения: найти пару $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times (W \backslash \{\vartheta\})$ такую, что

$$\int_0^1 \frac{y'(x)z'(x)}{a^2(x)}dx = \lambda \int_0^1 \frac{y(x)z(x)}{a^3(x)u(x)}dx, \quad z \in W \triangleq \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi(1) = 0\}. \tag{EVP_2}$$

Множество собственных элементов, соответствующих первому собственному значению задачи (EVP_i), будем обозначать через $\mathcal{E}_i[u]$. В дальнейшем нам понадобится следующая техническая

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) $\lambda_1[u]$ *является первым собственным значением задачи* (EVP_2).

(ii) *Если* $f \in \mathcal{E}_i[u]$ *и* $f(x) > 0$ *на* Ω, *то* $(-1)^{i-1} f'(x) > 0$ *для п. в.* $x \in \Omega$.

(iii) *Пусть* $y \in \mathcal{E}_2[u]$. *Тогда существует положительная постоянная* B *такая, что*

$$\|y\|_{H^2(\Omega)} \le B\|y\|_{H^1(\Omega)},$$

причем B *не зависит от* $u \in U$.

Доказательство. Из (EVP_1) получаем, что $a^3 u\theta' \in H^1(\Omega)$,

$$(a^3 u\theta')'(x) + \lambda(a^2\theta)(x) = 0 \quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{3}$$

Интегрируя по частям левую часть (EVP_1), легко заключить, что

$$\theta(0) = 0, \quad \left(a^3 u\theta'\right)(1) = 0. \tag{4}$$

Пусть $y = a^3 u\theta'$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{y'(x)}{a^2(x)} + \lambda\theta(x) = 0. \tag{5}$$

Учитывая, что $\theta \in H^1(\Omega)$, после дифференцирования по x в (5) получаем, что

$$(a^{-2}y')'(x) + \lambda\frac{y(x)}{a^3(x)u(x)} = 0 \quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{6}$$

Из (4), (5) следует, что

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{7}$$

Очевидно, что обобщенная постановка задачи (6), (7) есть (EVP_2). Таким образом, $\lambda_1[u]$ является некоторым собственным значением задачи (EVP_2).

Пусть теперь $\theta \in \mathcal{E}_1[u]$, $\theta(x) > 0$ на Ω. Из (5), (7) получаем, что

$$y(x) = \lambda_1[u]\int_x^1 a^2(x)\theta(x)dx > 0, \quad x \in \Omega.. \tag{8}$$

Известно (см. [4]), что первое собственное значение задачи (EVP_2) является простым, а соответствующие ему собственные элементы сохраняют знак на Ω. Кроме того, собственные функции задачи (EVP_2), соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными относительно билинейной формы

$$\mathcal{B}_u(y,z) = \int_0^1 \frac{y(x)z(x)}{a^3(x)u(x)}dx, \quad y,z \in L^2(\Omega).$$

Учитывая это и (8), заключаем, что $\lambda_1[u]$ – первое собственное значение задачи (EVP_2).

Из (5) также следует, что $y'(x) < 0$ на Ω. Из (3), (4) получаем, что

$$\theta'(x) = \frac{\lambda_1[u]}{a^3(x)u(x)}\int_x^1 a^2(x)\theta(x)dx > 0 \quad \text{п. в. на } \Omega..$$

Принимая во внимание (6), получаем, что

$$y''(x) = 2\frac{a'(x)}{a(x)}y'(x) - \frac{\lambda_1[u]}{a(x)u(x)}y(x)$$

для п. в. $x \in \Omega$, откуда легко следует (iii). Лемма доказана.

Таким образом, справедливо следующее вариационное представление:

$$\lambda_1[u] = \min_{y\in W\setminus\{\vartheta\}} \Lambda(u,y), \quad \Lambda(u,y) \triangleq \int_0^1 \frac{y'^2(x)}{a^2(x)}dx \Big/ \int_0^1 \frac{y^2(x)}{a^3(x)u(x)}dx. \tag{VC$_2$}$$

Данное представление играет существенную роль в дальнейшем.

Пусть $\check{m} = M[\alpha]$, $\hat{m} = M[\beta]$, $m \in (\check{m}, \hat{m})$.

Предложение 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Функционал* $\lambda_1[\cdot]$ *является вогнутым на* U *и строго вогнутым на* $\mathcal{U}(m)$.

(ii) *Функционал* $1/\lambda_1[\cdot]$ *является строго выпуклым на* U.

Доказательство. Пусть

$$u_1, u_2 \in U, \quad u_1 \neq u_2, \quad t \in (0,1), \quad \varphi_t \in \mathcal{E}_1[tu_1 + (1-t)u_2],$$

причем $\varphi_t(x) > 0$ на Ω. Очевидно,

$$\lambda_1[tu_1 + (1-t)u_2] = t\Phi(u_1,\varphi_t) + (1-t)\Phi(u_2,\varphi_t) \geq t\lambda_1[u_1] + (1-t)\lambda_1[u_2].$$

Если

$$\lambda_1[tu_1 + (1-t)u_2] = t\lambda_1[u_1] + (1-t)\lambda_1[u_2],$$

то

$$\varphi_t \in \mathcal{E}_1[u_1] \cap \mathcal{E}_1[u_2].$$

Поскольку в этом случае

$$\int_0^1 a^3(x)(u_1(x) - u_2(x))\varphi_t'(x)\varphi'(x)dx = (\lambda_1[u_1] - \lambda_1[u_2])\int_0^1 a^2(x)\varphi_t(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in V,$$

то для почти всех x имеем

$$a^3(x)(u_1(x) - u_2(x))\varphi_t'(x) = (\lambda_1[u_1] - \lambda_1[u_2])\int_x^1 a^2(\xi)\varphi_t(\xi)d\xi. \tag{9}$$

Отсюда следует, что если $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(m)$, то

$$0 = M[u_1] - M[u_2] = (\lambda_1[u_1] - \lambda_1[u_2])\int_0^1 \left[\int_x^1 a^2(\xi)\varphi_t(\xi)d\xi\right]\frac{dx}{a^2(x)\varphi_t'(x)}.$$

Поскольку $\varphi_t'(x) > 0$ для почти всех $x \in \Omega$, то $\lambda_1[u_1] = \lambda_1[u_2]$. Учитывая (9), заключаем, что $u_1(x) = u_2(x)$ для почти всех $x \in \Omega$. Из полученного противоречия следует (i).

Утверждение (ii) получаем из следующих неравенств:

$$\frac{1}{\lambda_1[tu_1 + (1-t)u_2]} < \frac{t}{\Lambda(u_1, y_t)} + \frac{1-t}{\Lambda(u_2, y_t)} \le \frac{t}{\lambda_1[u_1]} + \frac{1-t}{\lambda_1[u_2]},$$

где $y_t \in \mathscr{E}_2[tu_1 + (1-t)u_2]$. Предложение доказано.

Из предложения 1 и [16, Теорема 2.1] следует, что существует единственное решение задачи $(\mathscr{P}_2)$. В дальнейшем это решение будем обозначать через $s_2[m]$.

Введем множество

$$\mathscr{V}(m) = \{u \in U : M[u] \le m\}.$$

Предложение 2. *Пусть*

$$\varphi \in W \cap C^{0,1}(\bar{\Omega}), \quad \varphi(x) > 0, \quad x \in \Omega.$$

Тогда существует единственное решение w экстремальной задачи

$$\sup_{u \in \mathscr{V}(m)} \Lambda(u, \varphi), \tag{10}$$

причем

$$w \in \mathscr{U}(m) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega}).$$

Доказательство. Задача (10), как нетрудно видеть, эквивалентна задаче

$$\inf_{u \in \mathscr{V}(m)} \mathscr{F}[u], \quad \mathscr{F}[u] \triangleq \int_0^1 \frac{\varphi^2(x)}{a^3(x)u(x)}\,dx. \tag{11}$$

Поскольку $(\varphi^2/a^3)(x) > 0$ для $x \in \Omega$, то функционал $\mathscr{F}[\cdot]$ является строго выпуклым на множестве $\mathscr{V}(m)$. Таким образом, задача (10) имеет не более одного решения.

Пусть $I = [\alpha, \beta]$. Введем функцию

$$\Psi(\xi, x, \eta, \mu) = \frac{\eta^2}{a^3(x)\xi} + \mu a(x)\xi,$$

определенную на $I \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\ge 0}$. Зафиксируем пару $(x, \mu) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\ge 0}$ и рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\min_{\xi \in I} \Psi(\xi, x, \varphi(x), \mu). \tag{12}$$

Поскольку $\varphi(x) > 0$ при $x \in \Omega$, то отображение $\Psi(\cdot, x, \varphi(x), \mu)$ является сильно выпуклым на множестве I. Следовательно, для $x \in \Omega$ задача (12) обладает единственным решением, которое обозначим через $u_\mu(x)$. Очевидно, что если $\mu = 0$, то $u_\mu(x) \equiv \beta$. Пусть теперь $\mu > 0$. Выберем число $\varepsilon(\mu) > 0$ так, чтобы

$$\varepsilon(\mu) < \delta(\mu) \triangleq \mu\, \check{a}^4\, \alpha^2.$$

Пусть

$$G(\varepsilon) = \{x \in \Omega : \varphi^2(x) < \varepsilon\}.$$

Легко проверить, что

$$\Psi_\xi'(\xi, x, \varphi(x), \mu) > 0, \quad \xi \in I, \quad x \in G(\varepsilon(\mu)).$$

Таким образом, если $x \in G(\varepsilon(\mu))$, то $u_\mu(x) = \alpha$. Пусть $F(\varepsilon(\mu)) = \Omega \backslash G(\varepsilon(\mu))$. Так как функция $f(\xi) = 1/\xi$ является сильно выпуклой на I, то найдется постоянная $E > 0$ такая, что

$$f(\xi_2) - f(\xi_1) \ge f'(\xi_1)(\xi_2 - \xi_1) + E|\xi_2 - \xi_1|^2, \quad \xi_1, \xi_2 \in I.$$

Учитывая, что

$$(\xi - u_\mu(x))\Psi'_\xi(u_\mu(x), x, \varphi(x), \mu) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in I,$$

получаем неравенство

$$\Psi(\xi, x, \varphi(x), \mu) - \Psi(u_\mu(x), x, \varphi(x), \mu) \geq \frac{\varepsilon(\mu)E}{\hat{a}^3}|\xi - u_\mu(x)|^2, \quad x \in F(\varepsilon(\mu)), \quad \xi \in I.$$

Адаптируя рассуждения [17, Теорема 2, Гл. 4], получаем, что

$$\frac{\varepsilon(\mu)E}{\hat{a}^3}|u_\mu(x'') - u_\mu(x')| \leq \sup_{\theta\in[0,1]}\left|\Psi'_\xi(u_{\mu,\theta}(x', x''), x'', \varphi(x''), \mu) - \Psi'_\xi(u_{\mu,\theta}(x', x''), x', \varphi(x'), \mu)\right|, \tag{13}$$

где $x' \in F(\varepsilon(\mu))$, $x'' \in \Omega$,

$$u_{\mu,\theta}(x', x'') = \theta u_\mu(x') + (1-\theta)u_\mu(x''), \quad \theta \in [0,1].$$

Для функции $g \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ пусть

$$[g] \triangleq \sup_{x', x''\in\Omega}\frac{|g(x'') - g(x')|}{|x'' - x'|}.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\left|\Psi'_\xi(u_{\mu,\theta}(x', x''), x'', \varphi(x''), \mu) - \Psi'_\xi(u_{\mu,\theta}(x', x''), x', \varphi(x'), \mu)\right| \leq \\ \leq \mu[a]|x' - x''| + \frac{1}{\alpha^2}\left[\varphi^2/a^3\right]|x' - x''| \leq \left(\mu[a] + \frac{1}{\alpha^2}\{2\check{a}^{-3} + [a^{-3}]\}\|\varphi\|^2_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}\right)|x' - x''|.\end{gathered} \tag{14}$$

Комбинируя неравенства (13), (14) получаем, что

$$\begin{gathered}\frac{|u_\mu(x'') - u_\mu(x')|}{|x'' - x'|} \leq K\left(\mu, \varepsilon(\mu), \|\varphi\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}\right), \quad x' \in F(\varepsilon(\mu)), \quad x'' \in \Omega, \quad x' \neq x''; \\ |u_\mu(x'') - u_\mu(x')| = 0, \quad x', x'' \in G(\varepsilon(\mu)),\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$K(\mu, \varepsilon, t) \triangleq \frac{\hat{a}^3}{\varepsilon E}\left(\mu[a] + \frac{1}{\alpha^2}\{2\check{a}^{-3} + [a^{-3}]\}t^2\right).$$

Таким образом, $[u_\mu] \leq K\left(\mu, \varepsilon(\mu), \|\varphi\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}\right)$ и $u_\mu \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$.

Рассмотрим отображение

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \ni \mu \mapsto \mathscr{H}_m(\mu) = \int_0^1 a(x)u_\mu(x)dx - m.$$

Из [17, Теорема 1, Гл. 4] следует, что для каждого $x \in \Omega$ функция

$$\mu \mapsto u_\mu(x) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to I$$

является непрерывной. Очевидно, что функция $\mathscr{H}_m(\cdot)$ является также непрерывной. Пусть

$$\hat{\mu} > \frac{\|\varphi\|^2_{C(\bar{\Omega})}}{\check{a}^4\alpha^2}. \tag{16}$$

Тогда

$$\Psi'_\xi(\xi, x, \varphi(x), \hat{\mu}) > 0, \quad \xi \in I, \quad x \in \Omega,$$

и $u_{\hat{\mu}}(x) \equiv \alpha$. Напомним, что $u_0(x) \equiv \beta$. Следовательно, $\mathcal{H}_m(0)\mathcal{H}_m(\hat{\mu}) < 0$. Таким образом, существует число $\bar{\mu} \in (0, \hat{\mu})$ такое, что $\mathcal{H}_m(\bar{\mu}) = 0$, т.е. $u_{\bar{\mu}} \in \mathcal{U}(m)$. Легко видеть, что

$$\int_0^1 \Psi(u_{\bar{\mu}}(x), x, \varphi(x), \bar{\mu})dx \le \int_0^1 \Psi(u(x), x, \varphi(x), \bar{\mu})dx, \quad u \in \mathcal{U}(m).$$

Следовательно, для любого $u \in \mathcal{U}(m)$ справедливо неравенство $\mathcal{F}[u_{\bar{\mu}}] \le \mathcal{F}[u]$. Таким образом, $u_{\bar{\mu}}$ является решением задачи (11). Предложение доказано.

В соответствии с [18, Следствие 1] задача $(\mathcal{P}_2)$ эквивалентна поиску седловой точки функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на множестве $\mathcal{U}(m) \times (W \backslash \{\vartheta\})$. Точнее говоря, $(\hat{w}, \hat{y})$ является седловой точкой функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{U}(m) \times (W \backslash \{\vartheta\})$, т.е. выполняются неравенства

$$\Lambda(u, \hat{y}) \le \Lambda(\hat{w}, \hat{y}) \le \Lambda(\hat{w}, y), \quad (u, y) \in \mathcal{U}(m) \times (W \backslash \{\vartheta\}), \tag{SP}$$

тогда и только тогда, когда $\hat{w}$ является решением задачи $(\mathcal{P}_2)$ и $\hat{y} \in \mathcal{E}_2[\hat{w}]$. Принимая во внимание это, для заданного элемента $u_0 \in \mathcal{U}(m)$ можно построить последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, элементы которых определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} y_n \in \arg\min_{y\in S} \Lambda(u_n, y), \quad S \triangleq \left\{y \in W : \|y\|_{C(\bar{\Omega})} = 1,\ y(x) > 0 \text{ на } \Omega\right\}, \\ u_{n+1} \in \arg\max_{u\in\mathcal{U}(m)} \Lambda(u, y_n). \end{gathered} \tag{IP}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого раздела, играющий ключевую роль в последующем изложении.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) $s_2[m] \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$.

(ii) *Отображение*

$$(\check{m}, \hat{m}) \ni m \mapsto s_2[m] \in C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$$

является непрерывным для $0 < \kappa < 1$, *т.е. задача* $(\mathcal{P}_2)$ *является корректной в смысле Адамара относительно параметра* m.

(iii) *Для фиксированного элемента* $u_0 \in \mathcal{U}(m)$ *рассмотрим последовательность* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *определяемую итерационной процедурой* (IP). *Если*

$$\frac{1}{u_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{u_*} \quad \text{в} \quad \mathcal{U}(m), \tag{17}$$

то $\{u_n\}$ *в действительности сходится к* $s_2[m]$ *в* $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$ *для* $0 < \kappa < 1$.

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{E}_2[s_2[m]]$. Лемма 2 (iii) и неравенство Морри

$$\|z\|_{C^{1,1/2}(\bar{\Omega})} \le C\|z\|_{H^2(\Omega)}, \quad z \in H^2(\Omega), \quad C > 0, \tag{18}$$

позволяют заключить, что $y \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Таким образом, утверждение (i) является следствием предложения 2 и (SP).

Пусть $m_n \to m$ в $(\check{m}, \hat{m})$, $u_n = s_2[m_n]$, $y_n \in S \cap \mathcal{E}_2[u_n]$, $\lambda_n = \lambda_1[u_n]$. Из леммы 1 следует, что последовательность $\{\lambda_n\}$ является ограниченной. Кроме того,

$$\frac{1}{\hat{a}^2}\int_0^1 y_n'^2(x)dx \le \int_0^1 \frac{y_n'^2(x)}{a^2(x)}dx = \lambda_n \int_0^1 \frac{y_n^2(x)}{a^3(x)u_n(x)}dx \le \frac{\hat{\lambda}}{\check{a}^3\alpha}\|y_n\|^2_{C(\bar{\Omega})} = \frac{\hat{\lambda}}{\check{a}^3\alpha}. \tag{19}$$

Сочетая лемму 2 (iii), (18) и (19), получаем, что существует положительная постоянная D такая, что $\|y_n\|_{C^{1,1/2}(\bar{\Omega})} \le D$. Без уменьшения общности рассуждений предположим, что

$$\frac{1}{u_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{u_*} \quad \text{в} \quad L^\infty(\Omega), \quad y_n \to y_* \quad \text{в} \quad C^1(\bar{\Omega}), \quad \lambda_n \to \lambda_*. \tag{20}$$

Очевидно, что $u_* \in \mathcal{V}(m)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в тождестве

$$\int_0^1 \frac{y_n'(x)z'(x)}{a^2(x)}dx = \lambda_n \int_0^1 \frac{y_n(x)z(x)}{a^3(x)u_n(x)}dx, \quad z \in W,$$

заключаем, что

$$\int_0^1 \frac{y_*'(x)z'(x)}{a^2(x)}dx = \lambda_* \int_0^1 \frac{y_*(x)z(x)}{a^3(x)u_*(x)}dx, \quad z \in W.$$

Поскольку $y_n \in S$, то получаем, что $y_* \neq \vartheta$, $y_*(x) \geq 0$. Таким образом, $\lambda_1[u_*] = \lambda_*$ и $y_*(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$. В силу (SP)

$$\Lambda(u, y_n) \leq \lambda_n, \quad u \in \mathcal{U}(m_n).$$

Для каждого $u \in \mathcal{U}(m)$ рассмотрим последовательность $\{v_n\}$, элементы которой определяются из соотношения

$$v_n(x) = \begin{cases} \min\{\tau_n, u(x)\}, & m_n < m, \\ \max\{\tau_n, u(x)\}, & m_n \geq m, \end{cases}$$

где $\tau_n \in I$ выбрано так, чтобы $v_n \in \mathcal{U}(m_n)$. Очевидно, $v_n(x) \to u(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. Тогда

$$\Lambda(u, y_*) \leq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(v_n, y_n) \leq \lambda_* = \Lambda(u_*, y_*),$$

где $u \in \mathcal{U}(m)$. В соответствии с предложением 2 $u_* \in \mathcal{U}(m)$. Кроме того, $\lambda_1[u] \leq \lambda_1[u_*]$, т.е. u_* является решением задачи (32).

Доказательство (ii) будет завершено, если мы покажем, что $u_n \to u_*$ в $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$ для $0 < \kappa < 1$. Пусть $\hat{\mu} > \hat{a}^{-4}\alpha^{-2}$. Из предложения 2 следует, что существует последовательность $\{\mu_n\} \subset (0, \hat{\mu})$ такая, что для $x \in \Omega$

$$\Psi(u_n(x), x, y_n(x), \mu_n) = \min_{\xi \in I} \Psi(\xi, x, y_n(x), \mu_n)$$

и

$$[u_n] \leq K(\hat{\mu}, \varepsilon(\mu_n), D), \tag{21}$$

где $\varepsilon(\mu_n) < \delta(\mu_n)$. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $\mu_n \to \mu_* \in [0, \hat{\mu}]$. Для $x \in \Omega$ пусть $w(x)$ обозначает решение следующей задачи:

$$\min_{\xi \in I} \Psi(\xi, x, y_*(x), \mu_*).$$

Поскольку $(\mu_n, y_n(x)) \to (\mu_*, y_*(x))$, то в силу [17, Теорема 1, Гл. 4] $u_n(x) \to u_*(x)$ для всех $x \in \Omega$. Принимая во внимание (20), заключаем, что $w = u_*$. Если $\mu_* = 0$, то $u_*(x) \equiv \beta$, что противоречит тому, что $u_* \in \mathcal{U}(m)$. Тогда $\mu_* > 0$ и для достаточно большого номера N

$$0 < \frac{\delta(\mu_*)}{2} \leq \delta(\mu_n), \quad n \geq N.$$

Положив

$$\varepsilon(\mu_n) = \frac{\delta(\mu_*)}{2}, \quad n \geq N,$$

получим в силу (21), что последовательность $\{u_n\}$ является ограниченной в $C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Таким образом, можно извлечь из $\{u_n\}$ подпоследовательность, сходящуюся к u_* в $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$ для $0 < \kappa < 1$. Поскольку это доказательство остается справедливым для любой подпоследовательности исходной последовательности $\{u_n\}$, то имеет место утверждение (ii).

Аналогично докажем справедливость (iii). Пусть $y_n \in S \cap \mathscr{E}_2[u_n]$, $\lambda_n = \lambda_1[u_n]$. Принимая во внимание (17), (похожими рассуждениями) получаем, что последовательность $\{y_n\}$ имеет единственный предел, который обозначим через y_*. Очевидно, $y_* \in S \cap \mathscr{E}_2[u_*]$. Кроме того, $\lambda_n \to \lambda_1[u_*]$. Из (IP) следует, что

$$\Lambda(u, y_n) \le \Lambda(u_{n+1}, y_n), \quad u \in \mathscr{U}(m).$$

Тогда

$$\Lambda(u, y_*) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(u, y_n) \le \lim_{n\to\infty} \Lambda(u_{n+1}, y_n) \le \Lambda(u_*, y_*) = \lambda_1[u_*].$$

Это означает, что $u_* = s_2[m]$. Используя рассуждения, близкие к рассуждениям, приведенным при доказательстве (ii), заключаем, что $u_n \to u_*$ в $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$ для $0 < \kappa < 1$. Теорема доказана.

2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРЫЛЬЕВ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Следующее предложение устанавливает связь между задачами $(\mathscr{P}_1)$ и $(\mathscr{P}_2)$.

Предложение 3. *Пусть* $v \in (\check{v}, \hat{v})$. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Задача* $(\mathscr{P}_1)$ *обладает единственным решением* w, *причем* $w \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $\lambda_1[w] = v$.

(ii) *Элемент* w *является решением задачи* $(\mathscr{P}_2)$ *при* $m = M[w]$.

(iii) *Если* w *— решение задачи* $(\mathscr{P}_2)$, *то* w *также является решением задачи* $(\mathscr{P}_1)$ *с* $v = v_{\max}(m)$.

Доказательство. Существование решений задачи $(\mathscr{P}_1)$ следует из [16]. Пусть w — решение этой задачи. Предположим, что $\lambda_1[w] > v$. Поскольку функционал $\lambda_1[\cdot]$ является непрерывным на множестве U относительно сильной сходимости в $L^\infty(\Omega)$, то для достаточно малого числа $\delta > 0$ найдется элемент $u \in U$ такой, что

$$u(x) \le w(x) \quad \text{п. в. в } \Omega, \quad 0 < \|u - w\|_{L^\infty(\Omega)} < \delta, \quad |\lambda_1[w] - \lambda_1[u]| < \frac{\lambda_1[w] - v}{2},$$

откуда следуют неравенства

$$\lambda_1[u] > v, \quad M[w] > M[u].$$

Таким образом, $\lambda_1[w] = v$.

Пусть $m = M[w]$. Предположим, что существует элемент $u_* \in \mathscr{V}(m)$ такой, что $\lambda_1[u_*] > v$. Поскольку $u_* \in U(v) \cap \mathscr{V}(m)$, то

$$M[u_*] = \inf_{u \in U(v)} M[u], \quad \lambda_1[u_*] > v.$$

Полученное противоречие показывает, что

$$\lambda_1[u] \le v = \lambda_1[w], \quad u \in \mathscr{V}(m).$$

Следовательно, w является решением задачи $(\mathscr{P}_2)$. Из предложения 1 и теоремы 1 теперь следует, что w — единственное решение задачи $(\mathscr{P}_1)$, причем $w \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$. Утверждение (iii) доказывается аналогично. Предложение доказано.

В дальнейшем $s_1[v]$ будет обозначать решение задачи $(\mathscr{P}_1)$. Предложение 3 позволяет заменить задачу $(\mathscr{P}_1)$ задачей нахождения решения уравнения

$$v_{\max}(m_*) = v \tag{22}$$

на интервале $(\check{m}, \hat{m})$ и последующим решением задачи $(\mathscr{P}_2)$ с $m = m_*$ для определения оптимального решения. Поэтому крайне полезно выяснить, какими свойствами обладает функция $v_{\max}(\cdot)$. Это приводит нас к следующему предложению.

Предложение 4. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Функция* $v_{\max} : [\check{m}, \hat{m}] \to [\check{v}, \hat{v}]$ *является непрерывной, возрастающей и строго вогнутой.*

(ii) *Функция* $1/v_{\max}(\cdot)$ *является строго выпуклой.*

Доказательство. Так как

$$\mathcal{V}(m_1) \subset \mathcal{V}(m_2), \quad m_1 < m_2, \quad m_1, m_2 \in [\check{m}, \hat{m}],$$

то

$$v_{\max}(m_1) < v_{\max}(m_2),$$

т.е. функция $v_{\max}(\cdot)$ является возрастающей. Из предложения 3 следует, что функция $v_{\max}(\cdot)$ является сюръективной. Таким образом, функция $v_{\max}(\cdot)$ непрерывна на $[\check{m}, \hat{m}]$.

Пусть

$$m_i \in (\check{m}, \hat{m}), \quad u_i = s_2[m_i], \quad i = 1, 2, \quad t \in (0, 1), \quad m_3 \triangleq tm_1 + (1-t)m_2.$$

Поскольку $tu_1 + (1-t)u_2 \in \mathcal{V}(m_3)$, то

$$v_{\max}(m_3) \geq \lambda_1[tu_1 + (1-t)u_2] \geq t\lambda_1[u_1] + (1-t)\lambda_1[u_2] = tv_{\max}(m_1) + (1-t)v_{\max}(m_2).$$

Если

$$v_{\max}(m_3) = tv_{\max}(m_1) + (1-t)v_{\max}(m_2),$$

то, как и в предложении 1, получаем, что $\mathcal{E}_1[u_1] = \mathcal{E}_1[u_2]$ и для почти всех x

$$a^3(x)(u_1(x) - u_2(x))\psi'(x) = (v_{\max}(m_1) - v_{\max}(m_2))\int_x^1 a^2(\xi)\psi(\xi)d\xi,$$

где $\psi \in \mathcal{E}_1[u_1]$. Из леммы 2 (ii) следует, что функция $\chi_i \in \mathcal{E}_2[u_i] \cap S$ убывает на Ω и принимает сколь угодно малые значения в окрестности точки $x = 1$. Тогда, поскольку

$$\Psi(u_i(x), x, \chi_i(x), \mu_i) = \min_{\xi \in I} \Psi(\xi, x, \chi_i(x), \mu_i)$$

для некоторого $\mu_i > 0$, должна существовать окрестность B точки $x = 1$ такая, что $u_1(x) = u_2(x) = \alpha$ на B. Таким образом, $v_{\max}(m_1) = v_{\max}(m_2)$, т.е. $m_1 = m_2$. Отсюда следует (i).

Непосредственно из предложения 1 получаем, что

$$\frac{1}{v_{\max}(m_3)} \leq \frac{1}{\lambda_1[tu_1 + (1-t)u_2]} < \frac{t}{v_{\max}(m_1)} + \frac{1-t}{v_{\max}(m_2)}.$$

Таким образом, функция $1/v_{\max}(\cdot)$ является строго выпуклой. Предложение доказано.

Теперь понятно, что свойства функции $v_{\max}(\cdot)$ позволяют построить последовательность $\{m_n\}$, сходящуюся к решению задачи (22) (например, с помощью метода деления отрезка пополам или метода Брента). Кроме того, утверждение (ii) теоремы 1 гарантирует, что соответствующая последовательность $\{s_2[m_n]\}$ сходится к $s_2[m_*]$ в $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$ при $0 < \kappa < 1$.

Единственный вопрос, требующий ответа, заключается в следующем: является ли задача $(\mathcal{P}_1)$ корректной в смысле Адамара? Следующее утверждение дает на него ответ.

Предложение 5. *Если* $v_n \to v_*$ *в* $(\check{v}, \hat{v})$, *то* $s_1[v_n] \to s_1[v_*]$ *в* $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$ *при* $0 < \kappa < 1$.

Доказательство. Поскольку функция $v_{\max}(\cdot)$ является обратимой, то решение $s_1[v]$ задачи $(\mathcal{P}_1)$ в действительности может быть записано в виде $s_2\left[v_{\max}^{-1}(v)\right]$. Желаемый результат теперь следует из теоремы 1 и предложения 4.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Численный метод решения задачи $(\mathcal{P}_1)$, который мы использовали для получения численных результатов, приводимых в следующем разделе, состоит из трех частей: (i) блок решения прямой задачи (EVP_2), который численно определяет собственную пару, отвечающую наименьшему

собственному значению этой задачи; (ii) блок решения задачи ($\mathcal{P}_2$), который находит приближенное решение w этой задачи и значение $\lambda_1[w]$; (iii) определение значения $m_* \in (\check{m}, \hat{m})$, для которого выполняется (22). Поскольку часть (iii) не должна вызывать вопросов, мы рассмотрим оставшиеся.

Перейдем к краткому описанию блока решения задачи (EVP_2). Нами применяется стандартный метод последовательных приближений, состоящий в построении последовательностей $\{\lambda_i\}$, $\{y_i\}$, элементы которых определяются формулами

$$(a^{-2}y'_{i+1})'(x) + \frac{y_i(x)}{a^3(x)u(x)} = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \quad y'_{i+1}(0) = 0, \quad y_{i+1}(1) = 0, \qquad \lambda_{i+1} = \Lambda(u, y_{i+1}), \tag{23}$$

где $i \in \mathbb{N}_0$, y_0 – заданная положительная непрерывно дифференцируемая на Ω функция, удовлетворяющая краевым условиям (7), а $u \in C(\bar{\Omega})$ (см., например, [19]). Если величина $|\lambda_{i+1} - \lambda_i|$ достаточно мала, то процесс (23) завершается, а (λ_{i+1}, y_{i+1}) выступает в качестве приближения собственной пары.

Задачу (23) заменим конечно-разностной схемой. С этой целью определим равномерную сетку с шагом $h = 1/N$ на интервале Ω. Далее, будем представлять функции a, u, y_i их значениями в узлах сетки

$$x_j = jh, \quad j = 0, \ldots, N.$$

В дальнейшем через y_{i+1}^j будем обозначать численное решение задачи (23) в узле сетки x_j, а также писать a_j, u_j вместо $a(x_j)$, $u(x_j)$ соответственно. Конечно-разностное представление уравнения в (23) может быть записано в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\frac{p_{j+1}}{h} y_{i+1}^{j+1} - \frac{p_{j+1} + p_j}{h} y_{i+1}^j + \frac{p_j}{h} y_{i+1}^{j-1} = f_j \triangleq -\frac{y_i^j}{a_j^3 u_j}, \tag{DE$_j$}$$

где $j = 1, \ldots, N-1$,

$$p_j = \left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} a^2(x)dx \right]^{-1}.$$

Мы использовали метод баланса для того, чтобы вывести (DE_j). Подробное описание этого метода приводится в [20]. Если $a \in C^2(\bar{\Omega})$, то в соответствии с [20] ошибка аппроксимации в (DE_j) суть $\mathcal{O}(h^2)$. Из

$$(a^{-2}y'_{i+1})(x_2) + \int_{x_0}^{x_2} \frac{y_i(x)}{a^3(x)u(x)} dx = 0$$

получаем, что

$$\frac{y_{i+1}^3 - y_{i+1}^1}{2ha_2^2} - 2hf_1 = 0, \tag{24}$$

причем ошибка аппроксимации в последнем уравнении составляет $\mathcal{O}(h^2)$. Из уравнений (24) и (DE_2) получаем, что

$$\frac{p_3 + p_2}{h} y_{i+1}^3 - \frac{p_3 + p_2}{h} y_{i+1}^2 = f_2 + 4hp_2 f_1 a_2^2. \tag{DE$'_2$}$$

Так как $y_{i+1}^{N} = 0$, то из (DE_{N-1}) следует, что

$$y_{i+1}^{N-1} = \frac{p_{N-1}}{p_N + p_{N-1}} y_{i+1}^{N-2} - \frac{hf_{N-1}}{p_N + p_{N-1}}. \qquad (\mathrm{DE}'_{N-1})$$

Уравнения (DE'_2), (DE_3)–(DE_{N-2}), (DE'_{N-1}) образуют систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Для нахождения решения $\left(y_{i+1}^{2}, \ldots, y_{i+1}^{N-1}\right)$ этой системы мы используем метод прогонки, который, как легко видеть, является корректным. Для определения недостающих значений y_{i+1}^{0} и y_{i+1}^{1} необходимо использовать уравнения (24) и (DE_1).

Блок решения задачи $(\mathcal{P}_2)$ полностью основан на итерационной процедуре (IP) и состоит из следующих шагов.

1. Задается $\varepsilon > 0$, $m \in (\check{m}, \hat{m})$ и начальное приближение $u_0 \in \mathcal{U}(m) \cap C(\bar{\Omega})$.

2. Вычисляется $y_n \in \mathcal{E}_2[u_n] \cap S$ и $\lambda_1[u_n]$, где $n = 0$.

3. Численно находится корень μ_* уравнения

$$\mathcal{H}_m(\mu) = 0 \quad \text{на} \quad [0, \hat{\mu}]$$

и определяется функция u_{μ_*}, которая выступает в качестве нового приближения u_{n+1}.

4. Для имеющегося приближения u_{n+1} вычисляется $y_{n+1} \in \mathcal{E}_2[u_{n+1}] \cap S$ и $\lambda_1[u_{n+1}]$.

5. Если $|\lambda_1[u_{n+1}] - \lambda_1[u_n]| < \varepsilon$ и $\|u_{n+1} - u_n\|_{C(\bar{\Omega})} < \varepsilon$, то u_{n+1} берется в качестве приближенного решения задачи $(\mathcal{P}_2)$. В противном случае осуществляется переход к шагу 3 с $n := n + 1$.

Дадим несколько поясняющих замечаний. Для того чтобы вычислить значение функции $\mathcal{H}_m(\cdot)$ в заданной точке μ, необходимо сначала решить задачу (12) с $\varphi = y_n$, чтобы определить $u_\mu(x)$ в точках $x = x_j$. Таким образом, функция $\mathcal{H}_m(\cdot)$ неявно зависит от y_n на каждой итерации в описанном алгоритме. Решение задачи (12) с $\varphi = y_n$ требует нахождения корня $\xi_*(x)$ уравнения

$$\Psi'_\xi(\xi_*(x), x, y_n(x), \mu) = 0,$$

который определяется формулой

$$\xi_*(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{y_n(x)}{a^2(x)}.$$

Тогда, как легко видеть,

$$u_\mu(x) = \begin{cases} \alpha, & \xi_*(x) \le \alpha, \\ \xi_*(x), & \alpha < \xi_*(x) < \beta, \\ \beta, & \beta \le \xi_*(x). \end{cases}$$

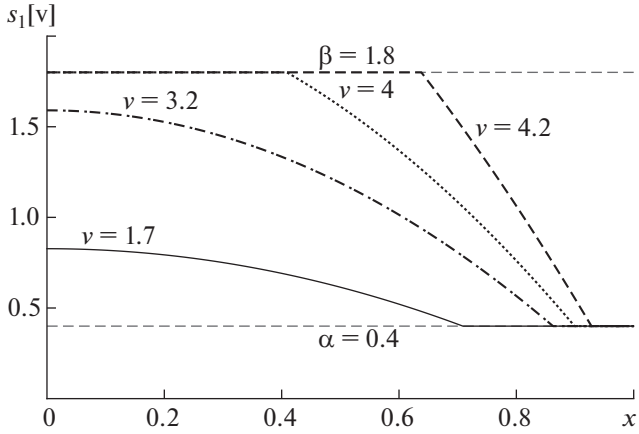
Также заметим, что в силу (16) в описанном алгоритме можно взять $\hat{\mu} = (1 + \delta)/(\alpha \check{a}^2)^2$, где $\delta > 0$.

Это завершает описание метода, используемого для численного решения задачи $(\mathcal{P}_1)$.

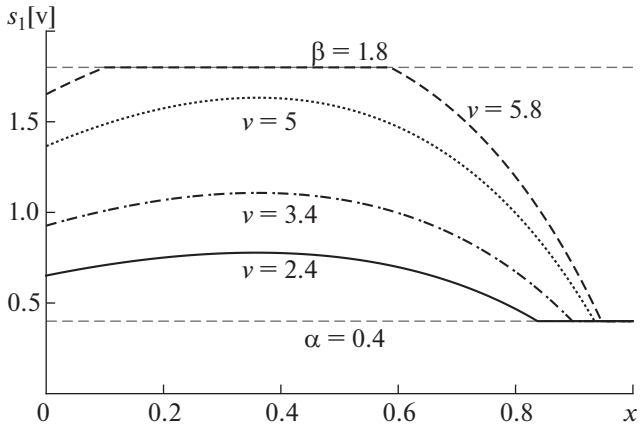
4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим численные результаты для различных значений параметра v в случае прямоугольных $(a(x) \equiv 1)$ и трапециевидных $(a(x) \equiv 1 - x/2)$ крыльев.

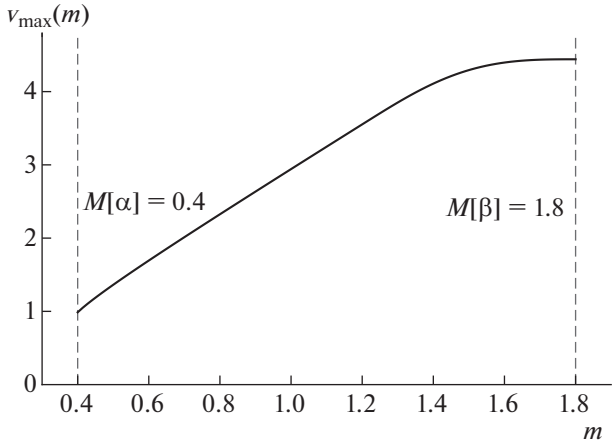
На фиг. 1 представлены оптимальные распределения толщины обшивки прямоугольного крыла $(\alpha = 0.4,\ \beta = 1.8,\ a(x) \equiv 1)$, отвечающие значениям параметра $v \in \{1.7, 3.2, 4, 4.2\}$, полученные с помощью численного метода, описанного в разд. 3. Качественное поведение оптимальных решений для $v \in \{1.7, 3.2\}$ хорошо сочетается с численными результатами работы [6], где исследовался случай $\beta = +\infty$. На фиг. 2 изображены оптимальные распределения толщины обшивки трапециевидного крыла $(\alpha = 0.4,\ \beta = 1.8,\ a(x) = 1 - x/2)$, отвечающие значениям параметра $v \in \{2.4, 3.4, 5, 5.8\}$. Как мы видим, в отличие от прямоугольных крыльев здесь максимальное значение толщины обшивки смещено от точки закрепления крыла $(x = 0)$. Необходимо отметить,



Фиг. 1. Оптимальные распределения толщины обшивки прямоугольного крыла ($a(x) \equiv 1$).



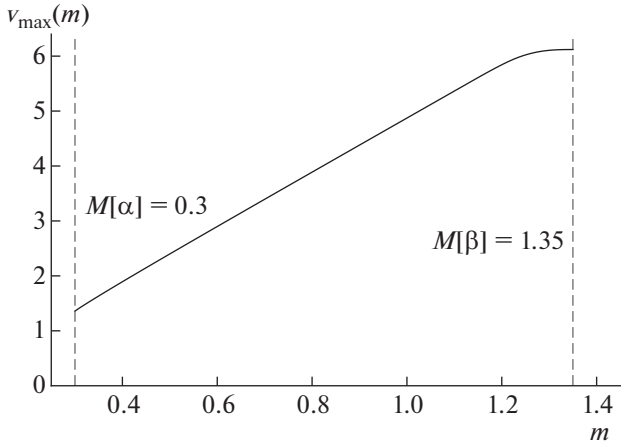
Фиг. 2. Оптимальные распределения толщины обшивки трапециевидного крыла ($a(x) \equiv 1 - x/2$).



Фиг. 3. Зависимость экстремального значения скорости дивергенции $v_{\max}(\cdot)$ от m при $\alpha = 0.4$, $\beta = 1.8$, $a(x) \equiv 1$.

что при выполнении всех вычислительных экспериментов последовательность приближений, получаемая с помощью процедуры (IP), демонстрировала поточечную сходимость.

Наконец, представляет интерес рассмотреть поведение функции $v_{\max}(\cdot)$. Ее график для прямоугольных и трапециевидных крыльев изображен на фиг. 3 и фиг. 4 соответственно.



Фиг. 4. Зависимость экстремального значения скорости дивергенции $v_{\max}(\cdot)$ от m при $\alpha = 0.4$, $\beta = 1.8$, $a(x) \equiv 1 - x/2$.

Как мы видим из фиг. 3, эта зависимость является “почти линейной” на отрезке [0.4,1.4] по переменной m (напомним, что функция $v_{\max}(\cdot)$ является строго вогнутой в соответствии с предложением 4). На отрезке [1.4,1.8] по переменной m (фиг. 3) оптимизация менее “эффективна”, так как незначительный прирост параметра v приводит к существенному увеличению массы обшивки оптимального крыла. Необходимо подчеркнуть, что описанное поведение функции $v_{\max}(\cdot)$ характерно для всех проведенных нами вычислительных экспериментов – исходный отрезок разбивается на две части: в первой функция $v_{\max}(\cdot)$ близка к линейной; во второй ее рост значительно замедляется.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой работе мы рассмотрели задачу определения оптимального распределения толщины обшивки тонкого прямого крыла, которое минимизирует массу обшивки крыла при условии, что выполняется ограничение на скорость дивергенции. Как уже упоминалось в разд. 2, эта экстремальная задача сводится к определению значения m_*, для которого выполняется соотношение (22). Это означает, что исходная задача может быть заменена последовательностью вспомогательных задач оптимизации вида $(\mathcal{P}_2)$. В соответствии с [18] задача $(\mathcal{P}_2)$, в свою очередь, эквивалентна задаче нахождения седловой точки функционала $\Lambda(\cdot,\cdot)$. Поэтому вполне естественно использовать итерационную процедуру (IP) для решения задачи $(\mathcal{P}_2)$. Как нам известно из разд. 1 и разд. 2, для получения нового приближения управляющей переменной в рамках этой процедуры, можно просто применить тот или иной метод отыскания корня. Интересно заметить, что предложенный нами алгоритм для решения задачи $(\mathcal{P}_1)$ в действительности не использует каких-либо методов оптимизации. Результаты этой работы позволили свести исходную экстремальную задачу к задаче нахождения корня некоторой непрерывной функции.

Разумеется, введенный в этой работе подход имеет несколько обобщений в различных направлениях. Во-первых, хотя мы концентрировали наше внимание только на случае тонких прямых крыльев, нетрудно адаптировать полученные результаты на ситуацию, когда рассматривается более общая краевая задача. Такая задача, вовлекающая большее число параметров проектирования, рассмотрена в [5]. Во-вторых, очевидно, что подобно тому, как это сделано в разд. 1, можно исследовать случай линейных эллиптических операторов в дивергентной форме, который будет рассмотрен в последующей работе. Наконец, стоит отметить, что подход, предложенный в этой работе, без труда может быть применен к аналогичным задачам оптимального проектирования для шарнирно опертых колонн, а также колонн, у которых один конец защемлен, а другой свободен. Постановка соответствующих задач оптимизации в случае без ограничений приводится в [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л.* Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. *McIntosh S.C., Eastep F.E.* Design of minimum-mass structures with specified stiffness properties // AIAA Journal. 1968. Т. 6. № 5. С. 962–964.
3. *Арутюнов Ю.А., Сейранян А.П.* Применение принципа максимума к задаче минимизации веса крыла летательного аппарата // Уч. зап. ЦАГИ. 1973. Т. 4. № 1. С. 55–70.
4. *Шубин М.А.* Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003.
5. *Баничук Н.В.* Минимизация веса крыла при ограничении по скорости дивергенции // Уч. зап. ЦАГИ. 1978. Т. 9. № 5. С. 97–103.
6. *Armand J.-L., Vitte W.J.* Foundations of aeroelastic optimization and some applications to continuous systems. Stanford: Stanford University, 1970.
7. *Брайсон А.Е.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
8. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
9. *Муравей Л.А., Петров В.М., Романенков А.М.* Оптимальное управление нелинейными процессами в задачах математической физики. М.: МАИ, 2018.
10. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
11. *Henrot A.* Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 2006.
12. *Troesch B.A.* An isoperimetric sloshing problem // Communications on Pure and Applied Math. 1965. Т. 18. С. 319–338.
13. *Bandle C.* Extremal problems for eigenvalues of the Sturm–Liouville type // General Inequalities 5. 1987. С. 319–336.
14. *Егоров Ю.В., Кондратьев В.А.* Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51. № 3. С. 73–144.
15. *Крейн М.Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости // Прикл. матем. и механ. 1951. Т. 15. № 3. С. 323–348.
16. *Goncharov V.Yu.* Existence criteria in some extremum problems involving eigenvalues of elliptic operators // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2016. Т. 9. № 1. С. 37–47.
17. *Измаилов А.Ф.* Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006.
18. *Гончаров В.Ю.* Задачи максимизации собственных значений линейных эллиптических операторов // Сиб. электрон. матем. изв. 2017. Т. 14. С. 1349–1372.
19. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.
20. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
21. *Tadjbakhsh I., Keller J.B.* Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues // J. Appl. Mech. 1962. Т. 29. С. 159–164.