

УДК 519.635

KP_1 -СХЕМА УСКОРЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ТРЕХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ, СОГЛАСОВАННАЯ С НОДАЛЬНЫМИ СХЕМАМИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

© 2019 г. А. М. Волощенко

(125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПматем., Россия)

e-mail: volosch@kiam.ru

Поступила в редакцию 17.01.2018 г.
Переработанный вариант 10.05.2018 г.

Для уравнения переноса в трехмерной r, ϑ, z геометрии построена KP_1 -схема ускорения сходимости внутренних итераций, согласованная с нодальными Linear Discontinues (LD) и Linear Best (LB)-схемами 3-го и 4-го порядка точности по пространственным переменным. Для решения P_1 системы для ускоряющих поправок предложен алгоритм, основанный на использовании циклического метода расщепления (MP) в сочетании с методом прогонки для решения вспомогательных систем двухточечных уравнений. Рассмотрена модификация алгоритма на случай трехмерной x, y, z геометрии. Приведены численные примеры использования KP_1 -схемы для решения характерных задач переноса излучения в трехмерной геометрии, в том числе задач с существенной ролью анизотропии рассеяния и при решении сильно-гетерогенных задач с преобладающей ролью рассеяния. Библ. 26. Фиг. 7. Табл. 8.

Ключевые слова: KP_1 -схема ускорения, уравнение переноса, нодальные схемы.

DOI: 10.1134/S0044466919030141

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм ускорения итераций по интегралу рассеяния является существенным элементом численной методики решения уравнения переноса, основанной на использовании метода дискретных ординат. Расчеты полей излучения в активной зоне и радиационной защите ядерно-технических установок в неоднородных геометриях требуют значительных затрат процессорного времени. Поэтому, с практической точки зрения, разработка эффективного алгоритма ускорения для 3D геометрий является актуальной задачей, позволяющая сократить время расчета типичного варианта в 3–10 и более раз. В данной работе нами будет построена KP_1 -схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в 3D геометрии, согласованная с нодальными LD и LB-схемами 3-го и 4-го порядка точности по пространственным переменным.

Предлагаемый алгоритм представляет собой реализацию KP_1 -схемы (см. [1]) (известной также как DSA [2], [3] или P_1SA -схема [4]–[7]) ускорения внутренних итераций для практически важного случая LD и LB-схем в 3D r, ϑ, z и x, y, z геометриях, позволяющего обеспечить быструю сходимость разностного решения при сгущении пространственной сетки задачи. Согласованность построенной KP_1 -схемы ускорения с разностной аппроксимацией уравнения переноса, как и в случае взвешенной алмазной (WDD)-схемы [2], обеспечивает ее устойчивость и слабую зависимость эффекта ускорения от выбора пространственной сетки. Более подробно необходимость использования согласованных схем ускорения для обеспечения устойчивости алгоритма ускорения рассмотрена в [2], [3]. Предложенный алгоритм реализован в 3D S_n программе КАТРИН-2.5 из пакета программ CNCSN [8]. Он представляет собой развитие KP_1 -схемы ускорения, согласованной со взвешенной алмазной (WDD)-схемой, предложенной ранее в работах [9], [10] и реализованной в 1D, 2D и 3D S_n программах из пакета CNCSN, а также KP_1 -схемы ускорения, согласованной со взвешенной WLD–WLB-схемой в 1D геометриях (см. [11], [12]).

Обзор предшествующих работ по KP_1 -схеме ускорения и другим вариантам схем ускорения внутренних итераций имеется в [1], [3], [9]. KP_1 -схема ускорения, согласованная с нодальной схемой на неструктурированной сетке в 3D x, y, z геометрии, в которой линейные поправки используются для коррекции нулевого пространственного момента решения в ячейке, предложена в работе [13]. Построение KP_1 -схемы ускорения мы проведем на примере уравнения переноса в r, ϑ, z геометрии. Изменения в алгоритме для случая x, y, z геометрии будут также указаны.

Последовательность изложения в данной работе следующая. В разделах 1 и 2 рассмотрено построение WLD–WLB-схемы и согласованной KP_1 -схемы ускорения на примере уравнения переноса в r, ϑ, z геометрии. Для решения P_1 системы для ускоряющих поправок предлагается использовать метод расщепления (MP) [1], [22]. Реализация MP применительно к случаю KP_1 -схемы ускорения, согласованной с WLD–WLB-схемой в r, ϑ, z геометрии, рассмотрена в отдельной статье [14], представляющей вторую часть данной работы. В разделе 3 указаны изменения, которые нужно внести в алгоритм ускорения для случая x, y, z геометрии. В разделе 4 представлены численные результаты использования KP_1 -схемы ускорения при решении типичных задач переноса излучения в трехмерной геометрии. В разделе 5 приведены численные результаты, позволяющие оценить скорость сходимости DD, адаптивной WDD (AWDD), LD и LB-схем в x, y, z и r, ϑ, z геометриях при сгущении пространственной сетки задачи.

Для нумерации формул используются 2 цифры: первая обозначает номер раздела, вторая – номер формулы в разделе.

1. WLB-WLD-СХЕМА 2-4-ГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ТРЕХМЕРНОЙ r, ϑ, z ГЕОМЕТРИИ

В r, ϑ, z геометрии уравнение переноса нейтрального излучения (нейтроны, фотоны) имеет вид

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \mu r \frac{\partial \psi}{\partial z} + \xi \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) - \frac{\partial}{\partial r} (\eta\psi) + \sigma r \psi(r, \vartheta, z; \mu, \varphi) = rS(r, \vartheta, z; \mu, \varphi), \tag{1.1}$$

где ξ, η и μ – направляющие косинусы единичного вектора Ω направления скорости частицы

$$\xi = (\Omega \mathbf{n}_r) = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \quad \eta = (\Omega \mathbf{n}_\vartheta) = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \quad \mu = (\Omega \mathbf{n}_z) = \cos \theta, \tag{1.2}$$

который изменяется в пределах единичной сферы (восьми октантов): $-1 \leq \xi, \mu, \eta \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$; переменные r, ϑ и z изменяются в пределах: $0 \leq r_{\text{int}} \leq r \leq r_{\text{ext}}, 0 \leq \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\text{end}} \leq 2\pi, 0 \leq z_{\text{bot}} \leq z \leq z_{\text{top}} = H$; ψ – плотность потока излучения в группе (сокращенно, поток излучения).

Для граничных направлений $\varphi = \pi$ и $\varphi = 2\pi$, используемых для организации расчета ячеек в r, ϑ, z геометрии, уравнение (1.1) имеет вид

$$\mu r \frac{\partial \psi}{\partial z} + \xi \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\psi) - \psi \right] + \sigma r \psi(r, z, \mu, \varphi) = rS(r, z, \mu, \varphi). \tag{1.3}$$

К уравнению (1.1) следует также добавить граничные условия при $r = r_{\text{int}} \geq 0, r = r_{\text{ext}}, \vartheta = \vartheta_0, \vartheta = \vartheta_{\text{end}}, z = z_{\text{bot}}, z = z_{\text{top}}$

$$\begin{aligned} \psi(r = r_{\text{int}}, \vartheta, z, \Omega) &= F_{\text{int}}(\vartheta, z, \Omega) + \int_{(\Omega' \mathbf{n}_r) < 0} R_{\text{int}}(\Omega, \Omega') \psi(r = r_{\text{int}}, \vartheta, z, \Omega') d\Omega', \quad (\Omega \mathbf{n}_r) > 0, \\ \psi(r = r_{\text{ext}}, \vartheta, z, \Omega) &= F_{\text{ext}}(\vartheta, z, \Omega) + \int_{(\Omega' \mathbf{n}_r) > 0} R_{\text{ext}}(\Omega, \Omega') \psi(r = r_{\text{ext}}, \vartheta, z, \Omega') d\Omega', \quad (\Omega \mathbf{n}_r) < 0, \\ \psi(r, \vartheta = \vartheta_0, z, \Omega) &= F_0(r, z, \Omega) + \int_{(\Omega' \mathbf{n}_\vartheta) < 0} R_0(\Omega, \Omega') \psi(r, \vartheta = \vartheta_0, z, \Omega') d\Omega', \quad (\Omega \mathbf{n}_\vartheta) > 0, \\ \psi(r, \vartheta = \vartheta_{\text{end}}, z, \Omega) &= F_{\text{end}}(r, z, \Omega) + \int_{(\Omega' \mathbf{n}_\vartheta) > 0} R_{\text{end}}(\Omega, \Omega') \psi(r, \vartheta = \vartheta_{\text{end}}, z, \Omega') d\Omega', \quad (\Omega \mathbf{n}_\vartheta) < 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \psi(r, \vartheta, z = z_{\text{bot}}, \Omega) &= F_{\text{bot}}(r, \vartheta, \Omega) + \int_{(\Omega' \cdot \mathbf{n}_z) < 0} R_{\text{bot}}(\Omega, \Omega') \psi(r, \vartheta, z = z_{\text{bot}}, \Omega') d\Omega', \quad (\Omega \cdot \mathbf{n}_z) > 0, \\ \psi(r, \vartheta, z = z_{\text{top}}, \Omega) &= F_{\text{top}}(r, \vartheta, \Omega) + \int_{(\Omega' \cdot \mathbf{n}_z) > 0} R_{\text{top}}(\Omega, \Omega') \psi(r, \vartheta, z = z_{\text{top}}, \Omega') d\Omega', \quad (\Omega \cdot \mathbf{n}_z) < 0. \end{aligned}$$

Полная постановка краевой задачи для уравнения (1.1) приведена, например, в [14].

Построение семейства WLD-WLB-схем мы проведем на примере уравнения переноса в r, ϑ, z геометрии. Для аппроксимации интеграла рассеяния введем квадратуру на единичной сфере угловых направлений (8 октантов): $-1 \leq \xi, \eta, \mu \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi f(\mu, \varphi) &= \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi} d\varphi f(\mu, \varphi) + \int_{-1}^1 d\mu \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi f(\mu, \varphi) = \\ &= \sum_{l=1}^{L_1} \sum_{m=1}^{M_l^{(1)}} w_{l,m}^{(1)} f(\mu_l^{(1)}, \varphi_{l,m}^{(1)}) + \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{m=1}^{M_l^{(2)}} w_{l,m}^{(2)} f(\mu_l^{(2)}, \varphi_{l,m}^{(2)}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Таким образом, для передней $0 < \varphi < \pi$ ($\eta_{l,m} > 0$) и задней $\pi < \varphi < 2\pi$ ($\eta_{l,m} < 0$) полусфер, вообще говоря, может использоваться различная квадратура. Квадратура, например, для передней полусферы (I, II, V и VI октанты) разбивает ее на L_1 полос по переменной μ веса $w_l^{(1)}$, а каждая полоса $l, l = 1, \dots, L_1$, дополнительно еще разбивается на $M_l^{(1)}$ секторов веса $w_{l,m}^{(1)}$, где индекс m на l -м слое пробегает значения: $m = 1, \dots, M_l^{(1)}$. Нумерация узлов по φ на l -м слое соответствует возрастанию $\xi_{l,m}^{(1)}$ (убыванию $\varphi_{l,m}^{(1)}$ при $0 < \varphi < \pi$). Аналогично устроена квадратура и для задней полусферы (III, IV, VII и VIII октанты). Нумерация узлов по φ на l -м слое для нее соответствует возрастанию $\xi_{l,m}^{(2)}$ (и $\varphi_{l,m}^{(2)}$) при $\pi < \varphi < 2\pi$. Для обычно используемых симметричных квадратур квадратура для задней полусферы получается из квадратуры для передней полусферы путем зеркального отражения относительно точки $\varphi = \pi$. Ниже мы будем, как правило, опускать индекс полусферы.

Уравнение баланса нулевого порядка получается путем интегрирования уравнения (1.1) по разностной ячейке $(r_{i-1/2}, r_{i+1/2}) \times (\vartheta_{j-1/2}, \vartheta_{j+1/2}) \times (z_{k-1/2}, z_{k+1/2}) \times (\varphi_{l,m+1/2}, \varphi_{l,m-1/2}) \times (\mu_{l-1/2}, \mu_{l+1/2})$, $i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$ (ниже мы опускаем целые индексы в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений)

$$\begin{aligned} &|\eta| \Delta r v_z (\Psi_P - \Psi_F) + |\mu| v_r v_\vartheta (\Psi_T - \Psi_B) + v_z v_\vartheta \times \\ &\times \left[|\xi| (A^+ \Psi_R - A^- \Psi_L) + \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \Psi_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2} \Psi_{m-1/2}) \right] + \sigma V \Psi = VS, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{l,m+1/2} - \alpha_{l,m-1/2} &= -w_{l,m} \xi_{l,m}, \quad \alpha_{l,1/2} = \alpha_{l,M_{l+1/2}} = 0, \quad m = 1, \dots, M_l, \quad l = 1, \dots, L \\ A_{i\pm 1/2} &= r_{i\pm 1/2}, \quad v_{r,i} = \frac{1}{2} (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2), \quad C_i = r_{i+1/2} - r_{i-1/2} = \Delta r_i, \quad \Delta z_k = v_{z,k} = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}, \\ \Delta \vartheta_j &= v_{\vartheta,j} = \vartheta_{j+1/2} - \vartheta_{j-1/2}, \quad V_{i,j,k} = \Delta z_k v_{r,i} v_{\vartheta,j}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{R(L)} \equiv \Psi_r^\pm &= \begin{cases} \Psi_{i\pm 1/2, j, k, l, m}, \xi_{l,m} > 0, \\ \Psi_{i\mp 1/2, j, k, l, m}, \xi_{l,m} < 0, \end{cases} \quad \Psi_{T(B)} \equiv \Psi_z^\pm = \begin{cases} \Psi_{i, j, k\pm 1/2, l, m}, \mu_l > 0, \\ \Psi_{i, j, k\mp 1/2, l, m}, \mu_l < 0, \end{cases} \\ A^\pm &= \begin{cases} A_{i\pm 1/2}, \xi_{l,m} > 0, \\ A_{i\mp 1/2}, \xi_{l,m} < 0, \end{cases} \quad \Psi_{P(F)} \equiv \Psi_\vartheta^\pm = \begin{cases} \Psi_{i, j\pm 1/2, k, l, m}, \eta_{l,m} > 0, \\ \Psi_{i, j\mp 1/2, k, l, m}, \eta_{l,m} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $\Psi_{R(L)}, \Psi_{P(F)}$ и $\Psi_{T(B)}$ – нулевые пространственные моменты плотности потока на пространственных гранях ячейки.

Для построения нодальной WLB-WLD-схемы 2–4-го порядка точности, кроме уравнения баланса нулевого порядка (1.6), нам потребуются также уравнения баланса первого порядка по ячейке, получаемые интегрированием уравнения (1.1) по разностной ячейке с весами

$2(r - r_i - \delta_i^c)/\Delta r$, $2(\vartheta - \vartheta_j)/\Delta \vartheta$ и $2(z - z_k)/\Delta z$, где δ_i^c – малое отклонение от центра ячейки, выбираемое из условия $\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} (r - r_i - \delta_i^c) r dr = 0$:

$$\begin{aligned} & |\eta| v_{r0} v_z (\psi_P^r - \psi_F^r) - |\eta| \Delta r v_z \delta^c (\psi_P - \psi_F) + v_z v_\vartheta \times \\ & \times \left\{ \xi \left[A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) \psi_R + A^- \left(\frac{\Delta r}{2} + s_r \delta^c \right) \psi_L - v_r \psi \right] + \frac{C^r}{w} (\alpha_{m+1/2} \psi_{m+1/2}^r - \alpha_{m-1/2} \psi_{m-1/2}^r) - \right. \\ & \left. - \delta^c \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \psi_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2} \psi_{m-1/2}) \right\} + |\mu| v_r v_\vartheta (\psi_T^r - \psi_B^r) + \sigma V^r \psi^r = V^r S^r, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \eta \Delta r v_\vartheta v_z \left[\frac{1}{2} (\psi_P + \psi_F) - \psi \right] + v_\vartheta^1 v_z \left[|\xi| (A^+ \psi_R^\vartheta - A^- \psi_L^\vartheta) + \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \psi_{m+1/2}^\vartheta - \alpha_{m-1/2} \psi_{m-1/2}^\vartheta) \right] + \\ + \sigma V^\vartheta \psi^\vartheta + |\mu| v_r v_\vartheta^1 (\psi_T^\vartheta - \psi_B^\vartheta) = V^\vartheta S^\vartheta, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} |\eta| \Delta r v_z^1 (\psi_P^z - \psi_F^z) + \mu V \left[\frac{1}{2} (\psi_T + \psi_B) - \psi \right] + v_z^1 v_\vartheta \times \\ \times \left[|\xi| (A^+ \psi_R^z - A^- \psi_L^z) + \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \psi_{m+1/2}^z - \alpha_{m-1/2} \psi_{m-1/2}^z) \right] + \sigma V^z \psi^z = V^z S^z, \end{aligned} \tag{1.10}$$

где ψ – среднее значение (нулевой пространственный момент) плотности потока в ячейке, ψ^r , ψ^ϑ и ψ^z – первые пространственные моменты плотности потока по переменным r , ϑ и z

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j,k,l,m} &= \frac{1}{V_{i,j,k}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m}(r, \vartheta, z) r dr d\vartheta dz, \\ \Psi_{i,j,k,l,m}^r &= \frac{1}{V_{i,j,k}^r} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m}(r, \vartheta, z) (r - r_i - \delta_i^c) r dr d\vartheta dz, \\ \Psi_{i,j,k,l,m}^\vartheta &= \frac{1}{V_{i,j,k}^\vartheta} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m}(r, \vartheta, z) (\vartheta - \vartheta_j) r dr d\vartheta dz, \\ \Psi_{i,j,k,l,m}^z &= \frac{1}{V_{i,j,k}^z} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m}(r, \vartheta, z) (z - z_k) r dr d\vartheta dz, \end{aligned} \tag{1.11}$$

(аналогично определяются и пространственные моменты источника S , S^r , S^ϑ и S^z), $\Psi_{R(L)}$, $\Psi_{P(F)}$ и $\Psi_{T(B)}$ нулевые, а, $\Psi_{R(L)}^z$, $\Psi_{R(L)}^\vartheta$, $\Psi_{P(F)}^r$, $\Psi_{P(F)}^z$, $\Psi_{T(B)}^\vartheta$ и $\Psi_{T(B)}^r$ – первые пространственные моменты потока на пространственных гранях ячейки

$$\begin{aligned} \Psi_{R(L)}^z &= \begin{cases} \Psi_{i\pm 1/2,j,k,l,m}^z \xi_{l,m} > 0, \\ \Psi_{i\mp 1/2,j,k,l,m}^z \xi_{l,m} < 0, \end{cases} & \Psi_{R(L)}^\vartheta &= \begin{cases} \Psi_{i\pm 1/2,j,k,l,m}^\vartheta \xi_{l,m} > 0, \\ \Psi_{i\mp 1/2,j,k,l,m}^\vartheta \xi_{l,m} < 0, \end{cases} & \Psi_{P(F)}^r &= \begin{cases} \Psi_{i,j\pm 1/2,k,l,m}^r \eta_{l,m} > 0, \\ \Psi_{i,j\pm 1/2,k,l,m}^r \eta_{l,m} < 0, \end{cases} \\ \Psi_{P(F)}^z &= \begin{cases} \Psi_{i,j\pm 1/2,k,l,m}^z \eta_{l,m} > 0, \\ \Psi_{i,j\pm 1/2,k,l,m}^z \eta_{l,m} < 0, \end{cases} & \Psi_{T(B)}^r &= \begin{cases} \Psi_{i,j,k\pm 1/2,l,m}^r \mu_l > 0, \\ \Psi_{i,j,k\pm 1/2,l,m}^r \mu_l < 0, \end{cases} & \Psi_{T(B)}^\vartheta &= \begin{cases} \Psi_{i,j,k\pm 1/2,l,m}^\vartheta \mu_l > 0, \\ \Psi_{i,j,k\pm 1/2,l,m}^\vartheta \mu_l < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j,k\pm 1/2,l,m}^r &= \frac{1}{V_r^1 V_\vartheta} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \Psi_{l,m}(r, \vartheta, z_{k\pm 1/2}) (r - r_i - \delta_i^c) r dr d\vartheta, \\ \Psi_{i,j\pm 1/2,k,l,m}^r &= \frac{1}{V_{r0}^1 V_z} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m}(r, \vartheta_{j\pm 1/2}, z) (r - r_i) dr dz, \end{aligned}$$

$$\Psi_{i\pm 1/2,k,l,m}^z = \frac{1}{V_z^1 V_\vartheta} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \Psi_{l,m}(r_{i\pm 1/2}, \vartheta, z)(z - z_k) d\vartheta dz,$$

$$\Psi_{i,j\pm 1/2,k,l,m}^z = \frac{1}{V_z^1 V_r} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \Psi_{l,m}(r, \vartheta_{j\pm 1/2}, z)(z - z_k) r dr dz,$$

$$\Psi_{i\pm 1/2,k,l,m}^\vartheta = \frac{1}{V_\vartheta^1 V_z} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \Psi_{l,m}(r_{i\pm 1/2}, \vartheta, z)(\vartheta - \vartheta_j) d\vartheta dz,$$

$$\Psi_{i,j,k\pm 1/2,l,m}^\vartheta = \frac{1}{V_\vartheta^1 \Delta r} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \Psi_{l,m}(r, \vartheta, z_{k\pm 1/2})(\vartheta - \vartheta_j) dr d\vartheta,$$

$\Psi_{m\pm 1/2}$, $\Psi_{m\pm 1/2}^r$, $\Psi_{m\pm 1/2}^\vartheta$ и $\Psi_{m\pm 1/2}^z$ – нулевой и первые пространственные моменты решения на входящей ($m - 1/2$) и выходящей ($m + 1/2$) угловой грани ячейки

$$\Psi_{i,j,k,l,m\pm 1/2} = \frac{1}{C_i V_\vartheta V_z} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m\pm 1/2}(r, \vartheta, z) dr d\vartheta dz,$$

$$\Psi_{i,j,k,l,m\pm 1/2}^r = \frac{1}{C_i^r V_\vartheta V_z} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m\pm 1/2}(r, \vartheta, z)(r - r_i) dr d\vartheta dz,$$

$$\Psi_{i,j,k,l,m\pm 1/2}^z = \frac{1}{C V_\vartheta V_z^1} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m\pm 1/2}(r, \vartheta, z)(z - z_k) dr d\vartheta dz,$$

$$\Psi_{i,j,k,l,m\pm 1/2}^\vartheta = \frac{1}{C V_\vartheta^1 V_z} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \Psi_{l,m\pm 1/2}(r, \vartheta, z)(\vartheta - \vartheta_k) dr d\vartheta dz,$$

$$V = v_r V_\vartheta V_z, \quad V_{i,j,k}^r = \frac{2}{\Delta r} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (r - r_i - \delta_i^c)^2 r dr d\vartheta dz = v_r^1 V_\vartheta V_z, \quad (1.12)$$

$$V_{i,j,k}^\vartheta = \frac{2}{\Delta \vartheta} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (\vartheta - \vartheta_j)^2 r dr d\vartheta dz = v_r V_\vartheta^1 V_z,$$

$$V_{i,j,k}^z = \frac{2}{\Delta z} \int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}} \int_{\vartheta_{j-1/2}}^{\vartheta_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} (z - z_k)^2 r dr d\vartheta dz = v_r V_\vartheta V_z^1, \quad v_r = \frac{1}{2}(r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2),$$

$$v_\vartheta = \Delta \vartheta, \quad v_z = \Delta z, \quad v_r^1 = \frac{(\Delta r_i)^2}{6}(r_i - \delta_i^c), \quad v_\vartheta^1 = \frac{(\Delta \vartheta)^2}{6}, \quad v_z^1 = \frac{(\Delta z)^2}{6}, \quad C = \Delta r,$$

$$v_{r0}^1 = C^r = \frac{(\Delta r_i)^2}{6}, \quad \delta_i^c = \frac{(\Delta r)^2}{12r_i}, \quad s_r = \text{sign}(\xi), \quad s_\vartheta = \text{sign}(\eta), \quad s_z = \text{sign}(\mu).$$

Отметим, что выбор (1.12) нормировочного коэффициента $V_{i,k}^r$ в определении первого радиального пространственного момента Ψ^r (1.11) гарантирует выполнение условия: дополнительное уравнение LB-схемы $\Psi_{i+1/2} = 2\Psi^r + \Psi_{i-1/2}$ по r удовлетворяется точно на линейных по r решениях вида: $\Psi(r) = a + br$.

Для получения разностной схемы к четырем точным балансным уравнениям (1.6)–(1.12) следует добавить 16 дополнительных уравнений, которые соответствуют WLB-WLD-схеме

$$\begin{aligned} \Psi_R &= (1 - P_r)\Psi + (P_r + Q_r)s_r\Psi^r + P_r\Psi_L, & \Psi_P &= (1 - P_\vartheta)\Psi + (P_\vartheta + Q_\vartheta)s_\vartheta\Psi^\vartheta + P_\vartheta\Psi_F, \\ \Psi_T &= (1 - P_z)\Psi + (P_z + Q_z)s_z\Psi^z + P_z\Psi_B, & \Psi_R^\vartheta &= \Psi^\vartheta + T_{R,r}^\vartheta s_r s_\vartheta \Psi^r + T_{R,z}^\vartheta s_\vartheta s_z \Psi^z, \\ \Psi_R^z &= \Psi^z + T_{R,r}^z s_r s_z \Psi^r + T_{R,\vartheta}^z s_\vartheta s_z \Psi^\vartheta, & \Psi_P^r &= \Psi^r + T_{P,\vartheta}^r s_r s_\vartheta \Psi^\vartheta + T_{P,z}^r s_r s_z \Psi^z, \\ \Psi_P^z &= \Psi^z + T_{P,r}^z s_r s_z \Psi^r + T_{P,\vartheta}^z s_\vartheta s_z \Psi^\vartheta, & \Psi_T^r &= \Psi^r + T_{T,\vartheta}^r s_r s_\vartheta \Psi^\vartheta + T_{T,z}^r s_r s_z \Psi^z, \\ \Psi_T^\vartheta &= \Psi^\vartheta + T_{T,r}^\vartheta s_r s_\vartheta \Psi^r + T_{T,z}^\vartheta s_\vartheta s_z \Psi^z, & s_r &= \text{sign}(\xi), \quad s_\vartheta = \text{sign}(\eta), \quad s_z = \text{sign}(\mu), \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{m+1/2} &= (1 + P_\xi) \left(\Psi - \frac{2}{\Delta r} \delta^c \Psi^r \right) - P_\xi \Psi_{m-1/2}, & \Psi_{m+1/2}^r &= (1 + P_\xi^r) \Psi^r - P_\xi^r \Psi_{m-1/2}^r, \\ \Psi_{m+1/2}^\vartheta &= (1 + P_\xi^\vartheta) \Psi^\vartheta - P_\xi^\vartheta \Psi_{m-1/2}^\vartheta, & \Psi_{m+1/2}^z &= (1 + P_\xi^z) \Psi^z - P_\xi^z \Psi_{m-1/2}^z, \quad 0 \leq P_\xi, P_\xi^r, P_\xi^\vartheta, P_\xi^z \leq 1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Веса P_t и Q_t , $t = r, \vartheta, z$, в уравнениях (1.13) изменяются в пределах

$$0 \leq P_t \leq 1, \quad Q_t = 1 \text{ или } P_t = 0, \quad 1/E^- \leq Q_r < 1, \quad 1/3 \leq Q_z < 1 \text{ или } P_t = 0, \quad Q_t > 1, \tag{1.15}$$

где

$$E^- = V \left(\frac{\Delta r}{2} + s \delta^c \right) / V^r.$$

Веса $T_{R,r}^\vartheta, T_{R,z}^\vartheta, T_{R,r}^z, T_{R,\vartheta}^z, T_{P,\vartheta}^r, T_{P,z}^r, T_{P,r}^z, T_{P,\vartheta}^z, T_{T,\vartheta}^r, T_{T,z}^r, T_{T,r}^\vartheta$ и $T_{T,z}^\vartheta$, аналогично случаю 2D геометрии [16], могут быть использованы в алгоритме коррекции отрицательных потоков по пространственным переменным. Однако, если пространственная сетка задачи не слишком грубая (2–3 интервала на пробег для верхних ведущих групп энергетической сетки, определяющих перенос нейтронов на больших расстояниях от источника), такая коррекция, как показал численный эксперимент, вообще говоря, не требуется. В данной работе вышеуказанные весовые коэффициенты полагаются равными нулю.

Случай $P_t = Q_t = 1, T_t = 0$ соответствует LB-схеме 4-го порядка точности, случай $P_t = 0, Q_t = 1, T_t = 0$ соответствует LD-схеме 3-го порядка точности. Как и в случае 1D криволинейных геометрий, дополнительное уравнение WDD-схемы по угловой переменной, связывающее входящие и выходящие радиальные пространственные моменты нулевого порядка $\Psi_{m\pm 1/2}$ на гранях $\xi_{l,m\pm 1/2}$ разностной ячейки, включает член $\sim \Psi^r$, позволяющий учесть различие в пространственном весовом множителе в определении Ψ и $\Psi_{m\pm 1/2}$. Отметим, что дополнительные уравнения (1.14) выполняются точно на постоянных по углу φ и линейных по пространственным переменным r, ϑ и z решениях

$$\Psi(r, \vartheta, z, \mu, \varphi) = \Psi + \frac{2}{\Delta r} (r - r_i - \delta_i^c) \Psi^r + \frac{2}{\Delta \vartheta} (\vartheta - \vartheta_j) \Psi^\vartheta + \frac{2}{\Delta z} (z - z_k) \Psi^z. \tag{1.16}$$

В дальнейшем ограничим выбор весов P_ξ^r, P_ξ^ϑ и P_ξ^z в экстраполяционных соотношениях для $\Psi_{m+1/2}^r, \Psi_{m+1/2}^\vartheta$ и $\Psi_{m+1/2}^z$ (1.14) условием

$$P_\xi^r = P_\xi^\vartheta = P_\xi^z = 0. \tag{1.17}$$

Система дополнительных уравнений WLB-WLD-схемы является итогом серии работ автора в этом направлении, обзор которых содержится в [14]. Она соответствует аппроксимации решения в пределах разностной ячейки кусочно-линейными элементами с возможными разрывами на гранях ячейки, а также изломами внутри ячейки. Геометрическая интерпретация WLB-WLD-схемы для плоской геометрии приведена в [14] на фиг. 1.2.2 и 1.2.3, а для WLD-схемы в x, z геометрии на фиг. 1.10.2, а также в [16] (фиг. 8.1). В случае плоской геометрии WLB-схема может быть также получена из M_2 -схемы Вадьянатана [15] 4-го порядка точности путем использования для экспоненты рациональной аппроксимации 3–4-го порядка точности (уравнение (1.2.46) из [14]).

Подстановка дополнительных уравнений (1.13), (1.14) в балансные соотношения (1.6), (2.2), (2.3) и (2.4) приводит к следующей системе уравнений относительно пространственных моментов решения в ячейке Ψ , Ψ^r , Ψ^ϑ и Ψ^z :

$$\begin{aligned} a_{11}\Psi + a_{12}\Psi^r + a_{13}\Psi^\vartheta + a_{14}\Psi^z &= b_1, & a_{21}\Psi + a_{22}\Psi^r + a_{23}\Psi^\vartheta + a_{24}\Psi^z &= b_2, \\ a_{31}\Psi + a_{32}\Psi^r + a_{33}\Psi^\vartheta + a_{34}\Psi^z &= b_3, & a_{41}\Psi + a_{42}\Psi^r + a_{43}\Psi^\vartheta + a_{44}\Psi^z &= b_4, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где элементы матриц A и B имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sigma V + |\eta| \Delta r v_z (1 - P_\vartheta) + |\mu| v_r v_\vartheta (1 - P_z) + v_z v_\vartheta \left[|\xi| A^+ (1 - P_r) + \frac{C}{w} \alpha_{m+1/2} (1 + P_\xi) \right], \\ a_{12} &= v_\vartheta v_z \left[\xi A^+ (Q_r + P_r) - \delta^c \frac{2}{\Delta r} \frac{C}{w} \alpha_{m+1/2} (1 + P_\xi) \right], \\ a_{13} &= \eta \Delta r v_z (Q_\vartheta + P_\vartheta), & a_{14} &= v_r v_\vartheta \mu (Q_z + P_z), \\ a_{21} &= -\delta^c |\eta| \Delta r v_z (1 - P_\vartheta) + v_\vartheta v_z \left\{ \xi \left[A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) (1 - P_r) - v_r \right] - \delta^c \frac{C}{w} \alpha_{m+1/2} (1 + P_\xi) \right\}, \\ a_{22} &= |\eta| v_{r0} v_z + v_\vartheta v_z \left[|\xi| A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) (Q_r + P_r) + \frac{C^r}{w} \alpha_{m+1/2} + (\delta^c)^2 \frac{2}{\Delta r} \frac{C}{w} \alpha_{m+1/2} (1 + P_\xi) \right] + \\ &\quad + |\mu| v_r v_\vartheta + \sigma V^r, \\ a_{23} &= -\eta \Delta r v_z \delta^c (P_\vartheta + Q_\vartheta), & a_{24} &= 0, & a_{31} &= -\eta \Delta r v_\vartheta v_z \frac{1}{2} (1 + P_\vartheta), & a_{32} &= 0, \\ a_{33} &= |\eta| \Delta r v_\vartheta v_z \frac{1}{2} (Q_\vartheta + P_\vartheta) + v_\vartheta v_z \left[|\xi| A^+ + \frac{C}{w} \alpha_{m+1/2} \right] + |\mu| v_r v_\vartheta + \sigma V^\vartheta, & a_{34} &= 0, \\ a_{41} &= -\mu V \frac{1}{2} (1 + P_z), & a_{42} &= 0, & a_{43} &= 0, \\ a_{44} &= |\eta| \Delta r v_z^1 + |\mu| V \frac{1}{2} (Q_z + P_z) + v_z^1 v_\vartheta \left[|\xi| A^+ + \frac{C}{w} \alpha_{m+1/2} \right] + \sigma V^z, \\ b_1 &= VS + |\eta| \Delta r v_z (1 - P_\vartheta) \Psi_F + |\mu| v_r v_\vartheta (1 - P_z) \Psi_B + \\ &\quad + v_\vartheta v_z \left[|\xi| (A^- - A^+ P_r) \Psi_L + \frac{C}{w} (\alpha_{m-1/2} + P_\xi \alpha_{m+1/2}) \Psi_{m-1/2} \right], \\ b_2 &= V^r S^r + |\eta| v_{r0} v_z \Psi_F^r - |\eta| \Delta r v_z \delta^c (1 - P_\vartheta) \Psi_F - v_\vartheta v_z \left\{ \xi \left[A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) P_r + A^- \left(\frac{\Delta r}{2} + s_r \delta^c \right) \right] \Psi_L - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C^r}{w} \alpha_{m-1/2} \Psi_{m-1/2}^r + \delta^c \frac{C}{w} (\alpha_{m-1/2} + P_\xi \alpha_{m+1/2}) \Psi_{m-1/2} \right\} + |\mu| v_r v_\vartheta \Psi_B^r, \\ b_3 &= V^\vartheta S^\vartheta - \eta \Delta r v_\vartheta v_z \frac{1}{2} (1 + P_\vartheta) \Psi_F + v_\vartheta^1 v_z \left[|\xi| A^- \Psi_L^\vartheta + \frac{C}{w} \alpha_{m-1/2} \Psi_{m-1/2}^\vartheta \right] + |\mu| v_r v_\vartheta^1 \Psi_B^\vartheta, \\ b_4 &= V^z S^z + |\eta| \Delta r v_z^1 \Psi_F^z - \frac{1}{2} \mu V (1 + P_z) \Psi_B + v_z^1 v_\vartheta \left[|\xi| A^- \Psi_L^z + \frac{C}{w} \alpha_{m-1/2} \Psi_{m-1/2}^z \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Решение системы (1.18) находится по формулам Крамера.

Система балансных уравнений для граничных ячеек с $m = 1/2$ ($\xi_{l,1/2} = -\sqrt{1 - \mu_l^2}$), используемых для нахождения граничных значений потока $\Psi_{i,j,k,l,1/2}$, $\Psi_{i,j,k,l,1/2}^r$, $\Psi_{i,j,k,l,1/2}^\vartheta$ и $\Psi_{i,j,k,l,1/2}^z$ по угловой переменной ξ , состоит из уравнения баланса нулевого порядка (1.21), в котором используется более точное, чем в случае WDD-схемы соотношение:

$$\Psi_{i,j,k,l,1/2} \approx \Psi_{i,j,k,l}^{(0)} - \frac{2}{\Delta r} \delta^c \Psi_{i,j,k,l}^r, \quad (1.20)$$

учитывающее линейную аппроксимацию решения в ячейке (1.16) и уравнений баланса первого порядка, которые получаются путем интегрирования уравнения (1.3) по граничной ячейке с весами $2(r - r_i - \delta_i^c)/\Delta r$, $2(\vartheta - \vartheta_j)/\Delta \vartheta$ и $2(z - z_k)/\Delta z$:

$$|\mu| v_r v_\vartheta (\Psi_T - \Psi_B) + v_\vartheta v_z |\xi| \left[(A^+ \Psi_R - A^- \Psi_L) + (A^- - A^+) \left(\Psi - \frac{2}{\Delta r} \delta^c \Psi^r \right) \right] + \sigma V \Psi = VS, \tag{1.21}$$

$$|\mu| v_r^1 v_\vartheta (\Psi_T^r - \Psi_B^r) + v_\vartheta v_z \xi \left[A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) \Psi_R + A^- \left(\frac{\Delta r}{2} + s_r \delta^c \right) \Psi_L - (v_r - \delta^c C) \Psi - C^r \Psi^r \right] + \sigma V^r \Psi^r = V^r S^r, \tag{1.22}$$

$$v_\vartheta^1 v_z |\xi| \left[(A^+ \Psi_R^\vartheta - A^- \Psi_L^\vartheta) + (A^- - A^+) \Psi^\vartheta \right] + |\mu| v_r v_\vartheta^1 (\Psi_T^\vartheta - \Psi_B^\vartheta) + \sigma V^\vartheta \Psi^\vartheta = V^\vartheta S^\vartheta, \tag{1.23}$$

$$\mu V \left[\frac{1}{2} (\Psi_T + \Psi_B) - \Psi \right] + v_z^1 v_\vartheta |\xi| \left[(A^+ \Psi_R^z - A^- \Psi_L^z) + (A^- - A^+) \Psi^z \right] + \sigma V^z \Psi^z = V^z S^z. \tag{1.24}$$

В случае WLB-WLD-схемы балансные уравнения (1.21)–(1.24) дополняются экстраполяционным соотношением WLB-WLD-схемы по радиальной и аксиальной переменным. В балансных уравнениях (1.23) и (1.24) используются дополнительные соотношения: $\Psi_R^\vartheta = \Psi^\vartheta$ и $\Psi_T^\vartheta = \Psi^\vartheta$. Таким образом, в r, ϑ, z геометрии, система уравнений для расчета граничных ячеек вырождается в систему из 3-х уравнений для определения Ψ, Ψ^r и Ψ^z

$$a_{11} \Psi + a_{12} \Psi^r + a_{13} \Psi^z = b_1, \quad a_{21} \Psi + a_{22} \Psi^r + a_{23} \Psi^z = b_2, \quad a_{31} \Psi + a_{32} \Psi^r + a_{33} \Psi^z = b_3, \tag{1.25}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sigma V + |\mu| v_r v_\vartheta (1 - P_z) + |\xi| v_\vartheta v_z (A^- - P_r A^+), & a_{12} &= v_\vartheta v_z \xi \left[A^+ (Q_r + P_r) + 2\delta^c \right], \\ a_{13} &= v_r v_\vartheta \mu (Q_z + P_z), & a_{21} &= v_\vartheta v_z \xi \left[A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) (1 - P_r) - v_r + \delta^c C \right], \\ a_{22} &= |\mu| v_r^1 v_\vartheta + v_\vartheta v_z |\xi| \left[A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) (Q_r + P_r) - s_r \left[C^r + 2(\delta^c)^2 \right] \right] + \sigma V^r, & a_{23} &= 0, \\ a_{31} &= -\frac{1}{2} \mu V (1 + P_z), & a_{32} &= 0, & a_{33} &= |\mu| V \frac{1}{2} (Q_z + P_z) + v_\vartheta v_z^1 |\xi| A^- + \sigma V^z, \\ b_1 &= VS + |\mu| v_r v_\vartheta (1 - P_z) \Psi_B + |\xi| v_\vartheta v_z (A^- - A^+ P_r) \Psi_L, \\ b_2 &= V^r S^r + |\mu| v_r^1 v_\vartheta \Psi_B^r - v_\vartheta v_z \xi \left[A^+ \left(\frac{\Delta r}{2} - s_r \delta^c \right) P_r + A^- \left(\frac{\Delta r}{2} + s_r \delta^c \right) \right] \Psi_L, \\ b_3 &= V^z S^z - \mu V \frac{1}{2} (1 + P_z) \Psi_B + v_\vartheta v_z^1 |\xi| A^- \Psi_L^z. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Величина Ψ^ϑ находится по явной формуле:

$$\Psi^\vartheta = \frac{V^\vartheta S^\vartheta + v_\vartheta^1 v_z |\xi| A^- \Psi_L^\vartheta + |\mu| v_r v_\vartheta^1 \Psi_B^\vartheta}{v_\vartheta^1 v_z |\xi| A^- + |\mu| v_r v_\vartheta^1 + \sigma V^\vartheta}. \tag{1.27}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ KP_1 -СХЕМЫ УСКОРЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИТЕРАЦИЙ В r, ϑ, z ГЕОМЕТРИИ

Перепишем уравнение баланса и систему дополнительных уравнений WLD-WLB-схемы в r, ϑ, z геометрии на $(n + 1)$ -й внутренней итерации в более удобном для последующего изложения виде

$$\begin{aligned} & \eta \Delta r v_z (\Psi_{j+1/2}^{n+1/2} - \Psi_{j-1/2}^{n+1/2}) + \mu v_r v_\vartheta (\Psi_{k+1/2}^{n+1/2} - \Psi_{k-1/2}^{n+1/2}) + \\ & + v_z v_\vartheta \left[\xi (A_{i+1/2} \Psi_{i+1/2}^{n+1/2} - A_{i-1/2} \Psi_{i-1/2}^{n+1/2}) + \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \Psi_{m+1/2}^{n+1/2} - \alpha_{l,m-1/2} \Psi_{m-1/2}^{n+1/2}) \right] + \\ & + \sigma_i V \Psi^{n+1/2} = V \sum_{\kappa=0}^K \frac{2\kappa+1}{4\pi} \sigma_{s,\kappa} \sum_{\nu=-\kappa}^{\kappa} Y_\kappa^\nu(\mu, \varphi) \Phi_\kappa^{\nu,n} + VF, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} & \eta V_{r0}^1 V_z (\Psi_{j+1/2}^r - \Psi_{j-1/2}^r) - \eta \Delta r v_z \delta^c (\Psi_{j+1/2} - \Psi_{j-1/2}) + v_z V_\vartheta \times \\ & \times \left\{ \xi \left[A_{i+1/2} \left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c \right) \Psi_{i+1/2} + A_{i-1/2} \left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c \right) \Psi_{i-1/2} - v_r \Psi \right] + \frac{C^r}{w} (\alpha_{m+1/2} \Psi_{m+1/2}^r - \alpha_{m-1/2} \Psi_{m-1/2}^r) - \right. \\ & \left. - \delta^c \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \Psi_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2} \Psi_{m-1/2}) \right\} + \mu V_r^1 V_\vartheta (\Psi_{k+1/2}^r - \Psi_{k-1/2}^r) + \sigma V^r \Psi^r = V^r S^r, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \eta \Delta r v_\vartheta V_z \left[\frac{1}{2} (\Psi_{j+1/2} + \Psi_{j-1/2}) - \Psi \right] + v_\vartheta^1 V_z \times \\ & \times \left[\xi (A_{i+1/2} \Psi_{i+1/2}^\vartheta - A_{i-1/2} \Psi_{i-1/2}^\vartheta) + \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \Psi_{m+1/2}^\vartheta - \alpha_{m-1/2} \Psi_{m-1/2}^\vartheta) \right] + \\ & + \mu V_r V_\vartheta^1 (\Psi_{k+1/2}^\vartheta - \Psi_{k-1/2}^\vartheta) + \sigma V^\vartheta \Psi^\vartheta = V^\vartheta S^\vartheta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \eta \Delta r v_z^1 (\Psi_{j+1/2}^z - \Psi_{j-1/2}^z) + \mu V \left[\frac{1}{2} (\Psi_{k+1/2} + \Psi_{k-1/2}) - \Psi \right] + v_z^1 V_\vartheta \times \\ & \times \left[\xi (A_{i+1/2} \Psi_{i+1/2}^z - A_{i-1/2} \Psi_{i-1/2}^z) + \frac{C}{w} (\alpha_{m+1/2} \Psi_{m+1/2}^z - \alpha_{m-1/2} \Psi_{m-1/2}^z) \right] + \sigma V^z \Psi^z = V^z S^z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введем систему дополнительных уравнений

$$\begin{aligned} \Psi^{r,n+1/2} &= a_r^{n+1/2} \Psi_{i+1/2}^{n+1/2} + b_r^{n+1/2} \Psi_{i-1/2}^{n+1/2} - (a_r^{n+1/2} + b_r^{n+1/2}) \Psi^{n+1/2}, \\ a_r &= \begin{cases} 1/(Q_r + P_r), & \xi > 0, \\ P_r/(Q_r + P_r), & \xi < 0, \end{cases} \quad b_r = - \begin{cases} P_r/(Q_r + P_r), & \xi > 0, \\ 1/(Q_r + P_r), & \xi < 0, \end{cases} \\ 0 &\leq P_r \leq 1, \quad Q_r = 1 \quad \text{или} \quad P_r = 0, \quad 0 \leq Q_r < \infty, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{\vartheta,n+1/2} &= a_\vartheta^{n+1/2} \Psi_{j+1/2}^{n+1/2} + b_\vartheta^{n+1/2} \Psi_{j-1/2}^{n+1/2} - (a_\vartheta^{n+1/2} + b_\vartheta^{n+1/2}) \Psi^{n+1/2}, \\ a_\vartheta &= \begin{cases} 1/(Q_\vartheta + P_\vartheta), & \eta > 0, \\ P_\vartheta/(Q_\vartheta + P_\vartheta), & \eta < 0, \end{cases} \quad b_\vartheta = - \begin{cases} P_\vartheta/(Q_\vartheta + P_\vartheta), & \eta > 0, \\ 1/(Q_\vartheta + P_\vartheta), & \eta < 0, \end{cases} \\ 0 &\leq P_\vartheta \leq 1, \quad Q_\vartheta = 1 \quad \text{или} \quad P_\vartheta = 0, \quad 0 \leq Q_\vartheta < \infty, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{z,n+1/2} &= a_z^{n+1/2} \Psi_{k+1/2}^{n+1/2} + b_z^{n+1/2} \Psi_{k-1/2}^{n+1/2} - (a_z^{n+1/2} + b_z^{n+1/2}) \Psi^{n+1/2}, \\ a_z &= \begin{cases} 1/(Q_z + P_z), & \mu > 0, \\ P_z/(Q_z + P_z), & \mu < 0, \end{cases} \quad b_z = - \begin{cases} P_z/(Q_z + P_z), & \mu > 0, \\ 1/(Q_z + P_z), & \mu < 0, \end{cases} \\ 0 &\leq P_z \leq 1, \quad Q_z = 1 \quad \text{или} \quad P_z = 0, \quad 0 \leq Q_z < \infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Дополнительные уравнения для пространственных моментов на гранях ячейки в случае $T_{R,\gamma}^\vartheta = T_{R,z}^\vartheta = \dots = 0$ можно записать в виде

$$\Psi^{\vartheta,n+1/2} = a \Psi_{i+1/2}^{\vartheta,n+1/2} + (1-a) \Psi_{i-1/2}^{\vartheta,n+1/2}, \quad \Psi^{z,n+1/2} = a \Psi_{i+1/2}^{z,n+1/2} + (1-a) \Psi_{i-1/2}^{z,n+1/2}, \quad a = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\Psi^{r,n+1/2} = b \Psi_{j+1/2}^{r,n+1/2} + (1-b) \Psi_{j-1/2}^{r,n+1/2}, \quad \Psi^{\vartheta,n+1/2} = b \Psi_{j+1/2}^{\vartheta,n+1/2} + (1-b) \Psi_{j-1/2}^{\vartheta,n+1/2}, \quad b = \begin{cases} 1, & \eta > 0, \\ 0, & \eta < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\Psi^{r,n+1/2} = c \Psi_{k+1/2}^{r,n+1/2} + (1-c) \Psi_{k-1/2}^{r,n+1/2}, \quad \Psi^{\vartheta,n+1/2} = c \Psi_{k+1/2}^{\vartheta,n+1/2} + (1-c) \Psi_{k-1/2}^{\vartheta,n+1/2}, \quad c = \begin{cases} 1, & \mu > 0, \\ 0, & \mu < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Дополнительное уравнение взвешенной алмазной (WDD)-схемы по угловой переменной можно записать в виде

$$\Psi_{m+1/2}^{n+1/2} = (1 + P_\xi) \Psi^{n+1/2} - P_\xi \Psi_{m-1/2}^{n+1/2} = \sum_{m'=1,2,1,\dots,m} d_m^m \Psi_m^{n+1/2}, \quad 0 \leq P_\xi \leq 1. \quad (2.11)$$

К системе уравнений (2.1)–(2.11) следует также добавить граничные условия (1.4) при $r = r_{1/2} = r_{\text{int}} \geq 0$, $r = r_{J+1/2} = r_{\text{ext}}$, $\vartheta = \vartheta_{1/2} = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_{J+1/2} = \vartheta_{\text{end}}$, $z = z_{1/2} = z_{\text{bot}}$, $z = z_{K+1/2} = z_{\text{top}}$

$$\begin{aligned}\Psi_{1/2,j,k,l,m}^{n+1/2} &= F_{j,k,l,m}^{\text{int}} + \sum_{\xi_{l,m}' < 0} w_{l',m'} R_{l',m'}^{\text{int}} \Psi_{1/2,j,k,l',m'}^{n+1/2}, & \xi_{l,m} > 0, \\ \Psi_{J+1/2,j,k,l,m}^{n+1/2} &= F_{j,k,l,m}^{\text{ext}} + \sum_{\xi_{l,m}' > 0} w_{l',m'} R_{l',m'}^{\text{ext}} \Psi_{J+1/2,j,k,l',m'}^n, & \xi_{l,m} < 0,\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{i,1/2,k,l,m}^{n+1/2} &= F_{i,k,l,m}^0 + \sum_{\eta_{l,m}' < 0} w_{l',m'} R_{l',m'}^0 \Psi_{i,1/2,k,l',m'}^{n+1/2}, & \eta_{l,m} > 0, \\ \Psi_{i,J+1/2,k,l,m}^{n+1/2} &= F_{i,k,l,m}^{\text{end}} + \sum_{\eta_{l,m}' > 0} w_{l',m'} R_{l',m'}^{\text{end}} \Psi_{i,J+1/2,k,l',m'}^n, & \eta_{l,m} < 0,\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{i,j,1/2,l,m}^{n+1/2} &= F_{i,j,l,m}^{\text{bot}} + \sum_{\mu_{l'} < 0} w_{l',m'} R_{l',m'}^{\text{bot}} \Psi_{i,j,1/2,l',m'}^{n+1/2}, & \mu_l > 0, \\ \Psi_{i,j,K+1/2,l,m}^{n+1/2} &= F_{i,j,l,m}^{\text{top}} + \sum_{\mu_{l'} > 0} w_{l',m'} R_{l',m'}^{\text{top}} \Psi_{i,j,K+1/2,l',m'}^n, & \mu_l < 0.\end{aligned}\quad (2.14)$$

При использовании периодических граничных условий, например, по переменной ϑ , что имеет место при наличии поворотной симметрии для сектора симметрии ($\vartheta_0, \vartheta_{\text{end}}$), граничные условия (2.13) заменяются следующими:

$$\begin{aligned}\Psi_{i,1/2,k,l,m}^{n+1/2} &= \Psi_{i,J+1/2,k,l,m}^n, & \eta_{l,m} > 0, \\ \Psi_{i,J+1/2,k,l,m}^{n+1/2} &= \Psi_{i,1/2,k,l,m}^n, & \eta_{l,m} < 0.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Для расчета весового коэффициента P_ξ в дополнительном WDD уравнении по угловой переменной используется адаптивная WDD (AWDD)-схема (см. [17]–[20]).

Для ускорения сходимости внутренних итераций в KP_1 -схеме используются линейные поправки к нулевому и первым угловым моментам решения следующего вида:

$$\begin{aligned}\Psi^{\alpha,n+1} &= \Psi^{\alpha,n+1/2} + \frac{1}{4\pi} (f^{\alpha,0} + 3\xi f^{\alpha,r} + 3\eta f^{\alpha,\vartheta} + 3\mu f^{\alpha,z}), & \alpha = 0, r, \vartheta, z, \\ \Psi_{i\pm 1/2}^{\beta,n+1} &= \Psi_{i\pm 1/2}^{\beta,n+1/2} + \frac{1}{4\pi} (f_{i\pm 1/2}^{\beta,0} + 3\xi f_{i\pm 1/2}^{\beta,r}), & \beta = 0, \vartheta, z,\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{j\pm 1/2}^{\beta,n+1} &= \Psi_{j\pm 1/2}^{\beta,n+1/2} + \frac{1}{4\pi} (f_{j\pm 1/2}^{\beta,0} + 3\eta f_{j\pm 1/2}^{\beta,\vartheta}), & \beta = 0, r, z, \\ \Psi_{k\pm 1/2}^{\beta,n+1} &= \Psi_{k\pm 1/2}^{\beta,n+1/2} + \frac{1}{4\pi} (f_{k\pm 1/2}^{\beta,0} + 3\mu f_{k\pm 1/2}^{\beta,z}), & \beta = 0, r, \vartheta.\end{aligned}\quad (2.17)$$

В уравнениях (2.16) и (2.17) α и β – индексы пространственных моментов. Уравнение (2.16) содержит 16 поправок, уравнения (2.17) – 18 поправок.

Для получения системы уравнений для определения ускоряющих поправок $f^{\alpha,0}$, $f^{\alpha,r}$, $f^{\alpha,\vartheta}$ и $f^{\alpha,z}$, воспользуемся следующей процедурой, близкой к “4-step” процедуре Ларсена [3], которая обеспечивает построение согласованной схемы ускорения. Прежде всего подействуем на уравнения баланса (2.1)–(2.4) операторами проектирования \hat{L}_0 , \hat{L}_r , \hat{L}_ϑ и \hat{L}_z :

$$\begin{aligned}\hat{L}_0 \Psi &= \sum_{l,m} w_{l,m} \Psi_{i,j,k,l,m}, & \hat{L}_r \Psi &= \sum_{l,m} w_{l,m} \xi_{l,m} \Psi_{i,j,k,l,m}, \\ \hat{L}_\vartheta \Psi &= \sum_{l,m} w_{l,m} \eta_{l,m} \Psi_{i,j,k,l,m}, & \hat{L}_z \Psi &= \sum_{l,m} w_{l,m} \mu_l \Psi_{i,j,k,l,m},\end{aligned}\quad (2.18)$$

где интегрирование производится по восьми октантам. В предположении, что используемая квадратура достаточно точно интегрирует соответствующие сферические гармоники, получим

$$\begin{aligned} \Delta r v_z (f_{j+1/2}^{0,\vartheta} - f_{j-1/2}^{0,\vartheta}) + v_r v_\vartheta (f_{k+1/2}^{0,z} - f_{k-1/2}^{0,z}) + v_\vartheta v_z (A_{i+1/2} f_{i+1/2}^{0,r} - A_{i-1/2} f_{i-1/2}^{0,r}) + \sigma^{00} V f^{0,0} = V Q^{0,0}, \\ \frac{1}{3} v_\vartheta v_z \left[(A_{i+1/2} f_{i+1/2}^{0,0} - A_{i-1/2} f_{i-1/2}^{0,0}) - C f^{0,0} \right] + (\sigma^{11} V + M_r C v_\vartheta v_z) f^{0,r} = V Q^{0,r}, \\ \frac{1}{3} \Delta r v_z (f_{j+1/2}^{0,0} - f_{j-1/2}^{0,0}) + (\sigma^{11} V + M_\vartheta C v_\vartheta v_z) f^{0,\vartheta} = V Q^{0,\vartheta}, \\ \frac{1}{3} v_r v_\vartheta (f_{k+1/2}^{0,0} - f_{k-1/2}^{0,0}) + \sigma^{11} V f^{0,z} = V Q^{0,z}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} v_{r0}^1 v_z (f_{j+1/2}^{r,\vartheta} - f_{j-1/2}^{r,\vartheta}) - \Delta r v_z \delta^c (f_{j+1/2}^{0,\vartheta} - f_{j-1/2}^{0,\vartheta}) + v_\vartheta v_z \left[A_{i+1/2} \left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c \right) f_{i+1/2}^{0,r} + \right. \\ \left. + A_{i-1/2} \left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c \right) f_{i-1/2}^{0,r} - v_r f^{0,r} \right] + v_r^1 v_\vartheta (f_{k+1/2}^{r,z} - f_{k-1/2}^{r,z}) + \sigma^{00} V^r f^{r,0} = V^r Q^{r,0}, \\ v_\vartheta v_z \frac{1}{3} \left[A_{i+1/2} \left(\frac{\Delta r}{2} - \delta^c \right) f_{i+1/2}^{0,0} + A_{i-1/2} \left(\frac{\Delta r}{2} + \delta^c \right) f_{i-1/2}^{0,0} - v_r f^{0,0} - C^r f^{r,0} + C \delta^c f^{0,0} \right] - \\ - v_\vartheta v_z \delta^c M_r C f^{0,r} + (\sigma^{11} V^r + M_r^r C^r v_\vartheta v_z) f^{r,r} = V^r Q^{r,r}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} v_{r0}^1 v_z \frac{1}{3} (f_{j+1/2}^{r,0} - f_{j-1/2}^{r,0}) - \Delta r v_z \delta^c \frac{1}{3} (f_{j+1/2}^{0,0} - f_{j-1/2}^{0,0}) - v_\vartheta v_z \delta^c M_\vartheta C f^{0,\vartheta} + \\ + (\sigma^{11} V^r + M_\vartheta^r C^r v_\vartheta v_z) f^{r,\vartheta} = V^r Q^{r,\vartheta}, \quad v_r^1 v_\vartheta \frac{1}{3} (f_{k+1/2}^{r,0} - f_{k-1/2}^{r,0}) + \sigma^{11} V^r f^{r,z} = V^r Q^{r,z}, \\ \Delta r v_\vartheta v_z \left[\frac{1}{2} (f_{j+1/2}^{0,\vartheta} + f_{j-1/2}^{0,\vartheta}) - f^{0,\vartheta} \right] + v_\vartheta^1 v_z (A_{i+1/2} f_{i+1/2}^{\vartheta,r} - A_{i-1/2} f_{i-1/2}^{\vartheta,r}) + \\ + v_r v_\vartheta^1 (f_{k+1/2}^{\vartheta,z} - f_{k-1/2}^{\vartheta,z}) + \sigma^{00} V^\vartheta f^{\vartheta,0} = V^\vartheta Q^{\vartheta,0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\vartheta^1 v_z \frac{1}{3} \left[(A_{i+1/2} f_{i+1/2}^{\vartheta,0} - A_{i-1/2} f_{i-1/2}^{\vartheta,0}) - C f^{\vartheta,0} \right] + (\sigma^{11} V^\vartheta + M_r^\vartheta C v_\vartheta^1 v_z) f^{\vartheta,r} = V^\vartheta Q^{\vartheta,r}, \\ \Delta r v_\vartheta v_z \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (f_{j+1/2}^{0,0} + f_{j-1/2}^{0,0}) - f^{0,0} \right] + (\sigma^{11} V^\vartheta + M_\vartheta^\vartheta C v_\vartheta^1 v_z) f^{\vartheta,\vartheta} = V^\vartheta Q^{\vartheta,\vartheta}, \\ v_r v_\vartheta^1 \frac{1}{3} (f_{k+1/2}^{\vartheta,0} - f_{k-1/2}^{\vartheta,0}) + \sigma^{11} V^\vartheta f^{\vartheta,z} = V^\vartheta Q^{\vartheta,z}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \Delta r v_z^1 (f_{j+1/2}^{z,\vartheta} - f_{j-1/2}^{z,\vartheta}) + V \left[\frac{1}{2} (f_{k+1/2}^{0,z} + f_{k-1/2}^{0,z}) - f^{0,z} \right] + \\ + v_z^1 v_\vartheta (A_{i+1/2} f_{i+1/2}^{z,r} - A_{i-1/2} f_{i-1/2}^{z,r}) + \sigma^{00} V^z f^{z,0} = V^z Q^{z,0}, \\ v_z^1 v_\vartheta \frac{1}{3} \left[(A_{i+1/2} f_{i+1/2}^{z,0} - A_{i-1/2} f_{i-1/2}^{z,0}) - C f^{z,0} \right] + (\sigma^{11} V^z + M_r^z C v_z^1 v_\vartheta) f^{z,r} = V^z Q^{z,r}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \Delta r v_z^1 \frac{1}{3} (f_{j+1/2}^{z,0} - f_{j-1/2}^{z,0}) + (\sigma^{11} V^z + M_\vartheta^z C v_z^1 v_\vartheta) f^{z,\vartheta} = V^z Q^{z,\vartheta}, \\ V \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (f_{k+1/2}^{0,0} + f_{k-1/2}^{0,0}) - f^{0,0} \right] + \sigma^{11} V^z f^{z,z} = V^z Q^{z,z}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q^{\alpha,0} = \sigma_{s,0} (\Phi^{\alpha,0,n+1/2} - \Phi^{\alpha,0,n}), \quad Q^{\alpha,r} = \sigma_{s,1} (\Phi^{\alpha,r,n+1/2} - \Phi^{\alpha,r,n}), \\ Q^{\alpha,\vartheta} = \sigma_{s,1} (\Phi^{\alpha,\vartheta,n+1/2} - \Phi^{\alpha,\vartheta,n}), \quad Q^{\alpha,z} = \sigma_{s,1} (\Phi^{\alpha,z,n+1/2} - \Phi^{\alpha,z,n}), \\ \alpha = 0, r, \vartheta, z, \quad \sigma^{00} = \sigma - \sigma_{s,0}, \quad \sigma^{11} = \sigma - \sigma_{s,1}, \\ \Phi_{i,j,k}^{\alpha,0} \equiv \Phi_{0,i,j,k}^{\alpha,0}, \quad \Phi_{i,j,k}^{\alpha,r} \equiv \Phi_{1,i,j,k}^{\alpha,1}, \quad \Phi_{i,j,k}^{\alpha,\vartheta} \equiv \Phi_{1,i,j,k}^{\alpha,-1}, \quad \Phi_{i,j,k}^{\alpha,z} \equiv \Phi_{1,i,j,k}^{\alpha,0}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
 M_r &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} \xi_{l,m} \left(\alpha_{l,m+1/2} \pi_{l,m+1/2}^r - \alpha_{l,m-1/2} \pi_{l,m-1/2}^r \right), \\
 M_\vartheta &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} \eta_{l,m} \left(\alpha_{l,m+1/2} \pi_{l,m+1/2}^\vartheta - \alpha_{l,m-1/2} \pi_{l,m-1/2}^\vartheta \right), \\
 M_r^r &= M_r^\vartheta = M_r^z \equiv \bar{M}_r = \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} \xi_{l,m} \left(\alpha_{l,m+1/2} \bar{\pi}_{l,m+1/2}^r - \alpha_{l,m-1/2} \bar{\pi}_{l,m-1/2}^r \right), \\
 M_\vartheta^r &= M_\vartheta^\vartheta = M_\vartheta^z \equiv \bar{M}_\vartheta = \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} \eta_{l,m} \left(\alpha_{l,m+1/2} \bar{\pi}_{l,m+1/2}^\vartheta - \alpha_{l,m-1/2} \bar{\pi}_{l,m-1/2}^\vartheta \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Величины $\pi_{l,m\pm 1/2}^r, \pi_{l,m\pm 1/2}^\vartheta, \bar{\pi}_{l,m\pm 1/2}^r, \bar{\pi}_{l,m\pm 1/2}^\vartheta$ в (2.24) могут быть вычислены с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
 \pi_{l,m+1/2}^r &= (1 + P_{l,m}^\xi) \xi_{l,m} - P_{l,m}^\xi \pi_{l,m-1/2}^r, & \pi_{l,1/2}^r &= \xi_{l,1/2}, \\
 \pi_{l,m+1/2}^\vartheta &= (1 + P_{l,m}^\xi) \eta_{l,m} - P_{l,m}^\xi \pi_{l,m-1/2}^\vartheta, & \pi_{l,1/2}^\vartheta &= \eta_{l,1/2} = 0, \\
 \bar{\pi}_{l,m+1/2}^r &= \xi_{l,m}, & \bar{\pi}_{l,1/2}^r &= \xi_{l,1/2}, & \bar{\pi}_{l,m+1/2}^\vartheta &= \eta_{l,m}, & \bar{\pi}_{l,1/2}^\vartheta &= \eta_{l,1/2} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

В систему из 16 уравнений (2.19)–(2.22) входит 34 неизвестных величины: $f_{i,j,k}^{\alpha,0}, f_{i,j,k}^{\alpha,r}, f_{i,j,k}^{\alpha,\vartheta}, f_{i,j,k}^{\alpha,z}$, $\alpha = 0, r, \vartheta, z$; $f_{i\pm 1/2,j,k}^{\beta,0}, f_{i\pm 1/2,j,k}^{\beta,r}, f_{i,j\pm 1/2,k}^{\beta,0}, f_{i,j\pm 1/2,k}^{\beta,\vartheta}$, $\beta = 0, \vartheta, z$; $f_{i,j,k\pm 1/2}^{\beta,0}, f_{i,j,k\pm 1/2}^{\beta,z}$, $\beta = 0, r, \vartheta$. Для замыкания системы (2.19) к ней необходимо добавить 18 дополнительных уравнения, а также граничные условия. Искомые дополнительные уравнения получаются применением операторов \hat{L}_0 и \hat{L}_r к уравнениям (2.5), (2.8); операторов \hat{L}_0 и \hat{L}_ϑ к уравнениям (2.6), (2.9) и операторов \hat{L}_0 и \hat{L}_z к уравнениям (2.7), (2.10)

$$\begin{aligned}
 f^{r,0} &= A^{r,0} f_{i+1/2}^{0,0} + A^{r,1} f_{i+1/2}^{0,r} + B^{r,0} f_{i-1/2}^{0,0} + B^{r,1} f_{i-1/2}^{0,r} - (A^{r,0} + B^{r,0}) f^{0,0} - (A^{r,1} + B^{r,1}) f^{0,r}, \\
 f^{r,r} &= \frac{1}{3} A^{r,1} f_{i+1/2}^{0,0} + A^{r,2} f_{i+1/2}^{0,r} + \frac{1}{3} B^{r,1} f_{i-1/2}^{0,0} + B^{r,2} f_{i-1/2}^{0,r} - \frac{1}{3} (A^{r,1} + B^{r,1}) f^{0,0} - (A^{r,2} + B^{r,2}) f^{0,r},
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
 f^{\vartheta,0} &= A^{\vartheta,0} f_{j+1/2}^{0,0} + A^{\vartheta,1} f_{j+1/2}^{0,\vartheta} + B^{\vartheta,0} f_{j-1/2}^{0,0} + B^{\vartheta,1} f_{j-1/2}^{0,\vartheta} - (A^{\vartheta,0} + B^{\vartheta,0}) f^{0,0} - (A^{\vartheta,1} + B^{\vartheta,1}) f^{0,\vartheta}, \\
 f^{\vartheta,\vartheta} &= \frac{1}{3} A^{\vartheta,1} f_{j+1/2}^{0,0} + A^{\vartheta,2} f_{j+1/2}^{0,\vartheta} + \frac{1}{3} B^{\vartheta,1} f_{j-1/2}^{0,0} + B^{\vartheta,2} f_{j-1/2}^{0,\vartheta} - \frac{1}{3} (A^{\vartheta,1} + B^{\vartheta,1}) f^{0,0} - (A^{\vartheta,2} + B^{\vartheta,2}) f^{0,\vartheta},
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
 f^{z,0} &= A^{z,0} f_{k+1/2}^{0,0} + A^{z,1} f_{k+1/2}^{0,z} + B^{z,0} f_{k-1/2}^{0,0} + B^{z,1} f_{k-1/2}^{0,z} - (A^{z,0} + B^{z,0}) f^{0,0} - (A^{z,1} + B^{z,1}) f^{0,z}, \\
 f^{z,z} &= \frac{1}{3} A^{z,1} f_{k+1/2}^{0,0} + A^{z,2} f_{k+1/2}^{0,z} + \frac{1}{3} B^{z,1} f_{k-1/2}^{0,0} + B^{z,2} f_{k-1/2}^{0,z} - \frac{1}{3} (A^{z,1} + B^{z,1}) f^{0,0} - (A^{z,2} + B^{z,2}) f^{0,z},
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

где

$$\begin{aligned}
 A^{r,0} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} a_r, & A^{r,1} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \xi_{l,m} a_r, & A^{r,2} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \xi_{l,m}^2 a_r, \\
 B^{r,0} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} b_r, & B^{r,1} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \xi_{l,m} b_r, & B^{r,2} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \xi_{l,m}^2 b_r, \\
 A^{\vartheta,0} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} a_\vartheta, & A^{\vartheta,1} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \eta_{l,m} a_\vartheta, & A^{\vartheta,2} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \eta_{l,m}^2 a_\vartheta, \\
 B^{\vartheta,0} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} b_\vartheta, & B^{\vartheta,1} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \eta_{l,m} b_\vartheta, & B^{\vartheta,2} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \eta_{l,m}^2 b_\vartheta, \\
 A^{z,0} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} a_z, & A^{z,1} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \mu_{l,m} a_z, & A^{z,2} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \mu_{l,m}^2 a_z, \\
 B^{z,0} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} b_z, & B^{z,1} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \mu_{l,m} b_z, & B^{z,2} &= \frac{3}{4\pi} \sum_{l,m} w_{l,m} \mu_{l,m}^2 b_z;
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

$$f^{r,\vartheta,0} = \frac{1}{2}(f_{i+1/2}^{r,\vartheta,0} + f_{i-1/2}^{r,\vartheta,0}) + \frac{3}{4}(f_{i+1/2}^{r,\vartheta,r} - f_{i-1/2}^{r,\vartheta,r}), \quad f^{r,\vartheta,r} = \frac{1}{4}(f_{i+1/2}^{r,\vartheta,0} - f_{i-1/2}^{r,\vartheta,0}) + \frac{1}{2}(f_{i+1/2}^{r,\vartheta,r} + f_{i-1/2}^{r,\vartheta,r}), \quad (2.30)$$

$$f^{r,z,0} = \frac{1}{2}(f_{i+1/2}^{r,z,0} + f_{i-1/2}^{r,z,0}) + \frac{3}{4}(f_{i+1/2}^{r,z,r} - f_{i-1/2}^{r,z,r}), \quad f^{r,z,r} = \frac{1}{4}(f_{i+1/2}^{r,z,0} - f_{i-1/2}^{r,z,0}) + \frac{1}{2}(f_{i+1/2}^{r,z,r} + f_{i-1/2}^{r,z,r}), \quad (2.31)$$

$$f^{r,0} = \frac{1}{2}(f_{j+1/2}^{r,0} + f_{j-1/2}^{r,0}) + \frac{3}{4}(f_{j+1/2}^{r,\vartheta} - f_{j-1/2}^{r,\vartheta}), \quad f^{r,\vartheta} = \frac{1}{4}(f_{j+1/2}^{r,0} - f_{j-1/2}^{r,0}) + \frac{1}{2}(f_{j+1/2}^{r,\vartheta} + f_{j-1/2}^{r,\vartheta}), \quad (2.32)$$

$$f^{r,z,0} = \frac{1}{2}(f_{j+1/2}^{r,z,0} + f_{j-1/2}^{r,z,0}) + \frac{3}{4}(f_{j+1/2}^{r,z,\vartheta} - f_{j-1/2}^{r,z,\vartheta}), \quad f^{r,z,\vartheta} = \frac{1}{4}(f_{j+1/2}^{r,z,0} - f_{j-1/2}^{r,z,0}) + \frac{1}{2}(f_{j+1/2}^{r,z,\vartheta} + f_{j-1/2}^{r,z,\vartheta}), \quad (2.33)$$

$$f^{r,0} = \frac{1}{2}(f_{k+1/2}^{r,0} + f_{k-1/2}^{r,0}) + \frac{3}{4}(f_{k+1/2}^{r,z} - f_{k-1/2}^{r,z}), \quad f^{r,z} = \frac{1}{4}(f_{k+1/2}^{r,0} - f_{k-1/2}^{r,0}) + \frac{1}{2}(f_{k+1/2}^{r,z} + f_{k-1/2}^{r,z}), \quad (2.34)$$

$$f^{r,\vartheta,0} = \frac{1}{2}(f_{k+1/2}^{r,\vartheta,0} + f_{k-1/2}^{r,\vartheta,0}) + \frac{3}{4}(f_{k+1/2}^{r,\vartheta,z} - f_{k-1/2}^{r,\vartheta,z}), \quad f^{r,\vartheta,z} = \frac{1}{4}(f_{k+1/2}^{r,\vartheta,0} - f_{k-1/2}^{r,\vartheta,0}) + \frac{1}{2}(f_{k+1/2}^{r,\vartheta,z} + f_{k-1/2}^{r,\vartheta,z}). \quad (2.35)$$

Для получения граничных условий для P₁ системы для ускоряющих поправок воспользуемся следующей процедурой. Домножим уравнения (2.12), определяющие закон отражения при r = r_{int} и r = r_{ext}, на w_{l,m}ξ_{l,m} и просуммируем их по направлениям ξ_{l,m} > 0 и ξ_{l,m} < 0 соответственно. С учетом вида поправок (2.17), получим

$$l_0^r f_{1/2,j,k}^{\beta,0} + 3l_1^r f_{1/2,j,k}^{\beta,r} = 0, \quad m_0^r f_{1+1/2,j,k}^{\beta,0} + 3m_1^r f_{1+1/2,j,k}^{\beta,r} = \lambda_{j,k}^{\beta,r}, \quad \beta = 0, \vartheta, z, \quad (2.36)$$

где

$$l_p^r = \sum_{\xi_{l,m} > 0} w_{l,m} \xi_{l,m} \left(\xi_{l,m}^p - \sum_{\xi_{l',m'} < 0} w_{l',m'} \xi_{l',m'}^p R_{lm,l',m'}^{\text{int}} \right), \quad m_p^r = \sum_{\xi_{l,m} < 0} w_{l,m} \xi_{l,m} \left(\xi_{l,m}^p - \sum_{\xi_{l',m'} > 0} w_{l',m'} \xi_{l',m'}^p R_{lm,l',m'}^{\text{ext}} \right), \quad (2.37)$$

$$p = 0, 1, \quad \lambda_{j,k}^{\beta,r} = 4\pi \sum_{\xi_{l,m} < 0} w_{l,m} \xi_{l,m} \sum_{\xi_{l',m'} > 0} w_{l',m'} R_{lm,l',m'}^{\text{ext}} (\Psi_{I+1/2,j,k,l',m'}^{\beta,n+1/2} - \Psi_{I+1/2,j,k,l',m'}^{\beta,n}).$$

Для определения граничных условий для поправок на границах ϑ = ϑ₀ и ϑ = ϑ_{end} домножим уравнения (2.13), определяющие закон отражения на этих границах, на w_{l,m}η_{l,m} и просуммируем их по направлениям η_{l,m} > 0 и η_{l,m} < 0 соответственно. С учетом вида поправок (2.17) получим

$$l_0^\vartheta f_{i,1/2,k}^{\beta,0} + 3l_1^\vartheta f_{i,1/2,k}^{\beta,\vartheta} = 0, \quad m_0^\vartheta f_{i,J+1/2,k}^{\beta,0} + 3m_1^\vartheta f_{i,J+1/2,k}^{\beta,\vartheta} = \lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta}, \quad \beta = 0, r, z, \quad (2.38)$$

где

$$l_p^\vartheta = \sum_{\eta_{l,m} > 0} w_{l,m} \eta_{l,m} \left(\eta_{l,m}^p - \sum_{\eta_{l',m'} < 0} w_{l',m'} \eta_{l',m'}^p R_{lm,l',m'}^0 \right), \quad m_p^\vartheta = \sum_{\eta_{l,m} < 0} w_{l,m} \eta_{l,m} \left(\eta_{l,m}^p - \sum_{\eta_{l',m'} > 0} w_{l',m'} \eta_{l',m'}^p R_{lm,l',m'}^{\text{end}} \right), \quad (2.39)$$

$$p = 0, 1, \quad \lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta} = 4\pi \sum_{\eta_{l,m} < 0} w_{l,m} \eta_{l,m} \sum_{\eta_{l',m'} > 0} w_{l',m'} R_{lm,l',m'}^{\text{end}} (\Psi_{i,J+1/2,k,l',m'}^{\beta,n+1/2} - \Psi_{i,J+1/2,k,l',m'}^{\beta,n}).$$

При использовании по переменной ϑ периодических граничных условий, применяя аналогичную процедуру к уравнениям (2.15), получаем

$$l_0^\vartheta (f_{i,1/2,k}^{\beta,0} - f_{i,J+1/2,k}^{\beta,0}) + 3l_1^\vartheta (f_{i,1/2,k}^{\beta,\vartheta} - f_{i,J+1/2,k}^{\beta,\vartheta}) = \lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta,\text{end}}, \quad (2.40)$$

$$m_0^\vartheta (f_{i,J+1/2,k}^{\beta,0} - f_{i,1/2,k}^{\beta,0}) + 3m_1^\vartheta (f_{i,J+1/2,k}^{\beta,\vartheta} - f_{i,1/2,k}^{\beta,\vartheta}) = \lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta,0}, \quad \beta = 0, r, z,$$

где

$$l_p^\vartheta = \sum_{\eta_{l,m} > 0} w_{l,m} \eta_{l,m} \eta_{l,m}^p, \quad m_p^\vartheta = \sum_{\eta_{l,m} < 0} w_{l,m} \eta_{l,m} \eta_{l,m}^p, \quad p = 0, 1,$$

$$\lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta,0} = 4\pi \sum_{\eta_{l,m} < 0} w_{l,m} \eta_{l,m} (\Psi_{i,1/2,k,l',m'}^{\beta,n+1/2} - \Psi_{i,1/2,k,l',m'}^{\beta,n}), \quad (2.41)$$

$$\lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta,\text{end}} = 4\pi \sum_{\eta_{l,m} > 0} w_{l,m} \eta_{l,m} (\Psi_{i,J+1/2,k,l',m'}^{\beta,n+1/2} - \Psi_{i,J+1/2,k,l',m'}^{\beta,n}).$$

Для определения граничных условий для поправок на границах $z = z_{\text{bot}}$ и $z = z_{\text{top}}$ домножим уравнения (2.14), определяющие закон отражения на этих границах, на $w_{l,m}\mu_l$ и просуммируем их по направлениям $\mu_l > 0$ и $\mu_l < 0$ соответственно. С учетом вида поправок (2.17) получим

$$l_0^z f_{i,j,1/2}^{\beta,0} + 3l_1^z f_{i,j,1/2}^{\beta,z} = 0, \quad m_0^z f_{i,j,K+1/2}^{\beta,0} + 3m_1^z f_{i,j,K+1/2}^{\beta,z} = \lambda_{i,j}^{\beta,z}, \quad \beta = 0, r, \vartheta, \quad (2.42)$$

где

$$l_p^z = \sum_{\mu_l > 0} w_{l,m} \mu_l \left(\mu_l^p - \sum_{\mu_{l',m'} < 0} w_{l',m'} \mu_{l',m'}^p R_{lm,l',m'}^{\text{bot}} \right), \quad m_p^z = \sum_{\mu_l < 0} w_{l,m} \mu_l \left(\mu_l^p - \sum_{\mu_{l',m'} > 0} w_{l',m'} \mu_{l',m'}^p R_{lm,l',m'}^{\text{top}} \right), \quad (2.43)$$

$$p = 0, 1, \quad \lambda_{i,k}^{\beta,z} = 4\pi \sum_{\mu_l < 0} w_{l,m} \mu_l \sum_{\mu_{l',m'} > 0} w_{l',m'} R_{lm,l',m'}^{\text{top}} \left(\Psi_{i,j,K+1/2,l',m'}^{\beta,n+1/2} - \Psi_{i,j,K+1/2,l',m'}^{\beta,n} \right).$$

Следует отметить, что в уравнениях (2.36), (2.38), (2.40) и (2.42) величины $\lambda_{j,k}^{\beta,r}$, $\lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta}$, $\lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta,0}$, $\lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta,\text{end}}$ и $\lambda_{i,j}^{\beta,z}$ стремятся к нулю по мере сходимости итераций. По этой причине возможно использование также и упрощенных граничных условий на границах $r = r_{\text{ext}}$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_{\text{end}}$ и $z = z_{\text{top}}$, отличающихся от вышеприведенных тем, что правые части в них полагаются равными нулю

$$\lambda_{j,k}^{\beta,r} = \lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta} = \lambda_{i,j}^{\beta,z} = 0, \quad \lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta,0} = \lambda_{i,k}^{\beta,\vartheta,\text{end}} = 0. \quad (2.44)$$

В частности, условия поворотной симметрии (2.40) по переменной ϑ приобретают вид

$$f_{i,1/2,k}^{\beta,0} = f_{i,J+1/2,k}^{\beta,0}, \quad f_{i,1/2,k}^{\beta,\vartheta} = f_{i,J+1/2,k}^{\beta,\vartheta}. \quad (2.45)$$

Использование упрощенных граничных условий, в свою очередь, позволяет упростить постановку граничных условий в методе расщепления, используемому для нахождения решения P_1 системы для ускоряющих поправок, которому посвящена вторая часть данной работы.

Полученная сеточная аппроксимация P_1 системы для ускоряющих поправок является следствием используемой разностной аппроксимации уравнения переноса, что является необходимым условием для построения согласованной схемы ускорения.

Учитывая, что в 2D и 3D геометриях в задачах с существенной ролью анизотропии рассеяния, когда выполняется неравенство

$$\lambda = \mu_0 c / (1 - \mu_0 c) > 1, \quad \text{где} \quad \mu_0 = \sigma_{s1} / \sigma_{s0}, \quad c = \sigma_{s0} / \sigma_t, \quad (2.46)$$

сходимость KP_1 -схемы нарушается [1], [21], для обеспечения сходимости KP_1 -схемы в задачах переноса нейтрального излучения нами используется следующий простой прием [6], [10]: на четных внутренних итерациях ускоряющая коррекция, в соответствии с (2.17) производится для четырех угловых моментов решения, включая нулевой, на нечетных – только для скалярного потока. Ясно, что такое решение не является оптимальным, но оно обеспечивает сходимость KP_1 -схемы для широкого класса практических задач.

3. KP_1 -СХЕМА УСКОРЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИТЕРАЦИЙ В x, y, z ГЕОМЕТРИИ

Односкоростное уравнение переноса в x, y, z геометрии имеет вид (1.15). Все расчетные формулы KP_1 -схемы для x, y, z геометрии получаются из соответствующих формул для r, ϑ, z геометрии путем замены:

$$r \rightarrow x, \quad \vartheta \rightarrow y, \quad A_{i\pm 1/2} \rightarrow 1, \quad C \rightarrow 0, \quad C^r \rightarrow 0, \quad \delta^c \rightarrow 0, \quad v_i \rightarrow \Delta x_i, \quad (3.1)$$

$$M_r \rightarrow 0, \quad M_\vartheta \rightarrow 0, \quad \bar{M}_r \rightarrow 0, \quad \bar{M}_\vartheta \rightarrow 0.$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ KP_1 -СХЕМЫ УСКОРЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ИТЕРАЦИЙ В 3D ГЕОМЕТРИИ

В данном разделе мы приведем некоторые численные результаты, позволяющие оценить эффективность вышеописанного варианта согласованной KP_1 -схемы. Использовался поточечный критерий сходимости внутренних итераций по скалярному потоку $\varepsilon = 10^{-4}$. Для решения P_1 системы использовался циклический МР с длиной цикла $J = 16$.



Номер композиции	$\sigma_p, \text{см}^{-1}$	$\sigma_{s,0}, \text{см}^{-1}$	Источник $F, \text{см}^{-3} \text{с}^{-1}$
1	0.60	0.53	1.0
2	0.48	0.20	0
3	0.70	0.66	1.0
4	0.65	0.50	0
5	0.90	0.89	0

Фиг. 1. Сечение 3D расчетной области тестовой задачи EIR2 [5] в x, y, z геометрии при $18 < z < 78$. Области $0 < z < 18$ и $78 < z < 96$ заполнены материалом 5 в пределах $0 < x < 96, 0 < y < 86$.

При расчете тестовых задач 1–4 использовались LD и LB-схемы с весом $P_\xi = 1$ в дополнительном уравнении (1.14) по угловой переменной, WLD и WLB-схемы с весом P_ξ , выбираемым посредством AWDD-схемы (см. [19], [10]), обеспечивающей положительность экстраполяции по угловой переменной. Использовался следующий вариант алгоритма выбора веса P_ξ :

$$P_\xi = \begin{cases} 1, & U_\xi \leq U_\xi^0, \\ P(U_\xi, \delta_\xi), & U_\xi > U_\xi^0, \end{cases} \quad \delta_\xi = \frac{\alpha_{l,m+1/2}}{\alpha_{l,m-1/2} + \alpha_{l,m+1/2}}, \quad U_\xi = b'_\xi |u_\xi|, \quad u_\xi = \frac{\Psi_{m-1/2} - \Psi}{\Psi}, \quad (4.1)$$

где величина u_ξ определялась в результате предварительного расчета ячейки с весом $P_\xi = 1$; $b'_\xi = \max(1, 2b_\xi U_\xi^0)$, где $b_\xi \geq 1$ – параметр монотонизации по переменной ξ (использовалось значение $b_\xi = 1$); корректирующая функция $P(U, \delta)$ выбиралась в виде:

$$P(U, \delta) = \frac{1 - \delta}{U}, \quad U_0 = 1 - \delta. \quad (4.2)$$

В качестве критерия сходимости итераций МР использовался поблочный критерий (уравнение (4.4) из [10]) с размером ребра блока $N = 3$ и $\epsilon_{p1} = 0.4$. Расчетные времена приведены для ПК Intel Core i7 4770K.

Прежде всего представим результаты использования КР₁-схемы для расчета двух тестовых задач из работы [5], обобщенных на случай x, y, z геометрии. Геометрия и состав зон для этих задач для случая x, y геометрии определены на фиг. 1 (задача 1, EIR-2) и фиг. 2 (задача 2, железо-водная композиция). Эти стандартные задачи обычно используются, чтобы продемонстрировать, как работает алгоритм ускорения при решении сложных задач. Успешное решение этих задач, как правило, невозможно без использования согласованных схем ускорения.

При переходе к x, y, z геометрии в задаче 1 полагалось, что поперечное сечение 3D расчетной области при $18 < z < 78$ совпадает с приведенным на фиг. 1, а области $0 < z < 18$ и $78 < z < 96$ заполнены материалом 5 (т.е. материалом отражателя) в пределах $0 < x < 96, 0 < y < 86$. При переходе к x, y, z геометрии в задаче 2 полагалось, что поперечное сечение 3D расчетной области при $0 < z < 12$ совпадает с приведенным на фиг. 2, на нижней границе области используется условие зеркального отражения, а расположение зон и источника по оси z повторяет их расположение по осям x и y (композиция полностью симметрична по переменным x, y и z).

В табл. 1 приведено число внутренних итераций, требуемое для решения задач 1 и 2 без ускорения и при использовании КР₁-схемы в сочетании с циклическим МР для решения P_1 системы.



Номер композиции	$\sigma_r, \text{см}^{-1}$	$\sigma_{s, 0}, \text{см}^{-1}$	$\sigma_{s, 1}, \text{см}^{-1}$	Источник $F_s, \text{см}^{-3} \text{с}^{-1}$
1 (вода)	3.3333	3.3136	0.9256	1.0
2 (вода)	3.3333	3.3136	0.9256	0
3 (железо)	1.3333	1.1077	0.0367	0

Фиг. 2. Сечение 3D железо-водной композиции [5] в x, y, z геометрии при $0 < z < 12$. Расположение зон и источника по оси z повторяет их расположение по осям x и y (композиция полностью симметрична по переменным x, y и z).

В квадратных и круглых скобках приведены соответственно среднее (по внутренним итерациям) число итераций МР и процессорное время (мин); значение параметра $n \geq 1$ показывает, что задача считалась с увеличенной в 10×2^n начальной верхней границей спектра Λ для достижения устойчивости (или повышения эффективности) МР.

В табл. 2 приведено суммарное (по 26 группам) число внутренних итераций при расчете модели быстрого реактора (задача 3, фиг. 3) в r, ϑ, z геометрии на пространственной сетке $(82 \times 3 \times 35)$ для сектора зеркальной симметрии 60° в S_8P_1 приближении при точности сходимости внутренних итераций $\epsilon = 10^{-3}$. В активной зоне был задан пространственно постоянный источник со спектром деления ^{235}U . В данной задаче отсутствует зависимость источника и решения от азимутального угла ϑ . Таким образом, расчет в r, ϑ, z геометрии приводит к результатам, идентичным расчету в r, z геометрии. В круглых скобках приведено процессорное время (мин). Данная задача позволяет продемонстрировать эффект ускорения для типичной задачи радиационной защиты.

Применим далее рассматриваемый алгоритм к решению сильно-гетерогенной задачи с малым поглощением из [23] в r, ϑ, z геометрии (задача 4). Данная задача позволяет продемонстрировать, как работает схема ускорения в экстремальных условиях. Расчетная область этой задачи представляет собой гетерогенный цилиндр радиусом 25 см и высотой 50 см. Аксиальное сечение задачи изображено на фиг. 4. Зависимость геометрии и источников от переменной ϑ отсутствует. Внутренний цилиндрический канал заполнен материалом 1. Окружающая канал среда, а также центральный диск внутри канала заполнены материалом 2. Плотность материала 1 суще-

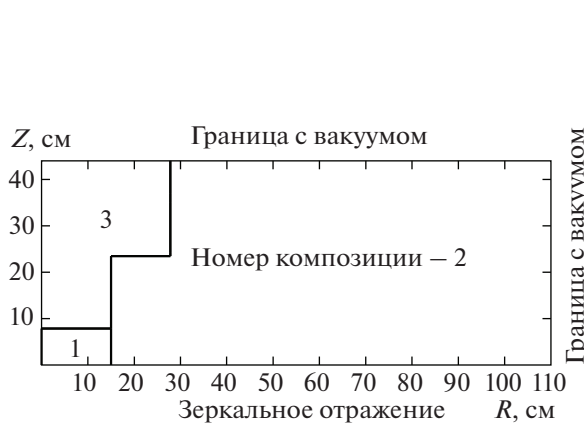
Таблица 1

Задача	Метод							
	Без ускорения				$KP_1 + \text{MP}$			
	Step	AWDD	LD	LB	Step	AWDD	LD	LB
Задача 1. Композиция EIR-2 в x, y, z геометрии, сетка $112 \times 100 \times 112, S_8P_0$	148 (2.58)	170 (4.47)	172 (14.8)	172 (14.8)	5 [10.4] (0.25)	16 [15.1] (1.08) $n = 2$	9 [8.9] (1.8)	13 [13.3] (3.1) $n = 4$
Задача 2. Железо-водная композиция в x, y, z геометрии, сетка $40 \times 40 \times 40, S_8P_1$	938 (0.85)	1282 (2.04)	1328 (6.26)	1329 (6.55)	7 [15.4] (0.019)	16 [13.9] (0.049) $n = 2$	13 [10] (0.143)	11 [14.4] (0.135) $n = 2$

Таблица 2

Метод					
Без ускорения			КР ₁ + МР		
AWDD	WLD	WLB	AWDD	WLD	WLB
961 (0.8)	961 (2.14)	960 (2.13)	163 (0.2)	164 (0.57)	153 (0.63)

ственно меньше плотности материала 2. На нижний торец канала ($z = 0, 0 \leq r \leq 5$ см) падает единичный изотропный источник. Имеется также внутренний изотропный источник с интенсивностью 10^{-6} частиц/см³, распределенный равномерно по всей расчетной области. В r, ϑ, z геометрии расчет проводился для сектора симметрии $0 < \vartheta < \pi/2$. Для случая x, y, z геометрии



Ядерные концентрации нуклидов по материалам задачи

Нуклид	Активная зона	Тепло-носитель	Отражатель
	1	2	3
Na	7.50E-3	2.21E-2	4.75E-3
Fe	1.16E-2		1.03E-2
Cr	3.55E-3		2.94E-3
Ni	2.84E-3		1.40E-3
U-235	2.25E-3		
U-238	5.09E-3		
Pu-239	7.69E-5		
Осколки	3.68E-4		
U-235			
O	1.50E-2		
C			4.79E-2

Фиг. 3. Сечение 3D модели быстрого реактора в r, ϑ, z геометрии при $0 < \vartheta < \pi/6$.



Фиг. 4. Радиальное сечение тестовой задачи б в r, ϑ, z геометрии [23].

Таблица 3

r, ϑ, z Геометрия		$\sigma_{i,2}$							
		10^2				10^1			
$\sigma_{i,1}$	c	Step	AWDD	LD	LB	Step	AWDD	LD	LB
10^{-3}	0.999	37	74	63	105	45	76	97	101 ($n = 4$)
	0.99	21	37	48	74	35	50	41	55
10^{-3}	0.999	30	61	61	65	32	61	61	65 ($n = 2$)
	0.99	20	47	35	49	29	47	35	49
10^0	0.999	8	24	23	22	12	17	17	17 ($n = 2$)
	0.99	7	22	14	31	8	15	15	15

Таблица 4

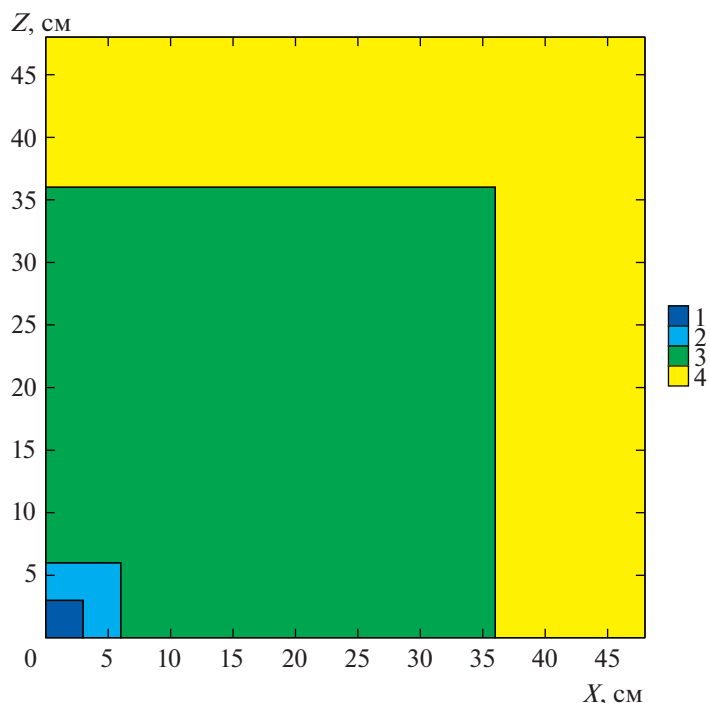
x, y, z Геометрия		$\sigma_{i,2}$							
		10^2				10^1			
$\sigma_{i,1}$	c	Step	AWDD	LD	LB	Step	AWDD	LD	LB
10^{-3}	0.999	37	a*	a	a	46	a	a	a
	0.99	15	82	37	68 ($n = 2$)	33	48	42	49 ($n = 2$)
10^{-3}	0.999	30	a	a	a	32	a	a	a
	0.99	14	62	34	64 ($n = 2$)	28	41	35	47 ($n = 2$)
10^0	0.999	8	a	26 ($n = 2$)	a	11	a	18 ($n = 2$)	a
	0.99	9	22	14	36 ($n = 2$)	9	20	13	21 ($n = 2$)

* Сходимость итераций отсутствует.

может быть определена аналогичная задача, расчетная область которой представляет собой гетерогенный параллелепипед с каналом, имеющим квадратное сечение. Аксиальное сечение этого параллелепипеда в плоскости OXZ совпадает с аксиальным сечением гетерогенного цилиндра (фиг. 4). В x, y, z геометрии расчет этой задачи может быть выполнен для $1/4$ расчетной области с условиями зеркального отражения на границах $x = 0$ и $y = 0$.

В табл. 3 и 4 для некоторого набора значений полных сечений материалов 1 ($\sigma_{i,1}$) и 2 ($\sigma_{i,2}$), а также величин отношения сечения рассеяния к полному сечению $c = \sigma_s/\sigma_t$, приведено число внутренних итераций при решении задачи 4 в r, ϑ, z и x, y, z геометриях на пространственной сетке $50 \times 3 \times 100$ и $50 \times 50 \times 100$ шагов соответственно с использованием шаговой (Step), AWDD, LD и LB-схем в S_6 приближении с точностью сходимости итераций 10^{-5} при точности решения $P1$ системы для ускоряющих поправок $\varepsilon_{P1} = 0.5$ для Step и AWDD-схем и $\varepsilon_{P1} = 0.4$ для LD и LB-схем.

Как следует из результатов, приведенных в табл. 3, в r, ϑ, z геометрии эффективность согласованной KP_1 -схемы ускорения падает по мере увеличения отношения $\sigma_{i,2}/\sigma_{i,1}$ и увеличения доли рассеяния, хотя и остается на приемлемом уровне. При решении задачи 4 в x, y, z геометрии (табл. 4) тенденция аналогична, но при $\sigma_{i,1} \leq 10^{-2}$ и $c = 0.999$ KP_1 -схема ускорения остается работоспособной только в сочетании со Step-схемой.



Сечения и источник по зонам				
Зона	1	2	3	4
σ	1.0	1.0	1.0	1.0
σ_s	0.5	0	0.05	0.95
F	0	1.0	0	1

Пространственные сетки $I_2 - I_{64}$ по зонам по переменным x, y и z				
Зона	1	2	3	4
Сетка				
I_2	2	2	20	8
I_4	4	4	40	16
I_8	8	8	80	32
I_{16}	16	16	160	64
I_{32}	32	32	320	128
I_{64}	64	64	640	256

Фиг. 5. Задача 5 в x, y, z геометрии [24]. Указаны полное сечение σ , сечение рассеяния σ_s , внутренний изотропный источник F и число шагов пространственной сетки по зонам по переменным x, y и z .

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ AWDD, LD И LB-СХЕМ В ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

В данном разделе мы приведем численные результаты для трехмерных x, y, z и r, ϑ, z геометрий, демонстрирующие сравнительную точность DD, AWDD, LD и LB-схем. Использовались два варианта AWDD-схемы, отличающихся выбором корректирующих функций (П.12) и (П.13) и параметров монотонизации $b_r = b_\vartheta = b_z = 2, b_\xi = 1$ и $b_r = b_\vartheta = b_z = 1.6, b_\xi = 1$ [10], обозначенные как AWDD₁ и AWDD₂ соответственно.

В качестве тестовой задачи 5 рассмотрим обобщение одногрупповой 4-х зонной задачи с изотропным рассеянием в плоской геометрии (см. [24]) на случай 3D x, y, z геометрии (см. фиг. 5). Вариант этой же задачи, но для r, ϑ, z геометрии, представляет собой сектор симметрии 60° с продольным сечением, получаемым путем замены на фиг. 5 $x \rightarrow r$.

В качестве точного решения задачи 5 в x, y, z геометрии использовалось ее решение, полученное с использованием LD-схемы 3-го порядка точности на равномерной пространственной сетке с шагом $\Delta x = \Delta r = \Delta z = 3/16$ (число пространственных интервалов по зонам по каждой из пространственных переменных составило: 16 + 16 + 160 + 64) с квадратурой Лебедева на сфере $L_{16,2}$ [25]. Квадратура Лебедева $L_{N,M}$ задается посредством двух параметров: N – порядок квадратуры (число параллелей на полусфере), $N = 2, 4, 6, 8, \dots$; M – порядок аксиальной симметрии квадратуры: $M = 1, 2, \dots$. В качестве точного решения задачи в r, ϑ, z геометриях использовалось ее решение, полученное с использованием LD-схемы 3-го порядка точности на равномерной пространственной сетке с шагом $\Delta x = \Delta r = \Delta z = 3/64$ (число пространственных интервалов по радиальным и аксиальным зонам составило: 64 + 64 + 640 + 256, по азимутальной зоне, состоящей из сектора симметрии 60°, – 3 интервала) с квадратурой $L_{16,2}$. Точность сходимости итераций составляла 10^{-9} . Для ускорения внутренних итераций использовалась согласованная КР₁-схема ускорения итераций, что позволило уменьшить число внутренних итераций в рассматриваемой задаче с примерно 300 до 13–22.

Таблица 5

x, y, z Геометрия, $\delta_{\text{average}}, \%$						
Шаг $\Delta x, \Delta z$	Зона	Схема				
		DD	AWDD ₁	AWDD ₂	LD	LB
3/2	1	-7.1E+1	4.1E+1	4.3E+1	-1.1E+1	1.3E+1
	2	1.2E+1	-3.7E+0	-3.7E+0	-2.5E+0	2.0E+0
	3	6.0E+8 (6388)	7.9E+3	8.5E+3	-5.8E+2 (645)	1.5E+6 (278)
	4	-1.4E+1	-1.9E+1	-1.8E+1	-5.0E+0	-1.2E+0
3/4	1	-1.6E+1	6.0E+0	9.5E+0	-1.8E+0	2.2E+0
	2	-1.0E+1	6.6E+0	6.8E+0	-2.5E+0	-1.1E+0
	3	-1.3E+7 (34477)	2.0E+2	2.7E+2	-5.5E+1	1.7+3 (10)
	4	-1.0E+1	-1.3E+1	1.3E+1	-3.0E+0	6.3E-1
3/8	1	-4.9E+0	-3.2E+0	-3.3E+0	6.9E-1	6.4E-1
	2	-8.6E+0	1.0E+1	7.6E+0	-2.0E+0	-7.7E-1
	3	-5.8E+6 (148033)	6.7E+1	3.2E+1	1.4E+1	-2.9E+1
	4	-6.8E+0	1.4E+1	1.1E+1	-1.8E+0	-4.2E-1
3/16	1	-1.5E+0	1.3E+0	1.2E+0		
	2	-4.8E+0	1.4E+1	1.4E+1		
	3	-4.7E+6 (1045539)	5.1E+1	3.5E+1		
	4	-3.2E+0	1.5E+1	1.5E+1		

В табл. 5 и 6 (для x, y, z геометрии), 7 и 8 (для r, ϑ, z геометрии) показаны относительные ошибки δ_{average} и δ_{sum} (5.1) в расчете нулевого пространственного момента скалярного потока $\Phi_{i,j,k}^{(0)}$ и полного числа частиц $\sum_{i,j,k} \Phi_{i,j,k}^{(0)} V_{i,j,k}$. В скобках указано количество пространственных ячеек с отрицательным значением скалярного потока

$$\delta_{\text{average}} = \max_{i,j,k \in K_l} \frac{\Phi_{i,j,k}^{(0)} - \Phi_{i,j,k}^{(0)ex}}{\Phi_{i,j,k}^{(0)ex}}, \quad \delta_{\text{sum}} = \frac{\sum_{i,j,k} \Phi_{i,j,k}^{(0)} V_{i,j,k} - \int_0^X \int_0^Y \int_0^Z \Phi^{ex}(x, y, z) dV}{\int_0^X \int_0^Y \int_0^Z \Phi^{ex}(x, y, z) dV}. \quad (5.1)$$

В уравнении (5.1) $\Phi^{ex}(x, y, z)$ – “точное” решение, K_j – пространственная зона, занятая l -м материалом, $l = 1, \dots, 4$, изображенной на фиг. 5 пространственной области.

Из табл. 5–8 можно сделать следующие выводы. Использование DD-схемы для решения задачи 5 в x, y, z и r, ϑ, z геометриях для каждой из использованных пространственных сеток приводит к появлению отрицательных скалярных потоков. Для LD или LB-схем уменьшение шага пространственной сетки приводит к исчезновению отрицательных потоков. При этом не наблюдается проблем со сходимостью итерационного процесса. При использовании же редких пространственных сеток LD и, в особенности, LB-схема нуждаются в коррекции отрицательных потоков.

Приведем далее результаты (см. фиг. 7), показывающие скорость сходимости k_{eff} в зависимости от выбора пространственной сетки и разностной схемы при фиксированной квадратуре ES_8 для 2-х зонной задачи из [26] в r, ϑ, z геометрии, изображенной на фиг. 6 и ее аналога в x, y, z геометрии. В случае x, y, z геометрии на левой, передней и нижней границах расчетной области использовалось условие зеркального отражения. В r, ϑ, z геометрии расчет проводился для сектора симметрии 60° ; на нижней границе расчетной области использовалось условие зеркального отражения. В r, ϑ, z геометрии задача решалась с квадратурой ES_8 с равномерной пространственной сеткой из 10, 20, 40, 80 и 160 интервалов по радиальной и аксиальной переменным; по ази-

Таблица 6

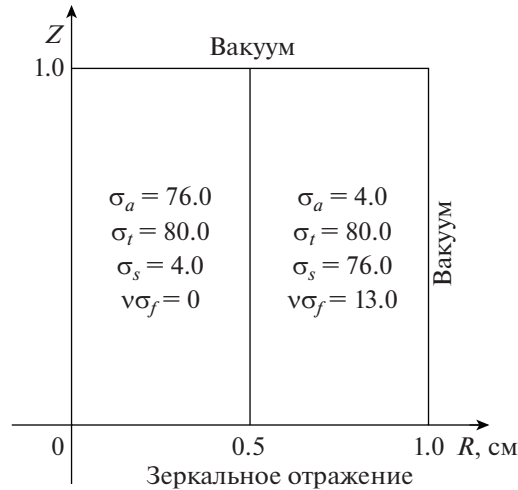
x, y, z Геометрия, δ_{sum} , %					
Шаг $\Delta x, \Delta z$	Схема				
	DD	AWDD ₁	AWDD ₂	LD	LB
3/2	-6.5E-2	-3.8E+0	-4.2E+0	-2.6E-1	-3.2E-2
3/4	-1.9E-2	-1.5E+0	-1.6E+0	-4.8E-2	-9.3E-4
3/8	-3.9E-3	-4.9E-1	-5.3E-1	-7.3E-3	5.9E-4
3/16	1.1E-4	-1.5E-1	-1.6E-1	-1.8E-3	-5.0E-4

Таблица 7. Относительная ошибка аппроксимации $\delta_{average}$ (5) при решении задачи 5 (фиг. 5) в r, ϑ , z геометрии с квадратурой $L_{16,2}$, %. В скобках указано количество пространственных ячеек с отрицательным значением скалярного потока

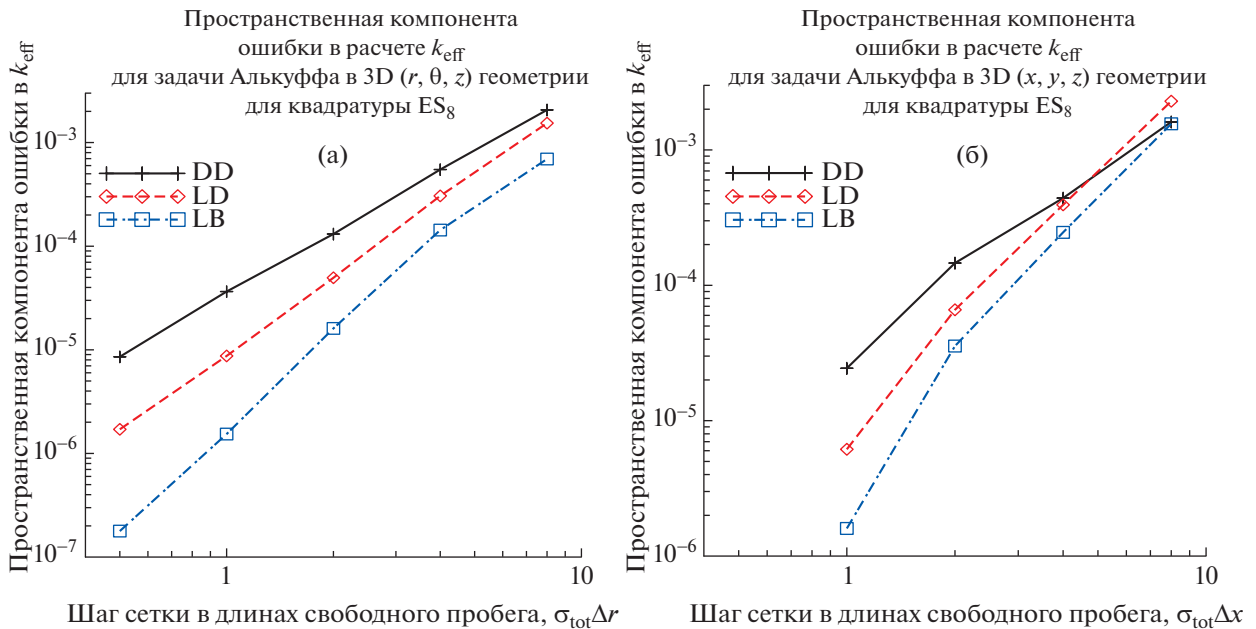
r, ϑ , z Геометрия, $\delta_{average}$, %						
Шаг $\Delta r, \Delta z$	Зона	Схема				
		DD	AWDD ₁	AWDD ₂	LD	LB
3/2		-4.8E+1	3.6E+1	3.8E+1	-7.5E+0	1.1E+1
		7.4E+0	-3.0E+0	-3.0E+0	-1.6E+0	1.6E+0
		8.7E+7 (810)	5.5E+3	5.9E+3	-3.0E+2 (45)	2.9E+5 (39)
		-8.6E+0	-1.4E+1	-1.4E+1	-3.1E+0	9.6E-1
3/4	1	-1.2E+1	5.1E+0	7.5E+0	1.5E+0	2.0E+0
	2	-6.6E+0	5.1E+0	5.2E+0	-1.5E+0	1.6E+0
	3	-1.6E+6 (51380)	1.6E+2	2.2E+2	-3.0E+1	4.4E+2
	4	-5.8E+0	-9.3E+0	9.7E+0	-1.7E+0	5.7E-1
3/8	1	-3.6E+0	-3.8E+0	-3.3E+0	8.3E-1	5.6E-1
	2	-5.3E+0	7.5E+0	7.6E+0	-1.2E+0	1.1E+0
	3	-3.8E+5 (4811)	4.3E+1	3.2E+1	-1.0E+1	-1.2E+1
	4	-3.8E+0	1.0E+1	1.1E+1	-9.9E-1	3.0E-1
3/16	1	1.4E+0	-1.9E+0	-1.9E+0	3.4E-1	1.4E-1
	2	-3.7E+0	8.3E+0	8.4E+0	-9.1E-1	5.8E-1
	3	2.5E+5 (16144)	3.0E+1	-1.6E+1	-5.3E+0	-4.3E+0
	4	-2.2E+0	8.8E+0	9.0E+0	-5.6E-1	-1.6E-1
3/32	1	5.6E-1	-1.0E+0	-9.9E-1	1.6E-1	5.9E-2
	2	-2.1E+0	7.5E+0	7.6E+0	-5.2E-1	2.7E-1
	3	7.5E+4 (51380)	2.4E+1	-1.5E+1	2.7E+0	-1.4E+0
	4	-1.1E+0	6.6E+0	6.8E+0	-2.5E-1	-1.1E-1

Таблица 8

r, ϑ , z Геометрия, δ_{sum} , %					
Шаг $\Delta r, \Delta z$	Схема				
	DD	AWDD ₁	AWDD ₂	LD	LB
3/2	-6.1E-2	-3.7E+0	-4.0E+0	-2.2E-1	-1.0E-2
3/4	-1.9E-2	-1.4E+0	-1.5E+0	-4.2E-2	-9.3E-4
3/8	-4.8E-3	-4.8E-1	-5.3E-1	-8.4E-3	-4.4E-4
3/16	-1.1E-3	-1.5E-1	-1.6E-1	-1.8E-3	-5.0E-4
3/32	-2.1E-4	-4.1E-2	-4.6E-2	-3.4E-4	-1.6E-4



Фиг. 6. Задача 6 в r, ϑ, z геометрии [26]. Указаны сечение поглощения σ_a , полное сечение σ_t , сечение рассеяния σ_s , $v\sigma_f$ по зонам.



Фиг. 7. Пространственная компонента ошибки в расчете k_{eff} при расчете задачи 6 (см. фиг. 6) [26] в (а) r, ϑ, z и (б) x, y, z геометриях с квадратурой ES_8 .

мутальной переменной использовалась равномерная сетка из 3-х интервалов. В качестве точного использовалось значение k_{eff} , рассчитанное по LD-схеме на сетке из $320 \times 3 \times 320$ интервалов с точностью сходимости итераций 10^{-9} . В x, y, z геометрии использовалась квадратура ES_8 и равномерная пространственная сетка из 10, 20, 40 и 80 интервалов по пространственным переменным. В качестве точного использовалось значение k_{eff} , рассчитанное по LD-схеме на сетке из $80 \times 80 \times 80$ интервалов с точностью сходимости итераций 10^{-9} .

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Представленные результаты численного эксперимента показывают, что LD и LB-схемы имеют высокую скорость сходимости расчетных результатов в r, ϑ, z и x, y, z геометриях при сгуще-

нии пространственной сетки задачи, а разработанный вариант алгоритма ускорения внутренних итераций обеспечивает значительный выигрыш во времени расчета варианта. Вместе с тем, как показывают результаты решения задачи 4 в x, y, z геометрии, существует класс задач, для которых эффективность алгоритма ускорения падает.

Опыт решения практических задач радиационной защиты с использованием KP_1 -схемы, согласованной с LD-схемой, показал, что данный алгоритм за счет использования более редкой пространственной сетки и стабильно работающего алгоритма ускорения позволяет значительно уменьшить расчетное время варианта при сохранении необходимой точности расчета пространственных распределений потоков излучения. Кроме того, он хорошо сходится и при решении задач, в которых KP_1 -схема, согласованная с AWDD-схемой, оказывается малоэффективной или неустойчивой (что обычно является следствием использования неудачной аппроксимации геометрии задачи).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
2. Alcouffe R.E. Diffusion synthetic acceleration methods for the diamond-differenced discrete-ordinates equations // Nucl. Sci. and Eng. 1977. V. 64. № 2. P. 344.
3. Adams M.L., Larsen E.W. Fast iterative methods for discrete-ordinates particle transport calculations // Progress in Nuclear Energy. 2002. V. 40. Iss. 1. P. 3.
4. Lorence L.J., Morel J.E., Larsen E.W. An S_2 synthetic acceleration method for the one-dimensional S_N equations with linear discontinuous spatial differencing // Nucl. Sci. Eng. 1989. V. 101. № 2. P. 341.
5. Khalil H. A nodal diffusion technique for synthetic acceleration of nodal S_n calculations // Nucl. Sci. and Eng. 1985. V. 90. № 3. P. 263.
6. Voloschenko A.M. Consistent P_1 synthetic acceleration scheme for transport equation in 3D geometries. // Proc. of Intern. Conf. on Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor Physics and Nuclear and Biological Applications. Avignon, France, September 12–15, 2005, paper 070.
7. Волощенко А.М., Воронков А.В., Сычугова Е.П. Согласованная P_1SA -схема ускорения внутренних и внешних итераций для уравнения переноса нейтронов и фотонов в одномерных геометриях в пакете РЕАКТОР // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1996. № 2.
8. CNCSN 2009: One, Two- and Three-Dimensional Coupled Neutral and Charged Particle Discrete Ordinates Parallel Multi-Threaded Code System // RSICC code package CCC-726. 2009.
9. Волощенко А.М. KP_1 -схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в двумерной геометрии, согласованная со взвешенной алмазной схемой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 9. С. 1379.
10. Волощенко А.М. KP_1 -схема ускорения внутренних итераций для уравнения переноса в трехмерной геометрии, согласованная со взвешенной алмазной схемой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 2. С. 1.
11. Волощенко А.М., Кондратенко Е.П. KP_1 -схема ускорения внутренних итераций, согласованная с семейством WLM–WLD-схем для уравнения переноса в одномерных геометриях // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1986. № 197.
12. Voloschenko A.M. P_1SA Scheme for Acceleration of Inner Iterations Consistent with the Weighted Nodal Scheme for Transport Equation in 1D Geometries // Proc. of International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering (M&C 2011), Rio de Janeiro, RJ, Brazil, May 8–12, 2011.
13. Коконков Н.И., Николаева О.В. KP_1 итерационный метод решения уравнения переноса в трехмерных областях на неструктурированных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 10. С. 95.
14. Волощенко А.М. Адаптивные положительные аппроксимации и согласованная KP_1 -схема ускорения итераций для уравнения переноса в задачах радиационной защиты. Докторская диссертация. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2015, http://www.keldysh.ru/council/3/D00202403/voloshchenko_diss.pdf.
15. Vaidyanathan R.A. Finite Moments Algorithm for Particle Transport Problems // Nucl. Sci. Eng. 1979. V. 71. P. 46.
16. Voloschenko A.M. Some Improvements in Solving of the Transport Equation by the Use of the Family of Weighted Nodal Schemes // Proc. of International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering (M&C 2011), Rio de Janeiro, RJ, Brazil, May 8–12, 2011.
17. Carlson B.G. A method of characteristics and other improvements in solution methods for the transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1976. V. 61. P. 408.
18. Басс Л.П., Волощенко А.М., Гермогенова Т.А. // Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986.

19. *Voloschenko A.M., Germogenova T.A.* Numerical Solution of the Time-Dependent Transport Equation with Pulsed Sources // *Transp. Theory and Stat. Phys.* 1994. V. 23. № 6. P. 845.
20. *Alcouffe R.E.* An Adaptive Weighed Diamond-Differencing Method for Three-Dimensional XYZ Geometry // *Trans. Am. Nucl. Soc.* 1993. V. 68A. P. 206.
21. *Adams M.L., Wareing T.A.* Diffusion-synthetic acceleration given anisotropic scattering, general quadratures, and multidimensions // *Trans. Am. Nucl. Soc.* 1993. V. 68A. P. 203.
22. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
23. *Warsa J.S., Wareing T.A., Morel J.A.* Krylov iterative methods applied to multidimensional S_n calculations in the presence of material discontinuities // *Proceedings of M&C 2003 – Nuclear Mathematical and Computational Sciences: A Century in Review – A Century Anew*, paper No. 134, April 6–10, Gatlinburg, USA, 2003.
24. *Alcouffe R.E., Larsen E.W., Miller W.F., Wienke B.R.* Computational Efficiency of Numerical Methods for the Multigroup Discrete Ordinates Neutron Transport Equations in Slab Geometry Case // *Nucl. Sci. Eng.* 1979. V. 71. P. 111.
25. *Казakov А.Н., Лебедев В.И.* Квадратурные формулы типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы диэдра // *Труды Математического института РАН.* 1994. Т. 203. С. 100.
26. *Alcouffe R.E.* A Robust Linear Discontinuous Method for the RZ S_N Transport Equation // *Trans. Am. Nucl. Soc.* 2003. V. 89. P. 363.