ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 3, с. 391–408

УДК 519.632

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

© 2019 г. А. С. Ильинский[1],*, И. С. Полянский[1,2],**

([1]119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия;
[2] 302015 Орёл, Академия ФСО России, Россия)
**e-mail: celd@cs.msu.su*
***e-mail: van341@mail.ru*

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

В статье задано соотношение по нахождению гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников. Решение является приближенно-аналитическим. В сформулированной постановке гармонические барицентрические координаты определяются через логарифмический потенциал двойного слоя при решении задачи Дирихле методом Фредгольма. Приближенность решения обусловлена применяемым разложением в системе ортогональных многочленов Лежандра ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно неизвестной плотности потенциала на границе области и функции Грина при вычислении потенциала. Выполнена оценка сходимости и точности заданного решения. Для наглядного сравнения предпочтительности предложенного решения приведены расчеты на тестовых примерах. Библ. 26. Фиг. 4.

Ключевые слова: гармонические барицентрические координаты, произвольный многоугольник, уравнение Лапласа, логарифмический потенциал двойного слоя, уравнение Фредгольма, многочлены Лежандра.

DOI: 10.1134/S0044466919030098

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной этап барицентрического метода [1], применяемого в приближении вариационных методов И.Г. Бубнова, Б.Г. Галеркина и В. Ритца при численном решении дифференциальных уравнений теории упругости [2], дифференциальных уравнений электродинамики [3], [4], сингулярных интегральных уравнений [5], [6] в задачах дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах [7], связан с определением барицентрических координат [8]–[10] для односвязной замкнутой области с кусочно-линейной границей. Барицентрические координаты (БК) введены Мёбиусом в 1827 г. с заданием методов их определения для симплексов в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Обобщения БК на выпуклые многоугольники предложены значительно позднее в XX веке (начиная с 1961 г.) в работах таких ученых, как J.A. Kalman, E.L. Wachspress, W.J. Gordon, J.A. Wixom, M.S. Floater и в основном связаны с введением Wachspress (WP) координат [8]. В последующих работах в XXI веке учеными M. Meyer, M.S. Floater, J. Warren, K. Hormann, N. Sukumar, Tao Ju, S. Schaefe, A. Belyaev, P. Liepa, Y. Lipman, D. Levin, O. Weber, M. Ben-Chen, C. Gotsman, R. Rustamov, A. Guessab, Xian-Ying Li, Shi-Min Hu и др. разработан ряд методов определения БК для произвольных многоугольников и многогранников, основные из которых связаны с координатами: Mean value coordinates (MVC), Gordon-Wixom (GP), Maximum entropy coordinates (MCE), Moving least squares coordinates (MLSC), Poisson coordinates (PC), Complex barycentric coordinates (CBC). Краткий обзор существующих методов определения БК с представлением дополнительных решений по обобщению задачи $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$ представлен в [1], [9], [10] с указанием основного недостатка – они позволяют в лучшем случае определять псевдогармонические БК для выпуклой области. Последнее приводит к ограничению барицентрического метода [1] при решении задач математической физики для сложных относительно геометрической формы структур. Метод по определению гармонических БК для односвязной замкнутой области с кусочно-линейной границей предложен в [11]. Его недостатки связаны с необходимостью дополнительного решения обратной задачи конформного отображения анализируемой области на каноническую [12], [13] и вычислению интеграла при определении БК для вогнутых многоугольников. Последнее снижает универсальность и относительную простоту программной реализации барицентрического метода [1] в сравнении с наиболее распространенным в современных САПР методом решения краевых и начальной краевых задач математической физики – методом конечных элементов.

Целью настоящей статьи является устранение указанного недостатка путем задания относительно простого аналитического соотношения (составляется из конечных и простых математических операций и функций), позволяющего с заданной точностью определять гармонические БК для произвольных многоугольников.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для удобства математической записи определим постановку задачи на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Построим односвязную область $\Omega \subset \mathbb{C}$, ограниченную замкнутой ломаной линией Γ без самопересечений при

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{N-1} \Gamma_i,$$

где Γ_i – прямолинейный отрезок, соединяющий точки P_i и P_{i+1} (вершины Ω при $i = \overline{0, N-1}$, $P_N = P_0$) и допускающий следующее параметрическое представление:

$$\Gamma_i = \{x_i = x_i(t) = (P_{i+1} - P_i)t + P_i, t \in [0,1]\}.$$

С учетом известных из [2], [11] свойств и определений БК для задания гармонических барицентрических координат ζ_i рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered}
\Delta\zeta_i(x) = 0, \quad x \in \Omega; \\
\zeta_i(x) = t, \quad x \in \Gamma_{i-1}; \\
\zeta_i(x) = 1 - t, \quad x \in \Gamma_i; \\
\zeta_i(x) = 0, \quad x \in \Gamma \backslash \{\Gamma_{i-1}, \Gamma_i\}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Решение задачи Дирихле (1) выполним известным методом Фредгольма [14] при представлении функции ζ_i в виде логарифмического потенциала двойного слоя (см. [15]):

$$\zeta_i(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \Phi_i(y)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial n_y}dl_y, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_y}$ обозначает частную производную по внутренней нормали к Γ в точке y; dl_y – дифференциал кривой Γ; $\Phi_i(y)$ – неизвестная плотность на границе $y \in \Gamma$ области Ω, однозначно определяемая из интегрального уравнения Фредгольма II рода (см. [16]):

$$\Phi_i(x) - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \Phi_i(y)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial n_y}dl_y = 2U_i(x), \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

где через $U_i(x)$ обозначены заданные в (1) значения $\zeta_i(x)$ на Γ.

Учитывая параметризацию Γ и граничные условия из (1), интегральное уравнение (3) запишем в виде

$$\varphi_j^i(t) + \sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 \varphi_k^i(s)K_{j,k}(t,s)ds = u_j^i(t), \tag{4}$$

где $\varphi_j^i(t) = \Phi_i(x_j(t))$; $u_j^i(t) = 2U_i(x_j(t))$; $j = \overline{0, N-1}$; $K_{j,k}(t,s)$ – ядро интегрального уравнения (4), которое с учетом [14], [17] при $t, s \in [0,1]$ определяется соотношением

$$K_{j,k}(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[\dfrac{e_k}{e_j t + P_j - e_k s - P_k}\right], & j \neq k, \\ 0, & j = k. \end{cases} \tag{5}$$

В выражении (5) введены обозначения $e_k = P_{k+1} - P_k$; $e_j = P_{j+1} - P_j$.

Решение интегрального уравнения (4) относительно $\varphi_j^i(t)$ позволяет задать ζ_i при вычислении интеграла:

$$\zeta_i(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1 \varphi_j^i(t) K_j(t,x)\,dt, \tag{6}$$

где

$$K_j(t,x) = \mathrm{Im}\left[\frac{e_j}{e_j t + P_j - x}\right]. \tag{7}$$

3. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

С учетом заданной постановки задачи определим приближение (6) при решении (4), используя следующие утверждения.

Лемма 1. *Ядро* $K_{j,k}(t,s)$ *интегрального уравнения* (4) *допускает разложение вида*

$$\begin{gathered} K_{j,k}(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\lambda_n^{j,k}(t) L_n(s); \\ \lambda_n^{j,k}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[L_n\left(\dfrac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right)\ln\left(\dfrac{e_j t + R_{j,k+1}}{e_j t + R_{j,k}}\right) + 2W_{n-1}\left(\dfrac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right)\right], & j \neq k, \\ 0, \quad j = k. \end{cases} \end{gathered} \tag{8}$$

В выражении (8) $R_{j,k} = P_j - P_k$; $L_n(s)$ – сдвинутый на интервале ортогональности $[0,1]$ многочлен Лежандра; $W_n(s)$ – вспомогательная функция (см. [18]):

$$\begin{gathered} L_n(s) = \frac{1}{2^n}\sum_{h=0}^{[n/2]}(-1)^h\binom{n}{h}\binom{2n-2h}{n}(2s-1)^{n-2h}; \\ W_n(s) = \sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{2(n-2h)+1}{(2h+1)(n+1-h)}L_{n-2h}(s), \quad W_{-1}(s) \equiv 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство. Определим разложение ядра $K_{j,k}(t,s)$ интегрального уравнения (4) в системе многочленов $L_n(s)$

$$K_{j,k}(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\lambda}_n^{j,k}(t)\sqrt{2n+1}L_n(s), \tag{10}$$

где $\tilde{\lambda}_n^{j,k}(t)$ с учетом $\int_0^1 L_n(s) L_m(s)\,ds = \dfrac{\delta_{nm}}{2n+1}$ задается интегралом:

$$\tilde{\lambda}_n^{j,k}(t) = \sqrt{2n+1}\int_0^1 L_n(s) K_{j,k}(t,s)\,ds. \tag{11}$$

В случае $j = k$ интеграл (11) вычисляется тривиально $\tilde{\lambda}_n^{j,k}(t) = 0$. Рассмотрим случай $j \neq k$ и, подставив в (11) определение $K_{j,k}(t,s)$ из (5), получим

$$\tilde{\lambda}_n^{j,k}(t) = -\frac{\sqrt{2n+1}}{\pi}\mathrm{Im}\left[\int_0^1 \frac{L_n(s) e_k}{e_j t + P_j - e_k s - P_k}ds\right]. \tag{12}$$

Приняв обозначения $s = \dfrac{l - P_k}{e_k}$, $z = e_j t + P_j$, с применением формулы замены переменной приведем определенный интеграл в (12) к виду

$$\int_0^1 \frac{L_n(s)e_k}{e_j t + P_j - e_k s - P_k} ds = \int_{\frac{-P_k}{e_k}}^{\frac{1-P_k}{e_k}} \frac{L_n\left(\frac{l - P_k}{e_k}\right)}{z - l} dl. \tag{13}$$

Из [19] известно, что при $|\arg(z-1)| < \pi$ справедливо $\tilde{Q}_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\tilde{L}_n(l)}{z-l} dl$, где $\tilde{L}_n(l)$ и $\tilde{Q}_n(z)$ – многочлены Лежандра I и II рода соответственно при $\tilde{Q}_n(z) = \frac{1}{2}\tilde{L}_n(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) -- \tilde{W}_{n-1}(z)$; $\tilde{W}_{n-1}(z)$ определяется с учетом (9) через $\tilde{L}_n(z)$. Для указанного тождества, применяя аффинное преобразование при определении сдвинутых многочленов Лежандра на интервале ортогональности $\left[\frac{-P_k}{e_k}, \frac{1-P_k}{e_k}\right]$ с учетом (9), определим (13) в виде

$$\int_{\frac{-P_k}{e_k}}^{\frac{1-P_k}{e_k}} \frac{L_n\left(\frac{l - P_k}{e_k}\right)}{z - l} dl = -L_n\left(\frac{z - P_k}{e_k}\right)\ln\left(\frac{z - P_{k+1}}{z - P_k}\right) - 2W_{n-1}\left(\frac{z - P_k}{e_k}\right). \tag{14}$$

Подставив (14) в (12), при обратной замене $z = e_j t + P_j$ получим

$$\tilde{\lambda}_n^{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2n+1}}{\pi}\operatorname{Im}\left[L_n\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right)\ln\left(\frac{e_j t + R_{j,k+1}}{e_j t + R_{j,k}}\right) + 2W_{n-1}\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right)\right]. \tag{15}$$

Из (15) следует $\tilde{\lambda}_n^{j,k}(t) = \sqrt{2n+1}\lambda_n^{j,k}(t)$, что с учетом (10) доказывает справедливость (8).

Из формулировки и доказательства леммы 1 для заданной постановки задачи следует наличие особенностей при определении функции $\lambda_n^{j,k}(t)$ для $t \in [0,1]$, $j,k \in \left\{\overline{0, N-1}\right\}$.

Лемма 2. *Пусть $j \neq k$, $j+1 \neq k$ и $j \neq k+1$, тогда для $m,n \in \{0,\mathbb{N}\}$ имеет место тождество*

$$\int_0^1 \lambda_m^{j,k}(t) L_n(t) dt = \frac{(-1)^{n+m}}{\pi}\left(C_{m,n}^{j,k} + D_{m,n}^{j,k}\right), \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} C_{m,n}^{j,k} = \sum_{h=1}^{n+m+1} \operatorname{Im}\Bigg[B_{h-1,m,n}^{j,k} \Bigg(\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j+1,k}}\right) + \left(\frac{R_{j,k}}{-e_j}\right)^h \left[\ln\left(\frac{R_{j+1,k}}{R_{j,k}}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{h}\frac{1}{v}\left(\frac{-e_j}{R_{j,k}}\right)^v\right] - \left(\frac{R_{j,k+1}}{-e_j}\right)^h \left[\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j,k+1}}\right) + \sum_{v=1}^{h}\frac{1}{v}\left(\frac{-e_j}{R_{j,k+1}}\right)^v\right]\Bigg)\Bigg]; \end{aligned} \tag{17}$$

$$D_{m,n}^{j,k} = \begin{cases} -2\displaystyle\sum_{v=0}^{[(m-1)/2]} \frac{2(m-2v)-1}{(2v+1)(m-v)} \sum_{h=1}^{n+m+1} \tilde{B}_{h-1,m-2v-1,n}^{j,k}, & m > n, \\ 0, \quad m \leq n. \end{cases} \tag{18}$$

В выражении (17) принято обозначение

$$B_{h,m,n}^{j,k} = \frac{1}{h+1}\sum_{v=0}^{h}\left(\frac{e_j}{R_{j,k}}\right)^v A_{h-v,n} \sum_{r=v}^{n+m}\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^r A_{r,m}\binom{r}{v}, \tag{19}$$

где $A_{h,n} = \prod_{v=0}^{h-1}(v-n)(n+1+v)(v+1)^{-2}$, $A_{0,n} \equiv 1$.

В выражении (18) коэффициенты $\tilde{B}^{j,k}_{h,m,n}$ определяются аналогично соотношению (19) при том, что суммирование по индексу r производится на интервале $[v; n+m+h]$, а суммирование по индексу v выполняется для мнимой части стоящего за знаком суммы выражения.

Доказательство. В интеграл выражения (16) подставим определение $\lambda^{j,k}_m(t)$ из (8) при $j \neq k$ и с учетом свойств логарифма получим сумму трех интегралов:

$$\int_0^1 \lambda^{j,k}_m(t) L_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left[\int_0^1 L_m\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) L_n(t)\ln\left(e_j t + R_{j,k+1}\right)dt - \right.$$
$$\left. - \int_0^1 L_m\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) L_n(t)\ln(e_j t + R_{j,k})dt + 2\int_0^1 W_{m-1}\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) L_n(t)\,dt\right]. \tag{20}$$

Заметим, что составной частью всех подынтегральных выражений (20) является произведение многочленов Лежандра $L_m\left(\dfrac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) L_n(t)$. С учетом отмеченного и [20] зададим равенство

$$\int_0^1 L_m\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) L_n(t)\,dt = (-1)^{n+m}\int_0^1 F\left(-m, m+1, 1, \frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) F(-n, n+1, 1, t)\,dt, \tag{21}$$

где $F(a,b,c,d)$ – гипергеометрическая функция [19], вычисляемая, к примеру, для $a = -m$; $b = m+1$; $c = 1$; $d = \dfrac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}$ следующим образом:

$$F\left(-m, m+1, 1, \frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty}\left[A_{h,m}\left(\frac{e_j}{e_k}t + \frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^h\right]. \tag{22}$$

Преобразуя функцию $f(t) = \sum_{h=1}^{\infty}\left[A_{h,m}\left(\dfrac{e_j}{e_k}t + \dfrac{R_{j,k}}{e_k}\right)^h\right]$ при разложении в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$ перепишем выражение (22) в виде

$$F\left(-m, m+1, 1, \frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) = 1 + \sum_{h=1}^{\infty}\left[A_{h,m}\sum_{v=0}^{h}\left(\binom{h}{v}\left(\frac{e_j}{e_k}\right)^v\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^{h-v} t^v\right)\right] =$$
$$= \sum_{h=1}^{\infty} A_{h,m}\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^h + \sum_{h=1}^{\infty}\left[\left(\frac{e_j}{e_k}\right)^h t^h \sum_{v=h}^{\infty}\left(A_{v,m}\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^{v-h}\binom{v}{h}\right)\right]. \tag{23}$$

Используя аналогичное (22) представление для $F(-n, n+1, 1, t)$, с учетом (23), того, что $A_{h,m} = 0$ при $h \neq 0 \wedge h > m$, $A_{v,n} = 0$ при $v \neq 0 \wedge v > n$, равенства [19] $\int_0^1 t^h L_n(t)\,dt = 0$ при $h < n$ определим интеграл (21) следующим соотношением:

$$\int_0^1 L_m\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) L_n(t)\,dt = (-1)^m \sum_{h=0}^{m}\left\{\int_0^1 L_n(t)\,t^h dt \sum_{v=h}^{m}\left[A_{v,m}\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^{v-h}\binom{v}{h}\right]\left(\frac{e_j}{e_k}\right)^h\right\} =$$
$$= (-1)^{n+m}\sum_{h=n}^{n+m}\left[\left(\frac{e_j}{R_{j,k}}\right)^h \sum_{v=0}^{n}\frac{A_{v,n}}{h+v+1}\sum_{v=h}^{n+m} A_{v,m}\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^v\binom{v}{h}\right]. \tag{24}$$

С учетом (24) и равенства

$$\int_0^1 t^h \ln\left(e_j t + R_{j,k+1}\right)dt = \frac{1}{h+1}\left[\ln\left(R_{j+1,k+1}\right) - \int_0^1 \frac{e_j t^{h+1}}{R_{j,k+1} + e_j t}dt\right] =$$
$$= \frac{1}{h+1}\left\{\ln\left(R_{j+1,k+1}\right) - \left(\frac{-R_{j,k+1}}{e_j}\right)^{h+1}\left[\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j,k+1}}\right) + \sum_{v=1}^{h+1}\frac{1}{v}\left(\frac{-e_j}{R_{j,k+1}}\right)^V\right]\right\}$$

преобразуем первый интеграл в правой части выражения (20) к виду

$$\int_0^1 L_m\left(\frac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}\right)L_n(t)\ln\left(e_jt+R_{j,k+1}\right)dt=(-1)^{n+m}\sum_{h=0}^{m}\left\{\sum_{v=0}^{n}\frac{A_{v,n}}{h+v+1}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\ln\left(R_{j+1,k+1}\right)-\left(\frac{-R_{j,k+1}}{e_j}\right)^{h+v+1}\left(\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j,k+1}}\right)+\sum_{r=1}^{h+v+1}\frac{1}{r}\left(\frac{-e_j}{R_{j,k+1}}\right)^r\right)\right]\left(\frac{e_j}{R_{j,k}}\right)^h\sum_{v=h}^{m}A_{v,m}\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^v\binom{v}{h}\right\}. \tag{25}$$

С учетом свойств степенных рядов [21] и (19) представим (25) в виде

$$\int_0^1 L_m\left(\frac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}\right)L_n(t)\ln\left(e_jt+R_{j,k+1}\right)dt=(-1)^{n+m}\times$$
$$\times\sum_{h=1}^{n+m+1}\left[B^{j,k}_{h-1,m,n}\left(\ln\left(R_{j+1,k+1}\right)-\left(\frac{R_{j,k+1}}{-e_j}\right)^h\left[\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j,k+1}}\right)+\sum_{v=1}^{h}\frac{1}{v}\left(\frac{-e_j}{R_{j,k+1}}\right)^v\right]\right)\right]. \tag{26}$$

Выполняя аналогичные (25), (26) преобразования для второго интеграла в правой части выражения (20), определим, что

$$\int_0^1 L_m\left(\frac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}\right)L_n(t)\ln\left(\frac{e_jt+R_{j,k+1}}{e_jt+R_{j,k}}\right)dt=(-1)^{n+m}\sum_{h=1}^{n+m+1}\left[B^{j,k}_{h-1,m,n}\left\{\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j+1,k}}\right)+\left(\frac{R_{j,k}}{-e_j}\right)^h\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\ln\left(\frac{R_{j+1,k}}{R_{j,k}}\right)+\sum_{v=1}^{h}\frac{1}{v}\left(\frac{-e_j}{R_{j,k}}\right)^v\right]-\left(\frac{R_{j,k+1}}{-e_j}\right)^h\left[\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j,k+1}}\right)+\sum_{v=1}^{h}\frac{1}{v}\left(\frac{-e_j}{R_{j,k+1}}\right)^v\right]\right\}\right]. \tag{27}$$

Заметим, что мнимая составляющая правой части равенства (27) эквивалентна соотношению (16), т.е.

$$C^{j,k}_{m,n}=(-1)^{n+m}\mathrm{Im}\left[\int_0^1 L_m\left(\frac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}\right)L_n(t)\ln\left(\frac{e_jt+R_{j,k+1}}{e_jt+R_{j,k}}\right)dt\right]. \tag{28}$$

Учитывая определение (9) функции $W_n(s)$ через многочлены Лежандра $L_n(s)$, свойства интегралов по сферическим функциям из [19] и используя (24), несложно вычислить третий слагаемый интеграл в правой части выражения(20) для $m>n$ соотношением

$$\int_0^1 W_{m-1}\left(\frac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}\right)L_n(t)dt=(-1)^{n+m+1}2\sum_{h=1}^{n+m+1}\sum_{v=0}^{[(m-1)/2]}\frac{2(m-2v)-1}{(2v+1)(m-v)}\tilde{B}'^{j,k}_{h-1,m-2v-1,n}, \tag{29}$$

где

$$\tilde{B}'^{j,k}_{h-1,m-2v-1,n}=\frac{1}{h+1}\sum_{v=0}^{h}\left(\frac{e_j}{R_{j,k}}\right)^v A_{h-v,n}\sum_{r=v}^{n+m+h}\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^r A_{r,m}\binom{r}{v}. \tag{30}$$

В остальных случаях $(m\le n)$ с учетом [19] третий слагаемый интеграл в правой части выражения (20) вычисляется тривиально $\int_0^1 W_{m-1}\left(\frac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}\right)L_n(t)dt=0$, что для (29), (30) и (18) при $\tilde{B}^{j,k}_{h-1,m-2v-1,n}=\mathrm{Im}\left(\tilde{B}'^{j,k}_{h-1,m-2v-1,n}\right)$ определяет справедливость равенства

$$D^{j,k}_{m,n}=\begin{cases}(-1)^{n+m+1}2\,\mathrm{Im}\left[\int_0^1 W_{m-1}\left(\frac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}\right)L_n(t)dt\right], & m>n,\\ 0, \quad m\le n.\end{cases} \tag{31}$$

Доказанные тождества (28), (31) для (20) определяют справедливость (16).

Лемма 3. *Пусть* $j \neq k$, $j+1 \neq k$ *и* $j = k+1$, *тогда для* $m, n \in \{0, \mathbb{N}\}$ *имеет место тождество*

$$\int_0^1 \lambda_m^{j,k}(t)\, L_n(t)\, dt = \frac{(-1)^{n+m}}{\pi}\left(C_{k,m,n}^{\langle 1\rangle} + D_{m,n}^{j,k}\right), \tag{32}$$

где

$$C_{k,m,n}^{\langle 1\rangle} = \sum_{h=1}^{n+m+1} \operatorname{Im}\left[B_{h-1,m,n}^{k+1,k}\left(\ln\left(\frac{R_{k+2,k+1}}{R_{k+2,k}}\right) + \left(\frac{R_{k+1,k}}{-e_{k+1}}\right)^h \left[\ln\left(\frac{R_{k+2,k}}{R_{k+1,k}}\right) + \sum_{v=1}^{h}\frac{1}{v}\left(\frac{-e_{k+1}}{R_{k+1,k}}\right)^v\right] - \frac{1}{h}\right]. \tag{33}$$

Доказательство. Справедливость (32) следует из доказательства леммы 2 с учетом того, что возникает особенность в (27) при определении $\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j,k+1}}\right)$ и $\frac{-e_j}{R_{j,k+1}}$. Для ее устранения с применением правил интегрирования по частям с учетом (24) зададим первый интеграл из правой части выражения (20) в виде

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_m\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) L_n(t) \ln\left(e_j t + R_{j,k+1}\right) dt = (-1)^{n+m}\Bigg[\ln\left(e_j + R_{j,k+1}\right)\times \\ \times \sum_{h=1}^{n+m+1} B_{h-1,m,n}^{j,k} - \int_0^1 \frac{e_j}{e_j t + R_{j,k+1}} \sum_{h=1}^{n+m+1} B_{h-1,m,n}^{j,k} t^h dt\Bigg].\end{aligned} \tag{34}$$

С учетом свойств гипергеометрических функций [19], $R_{j,k+1} = 0$ и (24) определим интеграл в правой части соотношения (34) в виде

$$\int_0^1 \frac{e_j}{e_j t + R_{j,k+1}} \sum_{h=1}^{n+m+1} B_{h-1,m,n}^{j,k} t^h dt = \int_0^1 \sum_{h=1}^{n+m+1} B_{h-1,m,n}^{j,k} t^{h-1} dt = \sum_{h=1}^{n+m+1} \frac{B_{h-1,m,n}^{j,k}}{h}. \tag{35}$$

Подставив (35) в (25) с учетом $j = k+1$, (20) и (27) определим справедливость (33), (32).

Лемма 4. *Пусть* $j \neq k$, $j+1 = k$ *и* $j \neq k+1$, *тогда для* $m, n \in \{0, \mathbb{N}\}$ *имеет место тождество*

$$\int_0^1 \lambda_m^{j,k}(t)\, L_n(t)\, dt = \frac{(-1)^{n+m}}{\pi}\left(C_{j,m,n}^{\langle 2\rangle} + D_{m,n}^{j,k}\right), \tag{36}$$

где

$$C_{j,m,n}^{\langle 2\rangle} = \sum_{h=1}^{n+m+1} \operatorname{Im}\left[B_{h-1,m,n}^{j,j+1}\left(\ln\left(\frac{R_{j+1,j+2}}{-e_j}\right) + \sum_{v=1}^{h}\frac{1}{v} - \left(\frac{R_{j,j+2}}{-e_j}\right)^h \left[\ln\left(\frac{R_{j+1,j+2}}{R_{j,j+2}}\right) + \sum_{v=1}^{h}\frac{1}{v}\left(\frac{-e_j}{R_{j,j+2}}\right)^v\right]\right)\right]. \tag{37}$$

Доказательство. Справедливость (36) следует из доказательства леммы 2 с учетом того, что при вычислении интеграла по правилу (27) возникает особенность при определении $\ln\left(\frac{R_{j+1,k+1}}{R_{j+1,k}}\right)$ и $\ln\left(\frac{R_{j+1,k}}{R_{j,k}}\right)$. Для ее устранения с учетом $R_{j,k} = -e_j$ при $j+1 = k$ зададим разложение $\ln\left(e_j t + R_{j,k}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$:

$$\ln\left(e_j t + R_{j,k}\right) = \ln(-e_j) - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v}{v}. \tag{38}$$

С учетом (38) вычислим второй слагаемый интеграл в правой части выражения (20) в виде

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_m\left(\frac{e_j t + R_{j,k}}{e_k}\right) L_n(t) \ln\left(e_j t + R_{j,k}\right) dt = (-1)^{n+m} \sum_{h=1}^{n+m+1}\Bigg[\sum_{v=0}^{h-1}\Bigg(\left(\frac{e_j}{R_{j,k}}\right)^v \times \\ \times A_{h-1-v,n} \sum_{r=v}^{n+m}\left(\frac{R_{j,k}}{e_k}\right)^r A_{r,m}\binom{r}{v}\Bigg)\left(\frac{\ln(-e_j)}{h} - \sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v(h+v)}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{39}$$

Заметим, что [19]: $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(h+\nu)}=\frac{1}{h}\sum_{\nu=1}^{h}\frac{1}{\nu}$, тогда для (24) перепишем (39) в виде

$$\int_0^1 L_m\left(\frac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}\right)L_n(t)\ln\left(e_jt+R_{j,k}\right)dt=(-1)^{n+m}\sum_{h=1}^{n+m+1}B_{h-1,m,n}^{j,k}\left(\ln(-e_j)-\sum_{\nu=1}^{h}\frac{1}{\nu}\right). \tag{40}$$

Принимая во внимание (40) при вычислении (27) с учетом $j+1=k$ и (20), определим справедливость (37), (36).

Таким образом, полученные результаты (леммы 2–4) с учетом леммы 1 позволяют выделить особенности функции $\lambda_n^{j,k}(t)$ для $t\in[0,1]$, $j,k\in\{\overline{0,N-1}\}$, и перейти к непосредственному решению задач (4), (6) нахождения гармонических БК (1).

Теорема 1. *Барицентрические координаты* $\zeta_i(x)$*, удовлетворяющие условиям* (1), *определяются соотношением*

$$\zeta_i(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\left[G_j^i(x)-\sum_{n=0}^{\infty}Q_{j,n}^i\lambda'_{j,n}(x)\right], \tag{41}$$

где

$$\lambda'_{j,n}(x)=\operatorname{Im}\left[L_n\left(\frac{x-P_j}{e_j}\right)\ln\left(\frac{x-P_{j+1}}{x-P_j}\right)+2W_{n-1}\left(\frac{x-P_j}{e_j}\right)\right];$$

$$G_j^i(x)=\begin{cases}2\operatorname{Im}\left[\dfrac{P_{j+1}-x}{e_j}\ln\left(\dfrac{P_{j+1}-x}{P_j-x}\right)\right], & i=j,\\ 2\operatorname{Im}\left[\dfrac{P_j-x}{e_j}\ln\left(\dfrac{P_j-x}{P_{j+1}-x}\right)\right], & i+1=j,\\ 0,\quad i\neq j,\quad i+1\neq j; & \end{cases} \tag{42}$$

$$Q_{j,n}^i=\frac{2n+1}{\pi}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n+m}S_{k,m}^i\sqrt{2m+1}\left(C_{m,n}^{j,k}+D_{m,n}^{j,k}\right).$$

В выражении (42) $D_{n,m}^{j,k}$ и $C_{n,m}^{j,k}$ вычисляются соотношениями (18) и (17), (33), (37) соответственно с учетом выделенных особенностей для $\lambda_m^{j,k}(t)$; $S_{k,m}^i$ – коэффициенты, определяемые из решения системы линейных уравнений:

$$\mathbf{S}^i+\mathbf{S}^i\mathbf{T}=\mathbf{U}^i, \tag{43}$$

где $\mathbf{T}$ – блочная матрица, составленная из элементов $t_{m,n}^{j,k}=\dfrac{(-1)^{n+m}}{\pi}\sqrt{2n+1}\sqrt{2m+1}\left(C_{m,n}^{j,k}+D_{m,n}^{j,k}\right)$; $\mathbf{S}^i$ – блочный вектор неизвестных элементов $S_{k,m}^i$; $\mathbf{U}^i$ – блочный вектор, составленный из элементов:

$$U_{k,m}^i=\sqrt{2m+1}\int_0^1 u_k^i(t)L_m(t)dt=\begin{cases}1, & (i=k\vee i=k-1)\wedge m=0,\\ -1/\sqrt{3}, & i=k\wedge m=1,\\ 1/\sqrt{3}, & i=k-1\wedge m=1,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Подставив разложение (8) ядра $K_{j,k}(t,s)$ в интегральное уравнение (4), получим

$$\varphi_j^i(t)+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\lambda_m^{j,k}(t)\int_0^1\varphi_k^i(s)L_m(s)ds=u_j^i(t). \tag{44}$$

Для (44) применим известный метод вырожденных ядер для решения интегральных уравнений II рода с постоянными пределами интегрирования [16]. Пусть неизвестная функция $\varphi_j^i(t)$ определяется выражением

$$\varphi_j^i(t) = u_j^i(t) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty} S_{k,m}^i \sqrt{2m+1}\,\lambda_m^{j,k}(t), \tag{45}$$

где

$$S_{k,m}^i = \sqrt{2m+1}\int_0^1 \varphi_k^i(s)\,L_m(s)\,ds. \tag{46}$$

Тогда при подстановке (45) в (44) в силу ортогональности функций $L_m(s)$, независимости $\varphi_j^i(t), \varphi_{j+1}^i(t)$ для $j = \overline{\{0, N-1\}}$ и их гладкости всюду на Γ_j, Γ_{j+1} соответственно кроме, быть может, угловых точек (в P_j допускаются особенности вида [17]: $(x - P_j)^\theta$, $0 < \theta < 1$) для определенных в (8) многочленов $\lambda_m^{j,k}(t)$ сведем интегральное уравнение (4) к системе линейных уравнений (43). Решение $\mathbf{S}^i = (\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1}\mathbf{U}^i$, уравнения (43) позволяет определить с учетом (45) неизвестную функцию плотности $\varphi_j^i(t)$, подстановка которой в (6) позволяет определить гармонический БК выражением

$$\zeta_i(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\int_0^1 u_j^i(t)\,K_j(t,x)\,dt - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{2m+1}\,S_{k,m}^i\int_0^1 \lambda_m^{j,k}(t)\,K_j(t,x)\,dt\right). \tag{47}$$

Первый интеграл в правой части выражения (47) с учетом (7) и граничных условий из (1) несложно вычислить, представив результат в виде

$$\int_0^1 u_j^i(t)\,K_j(t,x)\,dt = G_j^i(x). \tag{48}$$

Второй интеграл в правой части выражения (47) вычислим, определив разложение $K_j(t,x)$ в системе многочленов $L_n(t)$:

$$K_j(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda'_{j,n}(x)(2n+1)\,L_n(t), \tag{49}$$

где $\lambda'_{j,n}(x)$ с учетом $\int_0^1 L_n(s)L_m(s)\,ds = \dfrac{\delta_{nm}}{2n+1}$ задается интегралом:

$$\lambda'_{j,n}(x) = \int_0^1 L_n(t)\,K_j(t,x)\,dt. \tag{50}$$

С учетом доказательства леммы 1 при задании (12)–(15) нетрудно определить справедливость вычисления интеграла (50) в виде (42).

Подставив разложение (49) во второй интеграл (47), получим

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\lambda'_{j,n}(x)\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{2m+1}\,S_{k,m}^i\int_0^1\lambda_m^{j,k}(t)\,L_n(t)\,dt = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{n+m}S_{k,m}^i\sqrt{2m+1}\left(C_{m,n}^{j,k} + D_{m,n}^{j,k}\right).\end{gathered} \tag{51}$$

С учетом того, что $C_{m,n}^{j,k} = D_{m,n}^{j,k} = 0$ при $j = k$, подставив (51) и (48) в (47), получим (41), что и требовалось доказать.

Таким образом, полученные соотношения (41), (42) при замене бесконечных сумм по индексам n и m конечными с ограничением числа слагаемых до M_1 и M_2 соответственно позволяют задать приближенно-аналитическое определение гармонических БК для Ω:

$$\zeta_i(x) \approx \tilde{\zeta}^i_{M_1,M_2}(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\left[G^i_j(x) - \sum_{n=0}^{M_1}\lambda'_{j,n}(x)\frac{2n+1}{\pi}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N-1}\sum_{m=0}^{M_2}(-1)^{n+m}S^i_{k,m}\sqrt{2m+1}\left(C^{j,k}_{m,n} + D^{j,k}_{m,n}\right)\right]. \quad (52)$$

4. ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ И ТОЧНОСТИ МЕТОДА, ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Заданное решение по определению гармонических БК с учетом введенных правил (17), (18), (33), (37) вычисления для Ω вызывает дополнительный интерес к оценке сходимости и точности (52) от M_1, M_2. Для этого покажем, что последовательность функций $\left\{\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2}(t) = \left(\varphi^i_{j,M_2}(t)\right)_{N-1}\right\}$ в (44) сходится по норме к решению уравнения (4) при $M_2 \to \infty$ и $\tilde{\zeta}^i_{M_1,M_2}(x)$ сходится по норме к (6) при $M_1 \to \infty$, $M_2 \to \infty$. Дополнительно рассмотрим возможность упрощения выражения (52) при определении $\tilde{\zeta}^i_M(x)$ для $M_1 = M_2 = M$.

Для формирования оценок введем следующие представления. Перепишем уравнение (4) в операторной форме:

$$\boldsymbol{\varphi}^i + \mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{u}^i, \quad (53)$$

где $\boldsymbol{\varphi}^i = \left(\varphi^i_j\right)_{N-1}$; $\mathbf{u}^i = \left(u^i_j\right)_{N-1}$; $\mathcal{K} = \left(\mathcal{K}_{j,k}\right)_{N-1\times N-1}$ – матричный оператор; $\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^i = \sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{K}_{j,k}\varphi^i_k$; $\left(\mathcal{K}_{j,k}\varphi^i_k\right)(t) \equiv \int_0^1 K_{j,k}(t,s)\varphi^i_k(s)\,ds$ – линейный ограниченный оператор на пространстве функций из $C([0,1])$.

По аналогии с (53) для (44) определим уравнение

$$\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2} + \mathcal{K}^{M_2}\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2} = \mathbf{u}^i \quad (54)$$

при введении в рассмотрение линейного ограниченного оператора

$$\left(\mathcal{K}^{M_2}_{j,k}\varphi^i_k\right)(t) \equiv \sum_{m=0}^{M_2}(2m+1)\lambda^{j,k}_m(t)\int_0^1 L_m(s)\varphi^i_k(s)\,ds.$$

При определении оценок приближения векторной функции $\boldsymbol{\varphi}$ будем использовать нормы в пространствах $C([0,1])$ и $L_2([0,1])$ [23], [24]:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_C = \max_{\substack{t\in[0,1]\\ j\in\{0,N-1\}}}\left|\varphi_j(t)\right|; \quad \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1\left(\varphi_j(t)\right)^2 dt}.$$

Теорема 2. $\exists M \in \mathbb{N} : \forall M_2 \geq M$ *решение* $\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2}$ *уравнения* (54) *существует и единственно, при этом справедливы оценки*

$$\begin{cases}\left\|\boldsymbol{\varphi}^i - \boldsymbol{\varphi}^i_{M_2}\right\|_C \leq \max\limits_{j\in\{0,N-1\}}\left\{\dfrac{\mathrm{const}}{\varpi_j^2}\sqrt{\dfrac{|e_{j-1}|}{|e_j|}\left(\dfrac{\pi-\alpha_j}{\sin\alpha_j} + \cos\alpha_j\right)}\right\}; \\ \left\|\boldsymbol{\varphi}^i - \boldsymbol{\varphi}^i_{M_2}\right\|_{L_2} \leq \mathrm{const}\dfrac{M_2 2^{-M_2}}{(2M_2+1)\sqrt{2M_2+3}},\end{cases} \quad (55)$$

где const *положительна и не зависит от* M_2.

В выражении (55), см. [17]

$$\varpi_j = \min\left\{\Theta_j, \pi\left(\pi + |\pi - \alpha_j|\right)^{-1}\right\}; \quad \Theta_j = \begin{cases}|\sin\alpha_j|, & \alpha_j \in (0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi),\\ 1, & \alpha_j \in [\pi/2,\pi)\cup(\pi,3\pi/2].\end{cases}$$

Доказательство. Из свойств ограниченного линейного оператора $\mathcal{K}$ следует наличие обратного оператора $(I + \mathcal{K})^{-1}$, обеспечивающего разрешимость уравнения $\boldsymbol{\varphi}^i = (I + \mathcal{K})^{-1}\mathbf{u}^i$. Для получения оценок погрешности в $C([0,1])$ и $L_2([0,1])$ функцию $\boldsymbol{\varphi}^i$ представим в виде $\boldsymbol{\varphi}^i = \rho\boldsymbol{\psi}^i$, где $\boldsymbol{\psi}^i$ – новая искомая функция в (53), а $\rho = \rho(t) = 2\sqrt{t - t^2}$ [25] – весовая функция [18]. Обозначим разность $\Delta\mathcal{K} = \mathcal{K} - \mathcal{K}^{M_2}$ и с учетом (8), свойств ортогональных многочленов [18] определим оценку

$$\|\rho\Delta\mathcal{K}\|_C \le \max_{\substack{t\in[0,1]\\ j\in\{0,N-1\}}} \left\{\rho(t)\sum_{k=0}^{N-1}\int_0^1 \left|\mathcal{K}_{j,k}(t,s) - \sum_{n=0}^{M_2}(2n+1)\lambda_n^{j,k}(t)\,L_n(s)\right| ds\right\} \le$$

$$\le \max_{\substack{t\in[0,1]\\ j\in\{0,N-1\}}} \left\{\rho(t)\sum_{k=0}^{N-1}\sqrt{\int_0^1\left[K_{j,k}(t,s) - \sum_{n=0}^{M_2}(2n+1)\lambda_n^{j,k}(t)\,L_n(s)\right]^2 ds}\right\} = \tag{56}$$

$$= \max_{\substack{t\in[0,1]\\ j\in\{0,N-1\}}} \left\{\rho(t)\sum_{k=0}^{N-1}\sqrt{\int_0^1 [K_{j,k}(t,s)]^2 ds - \sum_{n=0}^{M_2}(2n+1)\left[\lambda_n^j(t)\right]^2}\right\}.$$

С учетом (5), тождества $\operatorname{Im}(z)^2 = 0,5\left[\left|z^2\right| - \operatorname{Re}\left(z^2\right)\right]$ и выделенных в доказательствах лемм 2–4 особенностей ядра $K_{j,k}(t,s)$ вычислим следующий интеграл из (56) при $j \ne k$:

$$\int_0^1 [K_{j,k}(t,s)]^2 ds = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\arg(z_{j,k+1}(t)) - \arg(z_{j,k}(t))}{\operatorname{Im}\left(z_{j,k}(t)\,e_k^{-1}\right)} - \operatorname{Re}\left(\frac{e_k^2}{z_{j,k}(t)\,z_{j,k+1}(t)}\right)\right]. \tag{57}$$

В случае $k = j$ интеграл (57) равен 0. В выражениях (57) приняты обозначения $z_{j,k}(t) = e_j t + R_{j,k}$; $z_{j,k+1}(t) = e_j t + R_{j,k+1}$.

Из определения интеграла (57) следует, что при $j = k+1$, $t \to 0$ и $j = k-1$, $t \to 1$ возникает особенность $f(t) = \int_0^1 [K_{j,k}(t,s)]^2 ds \to \infty$. В этой связи для вычисления верхней границы оценки (56) определим асимптотическое поведение функций $f(t)$ и $\tilde{f}_{M_2}(t) = \sum_{n=0}^{M_2}(2n+1)\left[\lambda_n^{j,k}(t)\right]^2$ при $j = k+1$, $t \to 0$. Для этого на $\mathbb{C}$ построим треугольник Δ_t с вершинами в $e_j t + P_j$, P_k, P_{k+1}, углами $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ при соответствующих вершинах и сторонами $a = |e_k|$, $b = |z_{j,k+1}(t)|$, $c = |z_{j,k}(t)|$. Заметим, что для заданного представления Δ_t и выражений (57), (8) функции $f(t)$, $\tilde{f}_{M_2}(t)$ можно вычислить соотношениями

$$f(t) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{a}{b}\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\sin\tilde{\gamma}} + \frac{a}{c}\cos\tilde{\gamma}\cos\tilde{\beta}\right) + \sin^2\tilde{\alpha}\right]; \tag{58}$$

$$\tilde{f}_{M_2}(t) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{M_2}(2n+1)\operatorname{Im}\left[L_n\left(\frac{c}{a}e^{-i\tilde{\beta}}\right)\left(\ln\left(\frac{b}{c}\right) - i\tilde{\alpha}\right) + 2W_{n-1}\left(\frac{c}{a}e^{-i\tilde{\beta}}\right)\right]^2. \tag{59}$$

Из определения Δ_t следует, что при $j = k+1$, $t \to 0$ треугольник вырождается в прямую $P_k P_{k+1}$ при $c \to a$, $b \to 0$, $\tilde{\alpha} \to \pi - \alpha_j$, $\tilde{\beta} \to 0$, $\tilde{\gamma} \to \alpha_j$, где α_j – внутренний угол Ω при вершине P_j. Для заданных представлений с учетом известных правил раскрытия неопределенностей и свойств конечных сумм [19] сведем соотношения (58), (59) к виду

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi^2}\frac{|e_{j-1}|}{|e_j|}\left(\frac{\pi - \alpha_j}{\sin\alpha_j} + \cos\alpha_j\right)t^{-1}; \tag{60}$$

$$\tilde{f}_{M_2}(t) = \pi^{-2}(M_2+1)^2(\pi - \alpha_j)^2. \tag{61}$$

Аналогично изложенному, рассматривая асимптотическое поведение функций $f(t)$ и $\tilde{f}_{M_2}(t)$ при $j = k-1$, $t \to 1$, с учетом свойств функции $\rho(t)$ для $t \in [0,1]$ и (56) получаем оценку

$$\|\rho\Delta\mathcal{K}\|_C \le \max_{j\in\{0,N-1\}}\left\{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2|e_{j-1}|}{|e_j|}\left(\frac{\pi-\alpha_j}{\sin\alpha_j}+\cos\alpha_j\right)}\right\}. \tag{62}$$

Заметим, что из свойств ортогональных многочленов следует справедливость неравенства $\left\|[\rho(I+\mathcal{K})]^{-1}\right\|_C\|\rho\Delta\mathcal{K}\|_C < 1$, в котором $\left\|[\rho(I+\mathcal{K})]^{-1}\right\|_C \le \max\limits_{j\in\{0,N-1\}}\{\mathrm{const}\,\varpi_j^{-1}\}$. Тогда, следуя [23], с учетом принятых обозначений в (56), (62) и неравенства Коши–Буняковского справедлива оценка в $C([0,1])$:

$$\begin{gathered}\left\|\boldsymbol{\varphi}^i-\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2}\right\|_C \le \left\|\mathbf{u}^i\right\|_C\left\|[\rho(I+\mathcal{K})]^{-1}-\left[\rho\left(I+\mathcal{K}^{M_2}\right)\right]^{-1}\right\|_C \le \frac{\left\|\mathbf{u}^i\right\|_C\|\rho\Delta\mathcal{K}\|_C\left\|[\rho(I+\mathcal{K})]^{-1}\right\|_C^2}{1-\left\|[\rho(I+\mathcal{K})]^{-1}\right\|_C\|\rho\Delta\mathcal{K}\|_C} \le \\ \le \max_{j\in\{0,N-1\}}\left\{\frac{\mathrm{const}}{\varpi_j^2\pi}\sqrt{\frac{2|e_{j-1}|}{|e_j|}\left(\frac{\pi-\alpha_j}{\sin\alpha_j}+\cos\alpha_j\right)}\right\}.\end{gathered} \tag{63}$$

С учетом (5) и (8), принимая замену переменных $z = 2\dfrac{e_jt+R_{j,k}}{e_k}-1$ и $s = \dfrac{\mu+1}{2}$, при обозначении $\tilde{\rho}(z) = \rho\left(\dfrac{e_k(1+z)-2R_{j,k}}{2e_j}\right)$ сформируем следующую оценку для $\Delta\mathcal{K}$ в $L_2([0,1])$:

$$\|\rho\Delta\mathcal{K}\|^2_{L_2} \le \frac{\mathrm{const}}{2\pi^2}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left|\frac{e_k}{e_j}\int\limits_{2\frac{R_{j,k}}{e_k}-1}^{2\frac{R_{j+1,k}}{e_k}-1}\tilde{\rho}^2(z)\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{z-\mu}-\sum_{n=0}^{M_2}(2n+1)\tilde{Q}_n(z)\tilde{L}_n(\mu)\right]^2 d\mu dz\right|, \tag{64}$$

где const не зависит от M_2.

С учетом формулы Кристоффеля [26], неравенства Коши–Буняковского и свойств ортогональных многочленов [18] сведем оценку (64) к виду

$$\begin{gathered}\|\rho\Delta\mathcal{K}\|^2_{L_2} \le \frac{\mathrm{const}}{2\pi^2}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left|\frac{e_k}{e_j}\int\limits_{2\frac{R_{j,k}}{e_k}-1}^{2\frac{R_{j+1,k}}{e_k}-1}\tilde{\rho}^2(z)\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{M_2+1}{z-\mu}\begin{pmatrix}\tilde{Q}_{M_2}(z)\tilde{L}_{M_2+1}(\mu)-\\ -\tilde{Q}_{M_2+1}(z)\tilde{L}_{M_2}(\mu)\end{pmatrix}\right]^2 d\mu dz\right| \le \\ \le \frac{\mathrm{const}}{\pi^2}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left|\frac{e_k}{e_j}\int\limits_{2\frac{R_{j,k}}{e_k}-1}^{2\frac{R_{j+1,k}}{e_k}-1}\tilde{\rho}^2(z)\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{M_2+1}{z-\mu}\right)^2 d\mu dz\int\limits_{2\frac{R_{j,k}}{e_k}-1}^{2\frac{R_{j+1,k}}{e_k}-1}\left[\frac{\left(\tilde{Q}_{M_2}(z)\right)^2}{2M_2+3}+\frac{\left(\tilde{Q}_{M_2+1}(z)\right)^2}{2M_2+1}\right]dz\right|.\end{gathered} \tag{65}$$

Для определения оценки (65), учитывая соотношения между ортогональными многочленами Лежандра II рода [26]

$$\tilde{Q}_n(z) = \frac{2n-1}{n}z\tilde{Q}_{n-1}(z)-\frac{n-1}{n}\tilde{Q}_{n-2}(z), \quad z\tilde{Q}_n(z) = \frac{n+1}{2n+1}\tilde{Q}_{n+1}(z)+\frac{n}{2n+1}\tilde{Q}_{n-1}(z),$$
$$\frac{d\tilde{Q}_n(z)}{dz} = \frac{n}{1-z^2}\left(\tilde{Q}_{n-1}(z)-z\tilde{Q}_n(z)\right),$$

тождество

$$\int_a^b\tilde{Q}_n(z)\tilde{Q}_m(z)dz = \frac{\left[\sqrt{1-z^2}\left(\tilde{Q}_m(z)\tilde{Q}_n^1(z)-\tilde{Q}_n(z)\tilde{Q}_m^1(z)\right)\right]_a^b}{(n-m)(n+m+1)}$$

при $n \neq m$ из [20] для интеграла, содержащего функции Лежандра на разрезе, вычислим $\int_a^b \left(\tilde{Q}_n(z)\right)^2 dz$ соотношением

$$\int_a^b (Q_n(z))^2 dz = \frac{1}{2n+1}\left[(Q_0(z))^2(\overline{z}-1) + \left(\ln\left(\frac{\overline{z}+1}{4}\right) + 2i\pi\right)\frac{\ln(\overline{z}+1)}{2} + \mathrm{Li}_2\left(\frac{\overline{z}+1}{2}\right) + \sum_{h=0}^{n-1} T_{n-h}(z)\right]_a^b, \quad (66)$$

где

$$T_n(z) = \frac{1}{n^2}\Big\{z\Big[\left(\tilde{Q}_n(z)\right)^2\left((2n+1)^2 z^2 - n(3n+2)\right) + \left(\tilde{Q}_{n+1}(z)\right)^2 (n+1)^2\Big] -$$
$$- 2(n+1)\Big[(2n+1)z^2 - n\Big]\tilde{Q}_n(z)\tilde{Q}_{n+1}(z)\Big\}.$$

Принимая во внимание равенство [19]

$$\tilde{Q}_n(z) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} z^{-n-1} F\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \frac{1}{z^2}\right),$$

выражения (65), (66) при асимптотическом представлении и учитывая тождество для гамма-функции $\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2n}\sqrt{\pi}\Gamma(2n)$ и формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, окончательно определим оценку (64) в следующем виде:

$$\|\rho\Delta\mathcal{K}\|_{L_2}^2 \le \mathrm{const}\left[\frac{\Gamma(M_2+1)}{2^{M_2+1}\Gamma\left(M_2+\frac{3}{2}\right)}\right]^2 \frac{1}{2M_2+3} \le \frac{\mathrm{const}\, M_2 2^{-2M_2}}{(2M_2+3)(2M_2+1)^2}. \quad (67)$$

Аналогично (63) при $\left\|[\rho(I+\mathcal{K})]^{-1}\right\|_{L_2} \le \mathrm{const}\sum_{j=0}^{N-1}\varpi_j^{-1}$ и, следуя [23], справедлива оценка в $L_2([0,1])$:

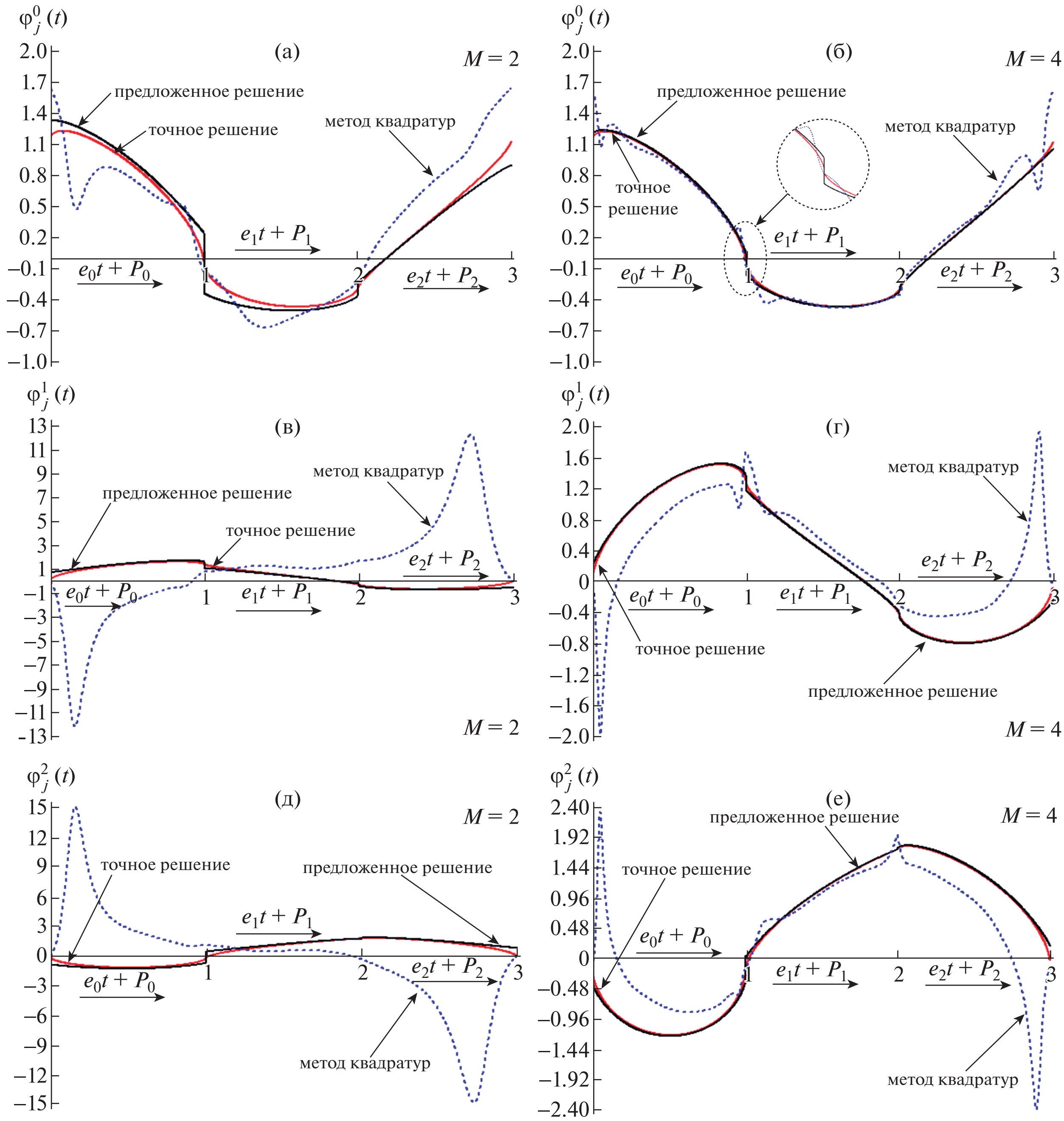
$$\left\|\boldsymbol{\varphi}^i - \boldsymbol{\varphi}^i_{M_2}\right\|_{L_2} \le \frac{\|\mathbf{u}^i\|_{L_2}\|\rho\Delta\mathcal{K}\|_{L_2}\left\|[\rho(I+\mathcal{K})]^{-1}\right\|_{L_2}^2}{1-\left\|[\rho(I+\mathcal{K})]^{-1}\right\|_{L_2}\|\rho\Delta\mathcal{K}\|_{L_2}} \le \frac{\mathrm{const}\, M_2 2^{-M_2}\left(\sum_{j=0}^{N-1}\varpi_j^{-1}\right)^2}{(2M_2+1)\sqrt{2M_2+3}}. \quad (68)$$

Таким образом, условие существования и единственности решения $\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2}$ уравнения (54) обеспечивает существование предела $\lim\limits_{M_2\to\infty}\left\|\mathcal{K} - \mathcal{K}^{M_2}\right\| = 0$, определяемого с учетом (5) и (8) при замене переменных $z = 2\dfrac{e_j t + R_{j,k}}{e_k} - 1$ и $s = \dfrac{\mu+1}{2}$ из известной формулы Гейне [20], а полученные в $C([0,1])$ и $L_2([0,1])$ оценки (63) и (68) соответственно характеризуют справедливость (55), что и требовалось доказать.

Теорема 3. $\exists M \in \mathbb{N} : \forall M_1 \ge M$, $\forall M_2 \ge M$ *решение* $\tilde{\zeta}^i_{M_1,M_2}$ (52) *задачи Дирихле* (1) *существует и единственно, при этом справедлива оценка*

$$\left\|\zeta_i - \tilde{\zeta}^i_{M_1,M_2}\right\|_C \le \frac{\mathrm{const}_1 M_2 2^{-M_2}}{(2M_2+1)\sqrt{2M_2+3}} + \frac{\mathrm{const}_2 M_1 2^{-M_1}}{(2M_1+1)\sqrt{2M_1+3}}, \quad (69)$$

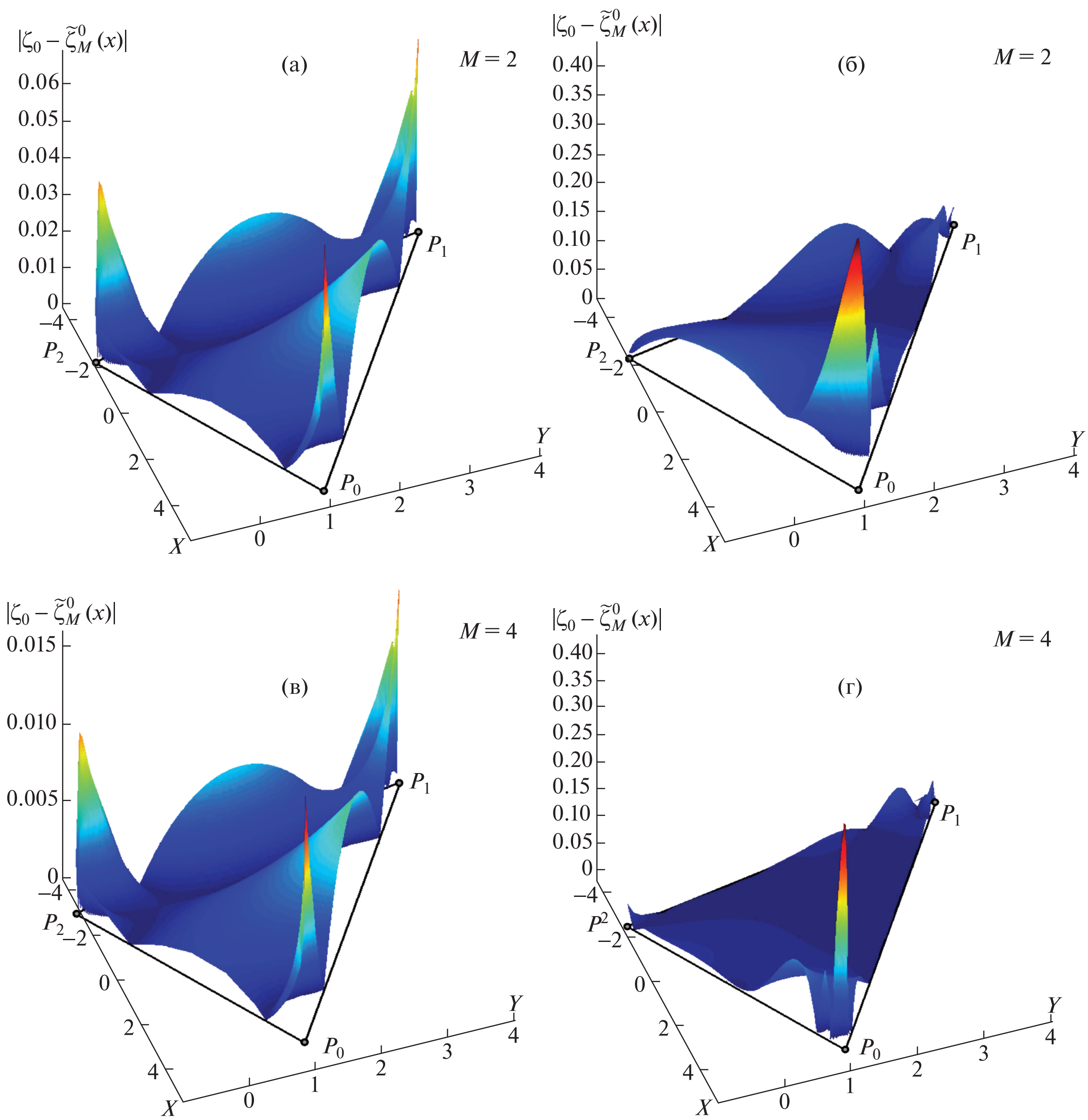
где $\mathrm{const}_{1,2}$ *положительны и не зависят от* M_1, M_2.



Фиг. 1. Расчет $\varphi_j^0(t)$ (а), (б), $\varphi_j^1(t)$ (в), (г) и $\varphi_j^2(t)$ (д), (е) на ребрах треугольника при приближенном решении (4) для $M = 2$ (а), (в), (д) и $M = 4$ (б), (г), (е).

Доказательство. Учитывая (6), неравенство треугольника и, принимая обозначения $\left(\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^i\right)(x) \equiv \sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1 \varphi_j^i(t)\int\limits_0^1 K_j(t,x)\,dt$, $\left(\mathcal{K}^{M_1}\boldsymbol{\varphi}_{M_2}^i\right)(x) \equiv \sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1 \varphi_{j,M_2}^i(t)\sum_{n=0}^{M_1}(2n+1)\lambda'_{j,n}(x)\,L_n(t)\,dt$, определим оценку БК в $C([0,1])$ в следующем виде:

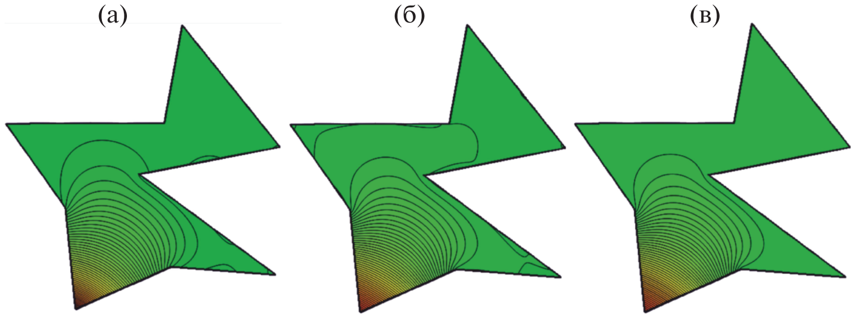
$$
\begin{gathered}
2\pi\left\|\zeta_i - \tilde{\zeta}^i_{M_1,M_2}\right\|_C = \left\|\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^i - \mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2} + \mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2} - \mathcal{K}^{M_1}\boldsymbol{\varphi}^i_{M_2}\right\|_C \le \\
\le \|\mathcal{K}\|_C\left|\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_0^1 \varphi_j^i(t) - \varphi^i_{j,M_2}(t)\,dt\right| + \left|\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_0^1 \varphi^i_{j,M_2}(t)\,dt\right|\left\|\mathcal{K} - \mathcal{K}^{M_1}\right\|_C.
\end{gathered}
\tag{70}
$$



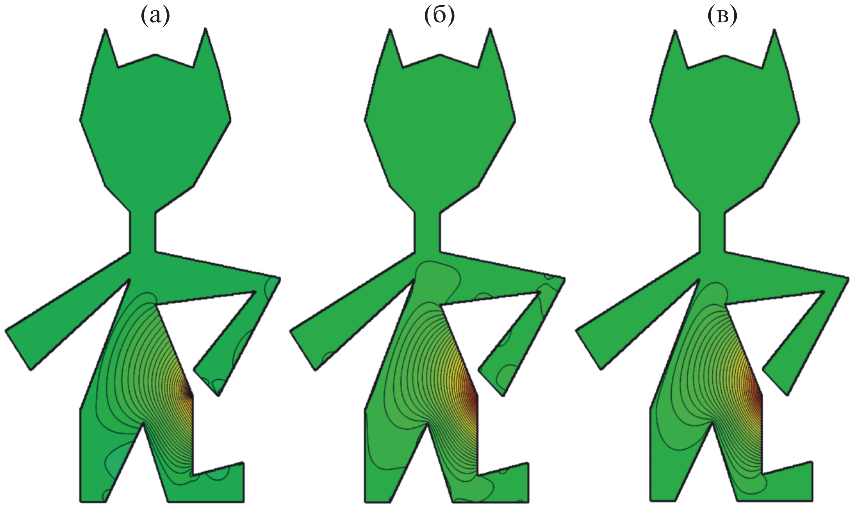
Фиг. 2. Распределение ошибки приближенно-аналитического решения (1) для треугольника при $i = 0$, выполненного разработанным методом по правилу (72) (а), (в) и при непосредственном интегрировании (6) с подстановкой в $\varphi_j^i(t)$ результата, полученного методом квадратур (б), (г).

Принимая во внимание (1), (42), (52), (55) и свойства БК [1], [11] ($\zeta_i(x) \geq 0 : \forall x \in \Omega$; $\max\limits_{x\in\Omega}\{\zeta_i(x)\} = 1$; $\operatorname{argmax}\limits_{x\in\Omega}\{\zeta_i(x)\} = P_i$) при $\|\mathcal{K}\|_C = 2\pi$ сведем оценку (70) к виду

$$2\pi\left\|\zeta_i - \tilde{\zeta}^i_{M_1,M_2}\right\|_C \leq \frac{\mathrm{const}_1 M_2 2^{-M_2}}{(2M_2+1)\sqrt{2M_2+3}} + \mathrm{const}\left|\sum_{j=0}^{N-1} S^i_{j,0}\right|\left\|\mathcal{K} - \mathcal{K}^{M_1}\right\|_C \leq$$
$$\leq \frac{\mathrm{const}_1 M_2 2^{-M_2}}{(2M_2+1)\sqrt{2M_2+3}} + \frac{\mathrm{const}_2 M_1 2^{-M_1}}{(2M_1+1)\sqrt{2M_1+3}}. \tag{71}$$



Фиг. 3. Пример расчета $\tilde{\zeta}_M^i$ для вогнутого девятиугольника при $M = 2$ (а), $M = 4$ (б), $M = 6$ (в).



Фиг. 4. Пример расчета $\tilde{\zeta}_M^i$ для вогнутого многоугольника из 32 вершин при $M = 2$ (а), $M = 4$ (б), $M = 6$ (в).

Таким образом, условие существования и единственности решения $\tilde{\zeta}^i_{M_1,M_2}$ (52) задачи Дирихле (1) с учетом (6) и результатов лемм 1–4 и теоремы 1 обеспечивается предыдущим доказательством существования и единственности решения $\vec{\varphi}^i_{M_2}$ уравнения (54). При этом полученная оценка (71) соответствует исходной (69), что и требовалось доказать.

Из результатов теорем 2, 3 и соотношений (6), (42), (45), (52) вытекает

Следствие 1. $\exists\tilde{M} \in \mathbb{N} : \forall M \geq \tilde{M}$ решение

$$\tilde{\zeta}_M^i(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{M}\sqrt{2n+1}S^i_{j,n}\lambda'_{j,n}(x) \quad (72)$$

задачи Дирихле (1) существует и единственно, при этом справедлива оценка

$$\left\|\zeta_i - \tilde{\zeta}_M^i\right\|_C \leq \frac{\text{const}\, M 2^{-M}}{(2M+1)\sqrt{2M+3}}, \quad (73)$$

где const положительна и не зависит от M.

Заданное соотношение (72) предлагается рассматривать как основное выражение определения гармонических БК для произвольных Ω.

Для наглядной демонстрации предпочтительности предложенного решения в сравнении с известными [17], [22] (метод квадратур) в САПР MathCad и Matlab проведены тестовые расчеты $\boldsymbol{\varphi}^i$ и ζ_i для канонических областей и областей сложной формы (вогнутые многоугольники). Ввиду известного решения по определению БК через отношение площадей в качестве канонической области выбран треугольник. Положение его вершин задано следующими координатами в $\mathbb{C}$: $P_0 = 5 + i$; $P_1 = -4 + 4i$; $P_2 = -2 - i$. На фиг. 1 приведены сравнительные результаты расчета функций плотности $\vec{\varphi}^i$ на ребрах e_j треугольника при приближенном решении интегрального уравнения (4) разработанным методом и методом квадратур для различных порядков аппроксимации M.

На фиг. 2 приведены распределения ошибки приближенно-аналитического решения задачи (1) для треугольника при $i = 0$. Указанные решения выполнены разработанным методом по правилу (72) и при непосредственном численном интегрировании (6) (погрешность интегрирования задана 10^{-10}) с подстановкой в $\varphi_j^i(t)$ результата, полученного методом квадратур.

На фиг. 3 приведены расчеты БК по правилу (72) для вогнутого девятиугольника при различных порядках аппроксимации M.

На фиг. 4 приведены расчеты БК по правилу (72) для вогнутого многоугольника из 32 вершин при различных значениях M.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное соотношение (72) позволяет с экспоненциальной скоростью сходимости формировать решение по определению гармонических БК для произвольных многоугольников. Оценки (55), (69), (73) и результаты моделирования (фиг. 1–4) свидетельствуют о предпочтительности предложенного приближенно-аналитического решения задач (1) и (4) в сравнении с известными. Предложенный метод при наименьших вычислительных затратах в сравнении с известными (метод квадратур) позволяет повысить точность решения задачи (1) до 7 раз вблизи угловых точек и до 3.6 раз по всей области анализа (см. фиг. 2). Высокая точность решения обеспечивается уже при небольших M (даже для достаточно сложных по форме многоугольных областей порядок аппроксимации достаточно выбирать на интервале $M \in [5;8]$, см. фиг. 3, 4).

В целом в результате проведенных исследований получено относительно простое аналитическое соотношение (72), позволяющее эффективно определять гармонические БК для произвольных многоугольников. Недостаток разработанного метода состоит в необходимости решения системы линейных уравнений (43) при определении коэффициентов $S_{k,m}^i$. Принимая во внимание высокую точность метода, указанный недостаток является несущественным, поскольку: 1) неизвестные коэффициенты $S_{k,m}^i$ не зависят от $x \in \Omega$, а определяются формой Ω и требуют пересчета лишь при ее изменении; 2) количество уравнений и переменных в системе (43) с учетом рекомендации $M \in [5;8]$ измеряется единицами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полянский И.С.* Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орел: Академия ФСО России, 2017.
2. *Полянский И.С.* Барицентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 11. С. 140–150.
3. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е.* Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. Т. 212. № 1. С. 32–40.
4. *Полянский И.С.* Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике // Труды СПИИРАН. 2017. Т. 51. № 2. С. 206–222.
5. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: пер. с англ. М.: Мир, 1987.
6. *Полянский И.С., Пехов Ю.С.* Барицентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Труды СПИИРАН. 2017. Т. 54. № 5. С. 244–262.
7. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996.
8. *Wachspress E.L.* A rational finite element basis. New York: Acad. Press. 1975.
9. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестн. СГТУ. 2015. Т. 78. № 1. С. 30–36.

10. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) // Вестн. СГТУ. 2015. Т. 78. № 1. С. 36–42.
11. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона–Римана // Труды СПИИРАН. 2016. Т. 49. № 6. С. 32–48.
12. *Радыгин В.М., Полянский И.С.* Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестн. ТГУ. Матем. и механ. 2016. Т. 39. № 1. С. 25–35.
13. *Радыгин В.М., Полянский И.С.* Методы конформных отображений многогранников в $\mathbb{R}^3$ // Вестн. Удмуртского университета. Матем. Механ. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 1. С. 60–68.
14. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. Пер. с англ. Б.В. Боярского, И.И. Данилюка. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
15. *Rustamov R.M.* Boundary Element Formulation of Harmonic Coordinates // Technical Report, November, 2007.
16. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986.
17. *Арушанян И.О.* О численном решении граничных интегральных уравнений II рода в областях с угловыми точками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 5. С. 537–548.
18. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. Пер. с англ. В.С. Виденского. М.: Физматлит, 1962.
19. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е. М.: Физматлит, 1963.
20. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. Пер. с англ. Н.Я. Виленкина. М.: Наука, 1965.
21. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. Изд. 4-е. испр. и доп. М.: Наука, 1979.
22. *Арушанян И.О.* Семейство квадратурных формул для численного решения граничных интегральных уравнений // Выч. мет. программирование. 2013. Т. 14. № 4. С. 461–467.
23. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. (Введение в теорию) – Москва: Наука, 1975.
24. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техн. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 27. С. 131–228.
25. *Ожегова А.В.* Сходимость в интегральной метрике общего проекционного метода решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши // Известия вузов. Математика. 2008. № 10. С. 39–47.
26. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. Пер. с англ. М.: Изд-во ин. лит., 1952.