

УДК 519.633

УСЛОВИЯ L^2 -ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ 1D БАРОТРОПНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ¹⁾

© 2019 г. А. А. Злотник^{1,*}, Т. А. Ломоносов^{1,**}

(¹101000 Москва, ул. Мясницкая, 20, НИУ Высшая школа экономики, Россия)

*e-mail: azlotnik@hse.ru

**e-mail: tlomonosov@hse.ru

Поступила в редакцию 12.06.2018 г.

Изучаются явные двухслойные по времени и симметричные по пространству разностные схемы, построенные посредством аппроксимации 1D баротропных квазигазо/квазигидродинамических систем уравнений. Они линеаризуются на постоянном решении с ненулевой скоростью, и для них выводятся как необходимые, так и достаточные условия L^2 -диссипативности решений задачи Коши в зависимости от числа Маха. Эти условия различаются между собой не более чем в 2 раза. Результаты существенно развивают известные для линеаризованной схемы Лакса–Вендроффа. Выполняются также численные эксперименты по анализу применимости найденных условий в нелинейной постановке для нескольких схем при различных числах Маха. Библ. 18. Фиг. 6. Табл. 2.

Ключевые слова: уравнения одномерной баротропной газовой динамики, квазигазодинамическая система уравнений, явные двухслойные разностные схемы, устойчивость, L^2 -диссипативность.

DOI: 10.1134/S0044466919030153

ВВЕДЕНИЕ

Квазигазо/квазигидродинамические (КГД/КГДД) системы уравнений можно рассматривать как регуляризованные системы уравнений газовой динамики. С ними связан класс явных двухслойных по времени и симметричных по пространству разностных схем, достаточно активно используемых при численном решении многих задач [1]–[3]. Баротропные КГД/КГДД системы были введены и изучены в [4]–[7]. Соответствующие разностные схемы применялись при расчете задач мелкой воды, двухкомпонентных течений с поверхностными эффектами, астрофизических задач и др. [8]–[11].

Вопросы теории указанных разностных схем, включая практически важный анализ условий их устойчивости в зависимости от параметров схем, пока разработаны недостаточно. Для 1D разностных схем, линеаризованных на постоянном решении с нулевой скоростью $u_* = 0$, достаточные условия L^2 -диссипативности масштабированных решений были получены в [3], [12] энергетическим методом. Более точные критерии (необходимые и достаточные условия) в баротропном случае при $u_* = 0$ выведены недавно в [13] спектральным методом.

В настоящей работе в баротропной постановке впервые анализируется случай $u_* \neq 0$ и выводятся как необходимые, так и достаточные условия L^2 -диссипативности решений задачи Коши в зависимости от числа Маха M . Эти условия различаются между собой не более чем в 2 раза и содержат существенную для практики информацию. В том числе выяснено, что при использовании КГД системы можно обеспечить независимость условия на число Куранта от M . Вывод условий базируется на новых результатах для абстрактных разностных схем с регуляризацией и спектральном подходе (см. [14]). Эти результаты существенно развивают известные для линеа-

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 19-01-00262 и 18-01-00587).

ризованной схемы Лакса–Вендроффа в [15]. Они применимы также для анализа схем изучаемого типа для полной 1D системы уравнений газовой динамики [16].

Приводятся также результаты численных экспериментов с использованием КГД системы в связи с анализом применимости найденных условий в нелинейной постановке при решении задачи Римана в изэнтропическом случае при $M = 2, 4, 6, 8$. Расчеты выполнены для трех схем – схемы стандартного типа и двух схем с энергетически диссипативными дискретизациями по пространству из [17]. Подчеркнем, что линеаризация всех трех схем на постоянном решении *одинаковая*. Однако в нелинейной постановке свойства устойчивости последних двух схем оказываются существенно лучше, чем у схемы стандартного типа, тем более с ростом M , и эти свойства в определенной степени соответствуют найденным условиям.

1. УСЛОВИЯ L^2 -ДИССИПАТИВНОСТИ АБСТРАКТНОЙ ЯВНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ СХЕМЫ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

Пусть ω_h – равномерная сетка на \mathbb{R} с узлами $x_k = kh, k \in \mathbb{Z}$ и шагом $h = X/N$, а ω_h^* – вспомогательная сетка с узлами $x_{k-1/2} = (k - 0.5)h, k \in \mathbb{Z}$. Пусть $\bar{\omega}^{\Delta t}$ – равномерная сетка по t на $[0, \infty)$ с узлами $t_m = m\Delta t, m \geq 0$, и шагом $\Delta t > 0$. Введем сеточные операторы

$$(sv)_{k-1/2} = \frac{v_{k-1} + v_k}{2}, \quad (\delta v)_{k-1/2} = \frac{v_k - v_{k-1}}{h}, \quad \delta^{\circ} v_k = \frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2h},$$

$$(s^*y)_k = \frac{y_{k-1/2} + y_{k+1/2}}{2}, \quad (\delta^*y)_k = \frac{y_{k+1/2} - y_{k-1/2}}{h}, \quad \delta_t v = \frac{v^+ - v}{\Delta t}, \quad v^{+,m} = v^{m+1}.$$

Пусть H – гильбертово пространство вектор-функций со значениями из \mathbb{C}^n , заданных и суммируемых в квадрате на ω_h , со скалярным произведением $(\mathbf{v}, \mathbf{y})_H = h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\mathbf{v}_k, \mathbf{y}_k)_{\mathbb{C}^n}$.

Рассмотрим сначала абстрактную явную двухслойную по времени и симметричную трехточечную по пространству линейную разностную схему

$$\delta_t \mathbf{y} + c_0 B \delta^{\circ} \mathbf{y} - \tau_* c_0^2 A \delta^* \delta \mathbf{y} = 0 \quad \text{на} \quad \omega_h \times \bar{\omega}^{\Delta t}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y}^m \in H$ при $m \geq 0$, $A = A^*$ и $B = B^*$ – матрицы (вязких и конвективных слагаемых) порядка n , $c_0 > 0$ – характерная скорость, $\tau_* > 0$ – параметр регуляризации. При $A = B^2, \tau_* = \Delta t/2$ устойчивость подобной линеаризованной схемы Лакса–Вендроффа изучена в [15].

Поставим вопрос об условиях справедливости оценки

$$\sup_{m \geq 0} \|\mathbf{y}^m\|_H \leq \|\mathbf{y}^0\|_H \quad \forall \mathbf{y}^0 \in H. \tag{2}$$

Нетрудно убедиться, что она эквивалентна свойству L^2 -диссипативности

$$\|\mathbf{y}^m\|_H \leq \|\mathbf{y}^{m-1}\|_H \leq \dots \leq \|\mathbf{y}^0\|_H \quad \forall \mathbf{y}^0 \in H, \quad \forall m \geq 1.$$

Перепишем схему (1) в рекуррентном виде:

$$\mathbf{y}^+ = \mathbf{A}\mathbf{y} := \mathbf{y} - \Delta t c_0 B \delta^{\circ} \mathbf{y} + \Delta t \tau_* c_0^2 A \delta^* \delta \mathbf{y} \quad \text{на} \quad \omega_h \times \bar{\omega}^{\Delta t}. \tag{3}$$

Пусть Δt и τ_* задаются формулами

$$\Delta t = \tilde{\beta} \frac{h}{c_0}, \quad \tau_* = \alpha \frac{h}{c_0} \tag{4}$$

с параметрами $\tilde{\beta} > 0$ и $\alpha > 0$. Цель дальнейшего анализа – вывести условия на $\tilde{\beta}$ в зависимости от α , обеспечивающие выполнение оценки (2).

Для этого в соответствии с [14] рассмотрим частные решения вида $\mathbf{y}_k^m = e^{ik\xi} \mathbf{v}^m(\xi), k \in \mathbb{Z}, m \geq 0$, где i – мнимая единица и $0 \leq \xi \leq 2\pi$ – параметр. Их подстановка в (3) с учетом (4) дает

$$\mathbf{v}^+ = G\mathbf{v} \quad \text{на} \quad \bar{\omega}^{\Delta t}, \quad G = I - \tilde{\beta}F, \quad F = F(\sigma) = 4\sigma\alpha A \pm i2\sqrt{\sigma(1-\sigma)}B. \tag{5}$$

Здесь матрица G – символ оператора \mathbf{A} , матрица I – единичная, $\sigma = \sin^2 \frac{\xi}{2} \in [0, 1]$ и берутся оба знака $+$ и $-$, отвечающие соответственно $0 \leq \xi \leq \pi$ и $\pi < \xi \leq 2\pi$.

Следующая теорема вытекает из [16]. Для полноты дадим ее с доказательством.

Теорема 1. 1. *Выполнение матричного неравенства*

$$\tilde{\beta} \left(2\sigma\alpha A^2 + \frac{1-\sigma}{2\alpha} B^2 \pm i\sqrt{\sigma(1-\sigma)}[A, B] \right) \leq A \quad \forall 0 < \sigma \leq 1, \quad (6)$$

необходимо и достаточно для справедливости оценки (2). Здесь $[A, B] = AB - BA$ – коммутатор матриц A и B , и матрица $i[A, B]$ эрмитова.

2. *Выполнение матричных неравенств*

$$2\alpha\tilde{\beta}A \leq I, \quad \frac{\tilde{\beta}}{2\alpha} B^2 \leq A \quad (7)$$

необходимо, а выполнение неравенства

$$\tilde{\beta} \left(2\alpha A^2 + \frac{1}{2\alpha} B^2 \right) \leq A \quad (8)$$

достаточно для справедливости оценки (2).

Доказательство. 1. По аналогии с леммой 1 из [13] доказывается, что выполнение спектрального неравенства

$$\lambda_{\max}(G^*G) \leq 1 \quad \forall 0 \leq \sigma \leq 1 \quad (9)$$

необходимо и достаточно для справедливости оценки (2); здесь и ниже $\lambda_{\max}(C)$ – максимальное из собственных значений матрицы C (когда они вещественные).

Это неравенство эквивалентно матричному неравенству $G^*G \leq I$, т.е. неравенству

$$\tilde{\beta} F^* F \leq F + F^* \quad \forall 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Для $F = F_R + iF_I$, где матрицы F_R и F_I – эрмитовы матрицы, оно принимает вид

$$\tilde{\beta} (F_R^2 + F_I^2 + i[F_R, F_I]) \leq 2F_R \quad \forall 0 \leq \sigma \leq 1.$$

В силу последней формулы (5) после сокращения на $8\sigma\alpha$ при $\sigma \neq 0$ оно переходит в (6).

2. По непрерывности неравенство (6) выполняется и при $\sigma = 0$. При $\sigma = 1, 0$ оно дает

$$2\alpha\tilde{\beta}A^2 \leq A, \quad \frac{\tilde{\beta}}{2\alpha} B^2 \leq A.$$

Эти неравенства можно переписать в виде (7).

Далее, для любого $z \in H$ справедливы соотношения

$$(\pm i[A, B]z, z)_H = \pm i[(Bz, Az)_H - (Az, Bz)_H] = \mp 2 \operatorname{Im}(Bz, Az)_H \leq 2 \|Bz\|_H \|Az\|_H.$$

Поэтому при $0 \leq \sigma \leq 1$ верно матричное неравенство

$$\pm i\sqrt{\sigma(1-\sigma)}\tilde{\beta}[A, B] \leq 2\sigma\epsilon\alpha\tilde{\beta}A^2 + \frac{1-\sigma}{\epsilon} \frac{\tilde{\beta}}{2\alpha} B^2 \quad \forall \epsilon > 0$$

(при $\sigma = 0, 1$ оно очевидно). При любом $\epsilon > 0$ оно влечет достаточное условие

$$\tilde{\beta} \left[(1 + \epsilon)2\sigma\alpha A^2 + (1 + \epsilon^{-1}) \frac{1-\sigma}{2\alpha} B^2 \right] \leq A \quad \forall 0 \leq \sigma \leq 1.$$

При $\epsilon = (1 - \sigma)/\sigma$ (для $0 < \sigma < 1$) получаем (8).

Замечание 1. 1. Для $A \geq 0$ первое неравенство (7) эквивалентно неравенству $\tilde{\beta} \leq 1/[2\alpha\lambda_{\max}(A)]$. Второе неравенство (7) влечет свойство $A \geq 0$.

2. Если $A = B^2 + D$, где D – диагональная матрица с элементами $d_{ii} \geq 0$, $1 \leq i \leq N$, причем $d_{i_0 i_0} = 0$, а $a_{i_0 i_0} \neq 0$ для некоторого i_0 , то второе неравенство (7) сводится просто к числовому неравенству $\tilde{\beta} \leq 2\alpha$.

3. Если $B^2 \leq A$, то неравенство (8) выполнено при $\tilde{\beta} \leq 1/[2\alpha\lambda_{\max}(A) + (2\alpha)^{-1}]$.

Замечание 2. Неравенства (7) с удвоенными левыми частями

$$4\alpha\tilde{\beta}A \leq I, \quad \frac{\tilde{\beta}}{\alpha}B^2 \leq A \tag{10}$$

влекут неравенство (8) и поэтому служат более простым достаточным условием.

2. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ 1D УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И L^2 -ДИССИПАТИВНОСТЬ

1D баротропная КГД система уравнений состоит из регуляризованных уравнений баланса массы и импульса

$$\partial_t \rho + \partial_x j = 0, \quad \partial_t(\rho u) + \partial_x [ju + p(\rho) - \Pi] = 0, \tag{11}$$

$$j = \rho u - \rho w, \quad \rho w = \tau u \partial_x(\rho u) + \rho \hat{w}, \quad \rho \hat{w} = \tau [\rho u \partial_x u + p'(\rho)], \tag{12}$$

$$\Pi = \mu \partial_x u + u \rho \hat{w} + \tau p'(\rho) \partial_x(\rho u). \tag{13}$$

Здесь $\rho > 0$, u – плотность и скорость, $p(\rho)$ – давление с $p \in C^1(0, +\infty)$ и $p' > 0$, j , Π – регуляризованные поток массы и вязкое напряжение, ρw , $\rho \hat{w}$ – регуляризирующие импульсы, $\tau = \tau(\rho, u) > 0$ – параметр регуляризации, $\mu \partial_x u$ – вязкое напряжение Навье–Стокса, где $\mu = \mu(\rho, u) > 0$ пропорционален коэффициенту вязкости.

КГДД система проще и отличается тем, что в ней $\rho w = \rho \hat{w} = \tau [\rho u \partial_x u + p'(\rho)]$, $\Pi = \mu \partial_x u + u \rho \hat{w}$.

Обе системы переходят в баротропные системы уравнений газовой динамики при $\tau = \mu = 0$ и Навье–Стокса вязкого сжимаемого газа при $\tau = 0$, $\mu > 0$.

Сначала рассмотрим явную двухслойную по времени и симметричную по пространству стандартного типа аппроксимацию КГД уравнений (11)–(13):

$$\delta_t \rho + \delta^* j = 0, \quad \delta_t(\rho u) + \delta^*(jsu + p(sp) - \Pi) = 0 \quad \text{на } \omega_h, \tag{14}$$

$$j = (sp)su - (sp)w, \quad (sp)w = (s\tau)[\delta(\rho u)]su + (sp)\hat{w}, \quad (sp)\hat{w} = (s\tau)[(sp)(su)\delta u + \delta p(\rho)], \tag{15}$$

$$\Pi = \mu \delta u + (su)(sp)\hat{w} + (s\tau)p'(sp)\delta(\rho u). \tag{16}$$

Основные искомые функции $\rho > 0$, u , а также τ определены на ω_h , а j , w , \hat{w} , Π , μ – на ω_h^* .

В [17] были построены две нестандартные пространственные аппроксимации КГД уравнений (11)–(13), диссипативные по энергии (их обобщения на многомерный случай даны в [18]). В сочетании с явным методом Эйлера по времени первая из них (схема А) имеет вид

$$\delta_t \rho + \delta^* j = 0, \quad \delta_t(\rho u) + \delta^*(jsu - \Pi) + s^*[(sp)\delta h(\rho)] = 0, \tag{17}$$

$$j = (sp)su - (sp)w, \quad (sp)w = [(\tau \partial_x)_h(\rho u)]su + (sp)\hat{w}, \quad \hat{w} = (s\tau)[(su)\delta u + \delta h(\rho)], \tag{18}$$

$$\Pi = \mu \delta u + (su)(sp)\hat{w} + p'(sp)(\tau \partial_x)_h(\rho u), \tag{19}$$

$$(\tau \partial_x)_h(\rho u) = \left(s \frac{\tau}{h'(\rho)} \right) \{ [\delta h(\rho)]su + p'(sp)\delta u \}. \tag{20}$$

Здесь $h(\rho) = \int_{r_0}^{\rho} \frac{p'(r)}{r} dr$ (с некоторым $r_0 > 0$) – энтальпия, причем $h'(\rho) = p'(\rho)/\rho$. В изэнтропическом случае $p(\rho) = p_1 \rho^\gamma$ с $p_1 > 0$, $\gamma > 1$ и можно взять $r_0 = 0$; тогда $h(\rho) = \gamma p(\rho)/[(\gamma - 1)\rho]$ и $h'(\rho) = \gamma p(\rho)/\rho^2$.

Обратим внимание на нестандартные зависящие от $h(\rho)$ дискретизации $\partial_x p(\rho)$ в (17), (19) и $\tau \partial_x(\rho u)$ в (18), (19) согласно (20).

Схема Б со второй из аппроксимаций имеет вид

$$\delta_t \rho + \delta^* j = 0, \quad \delta_t(\rho u) + \delta^*(jsu + sp - \Pi) = 0,$$

$$j = (s_p \rho)su - (s_p \rho)w, \quad (s_p \rho)w = (s_p \rho)\hat{w} + \tau(su)\delta(\rho u), \quad (s_p \rho)\hat{w} = \tau[(s_p \rho)(su)\delta u + \delta p],$$

$$\Pi = \mu \delta u + (su)(s_p \rho)\hat{w} + \tau p'(\rho)\delta(\rho u),$$

Здесь, например, $\tau = \tau(sp, su)$ на ω_h^* .

В схеме Б наряду с обычными усреднениями sr , su применяются нестандартные усреднения ρ и $p'(\rho)$, зависящие от h :

$$s_{\rho}\rho = \frac{p(\rho_-; \rho_+)}{h(\rho_-; \rho_+)} = \begin{cases} \frac{p(\rho_+) - p(\rho_-)}{h(\rho_+) - h(\rho_-)} & \text{при } \rho_+ \neq \rho_-, \\ \rho_- & \text{при } \rho_+ = \rho_-, \end{cases}$$

$$\widetilde{p'(\rho)} = (s\rho)h(\rho_-; \rho_+),$$

где $\rho_{\pm, k-1/2} = \rho_{k-1/2 \pm 1/2}$. Кроме того, $g(\alpha; \beta)$ – разделенная разность функции $g \in C^1(0, +\infty)$:

$$g(\alpha; \beta) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \text{при } \alpha \neq \beta, \quad g(\alpha; \alpha) = g'(\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

В изэнтропическом случае введенные усреднения принимают вид

$$s_{\rho}\rho = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_+^{\gamma} - \rho_-^{\gamma}}{\rho_+^{\gamma-1} - \rho_-^{\gamma-1}}, \quad \widetilde{p'(\rho)} = \frac{\gamma p_1}{\gamma - 1} \frac{\rho_- + \rho_+}{2} \frac{\rho_+^{\gamma-1} - \rho_-^{\gamma-1}}{\rho_+ - \rho_-} \quad \text{при } \rho_- \neq \rho_+. \quad (21)$$

В частном случае $\gamma = 2$ (случай уравнений мелкой воды) они становятся стандартными: $s_{\rho}\rho = sr$, $\widetilde{p'(\rho)} = 2p_1sr$. На практике во избежание потери точности при малых $|\rho_+/\rho_- - 1| < \varepsilon_0$ вместо указанных формул используются квадратурные формулы для их интегральных представлений, например, формула парабол. В случае усреднений (21) эта формула принимает вид

$$s_{\rho}\rho = \int_0^1 \left[\rho_-^{\gamma-1} + \xi(\rho_+^{\gamma-1} - \rho_-^{\gamma-1}) \right]^{1/(\gamma-1)} d\xi \approx \frac{1}{3} s\rho + \frac{2}{3} [s(\rho^{\gamma-1})]^{1/(\gamma-1)},$$

$$\widetilde{p'(\rho)} = \gamma p_1 (s\rho) \int_0^1 [\rho_- + \xi(\rho_+ - \rho_-)]^{\gamma-2} d\xi \approx \gamma p_1 (s\rho) \left[\frac{1}{3} s(\rho^{\gamma-2}) + \frac{2}{3} (s\rho)^{\gamma-2} \right],$$

который нестандартен, но несущественно сложнее простейших усреднений.

Схему (14)–(16) линеаризуем на постоянном решении $\rho_* \equiv \text{const} > 0$, $u_* \equiv \text{const}$. Пусть $c_* = \sqrt{p'(\rho_*)}$ – фоновая скорость звука, а $\tau_* = \tau(\rho_*, u_*)$, $\mu_* = \mu(\rho_*, u_*)$. Запишем решение схемы в виде $\rho = \rho_*(1 + \tilde{\rho})$, $u = u_* + c_*\tilde{u}$, отбросим члены второго порядка малости по отношению к масштабированным (безразмерным) возмущениям $\tilde{\rho}$, \tilde{u} и получим линеаризованную схему

$$\delta_t \tilde{\rho} + u_* \delta \tilde{\rho} + c_* \delta \tilde{u} - \tau_* (u_*^2 + c_*^2) \delta^* \delta \tilde{\rho} - 2\tau_* u_* c_* \delta^* \delta \tilde{u} = 0, \quad (22)$$

$$\delta_t \tilde{u} + c_* \delta \tilde{\rho} + u_* \delta \tilde{u} - 2\tau_* u_* c_* \delta^* \delta \tilde{\rho} - \left[\frac{\mu_*}{\rho_*} + \tau_* (u_*^2 + c_*^2) \right] \delta^* \delta \tilde{u} = 0. \quad (23)$$

Пусть коэффициент вязкости задается обычной КГД-формулой $\mu = \alpha_S \tau(\rho, u) \rho p'(\rho)$, где $\alpha_S \geq 0$ – параметр. Тогда $\mu_* = \alpha_S \tau_* \rho_* c_*^2$. Положив $c_0 = c_*$, можно схему (22), (23) переписать в векторном виде (1) с

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} M & 1 \\ 1 & M \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} M^2 + 1 & 2M \\ 2M & \alpha_S + M^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где $M = u_*/c_*$ (при этом $|M|$ – число Маха). Полученная схема имеет прямое отношение к линеаризованной баротропной КГД системе уравнений (см. [4], [6]).

Линеаризации на постоянном решении схем А и Б имеют такой же вид.

Отметим, что первая формула (4) на практике обычно берется в виде

$$\Delta t = \beta h / (c_* + |u_*|), \quad \text{т.е. с } \tilde{\beta} = \beta / (|M| + 1),$$

где β – число Куранта. Вторую формулу (4) перепишем в модифицированном виде:

$$\tau = \hat{\alpha} h / (c_* + |u_*|), \quad \text{т.е. с } \alpha = \hat{\alpha} / (|M| + 1).$$

Подобная формула использовалась в [11].

Теорема 2. Рассмотрим схему (22), (23), т.е. (1), (4), (24).

1. Для нее необходимое условие L^2 -диссипативности (7) принимает вид

$$\beta \leq 2 \min \left\{ \hat{\alpha}, \frac{\hat{\alpha}_{\text{opt}}^2}{\hat{\alpha}} \right\}, \quad (25)$$

где

$$\hat{\alpha}_{\text{opt}} = \hat{\alpha}_{\text{opt}}(|M|, \alpha_S) = \frac{|M|+1}{2} \left/ \left[\frac{\alpha_S}{2} + M^2 + 1 + \sqrt{\left(\frac{\alpha_S}{2}\right)^2 + 4M^2} \right]^{1/2} \right.$$

В случае $\alpha_S = 0$ правая часть этого условия максимальна, а само условие становится не только необходимым, но и достаточным, и упрощается до

$$\beta \leq \min\{2\hat{\alpha}, 1/(2\hat{\alpha})\}. \quad (26)$$

2. Достаточное условие L^2 -диссипативности (8) выполнено при

$$\beta \leq 2 \left(\frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha}_{\text{opt}}^2} \right)^{-1}. \quad (27)$$

Доказательство. Матрицы A , B в (24) вещественны и симметричны. При этом

$$A \geq 0, \quad \lambda_{\max}(A) = \frac{\alpha_S}{2} + M^2 + 1 + \sqrt{\left(\frac{\alpha_S}{2}\right)^2 + 4M^2}, \quad A = B^2 + D, \quad D = \text{diag}\{0, \alpha_S\} \geq 0.$$

Поэтому с помощью замечаний 1.1, 1.2 заключаем, что необходимое условие (7) принимает вид (25), а с помощью замечания 1.3 получаем, что достаточное условие (8) выполнено при условии (27).

Кроме того, при $\alpha_S = 0$ имеем $B^2 = A$, $[A, B] = 0$ и, значит, неравенство (6) сводится к

$$\tilde{\beta} \left(2\sigma\alpha A + \frac{1-\sigma}{2\alpha} I \right) \leq I \quad \forall 0 < \sigma \leq 1.$$

Оно эквивалентно двум неравенствам: $\tilde{\beta} \leq 1/[2\alpha\lambda_{\max}(A)]$ с $\lambda_{\max}(A) = (|M|+1)^2$ и $\tilde{\beta} \leq 2\alpha$, т.е. неравенству (26).

Обратим внимание на то, что при $\alpha_S > 0$ величина $\hat{\alpha}_{\text{opt}}$ возрастает по $|M|$ (как нетрудно проверить) и стремится к $1/2$ при $|M| \rightarrow \infty$. Поэтому член $\hat{\alpha}_{\text{opt}}^2/\hat{\alpha}$ в условии (25) и правая часть условия (27) *возрастают* по $|M|$ и стремятся к $1/(4\hat{\alpha})$ и $1/[2\hat{\alpha} + (2\hat{\alpha})^{-1}]$ соответственно при $|M| \rightarrow \infty$, и в пределе при $|M| \rightarrow \infty$ условие (25) снова переходит в (26).

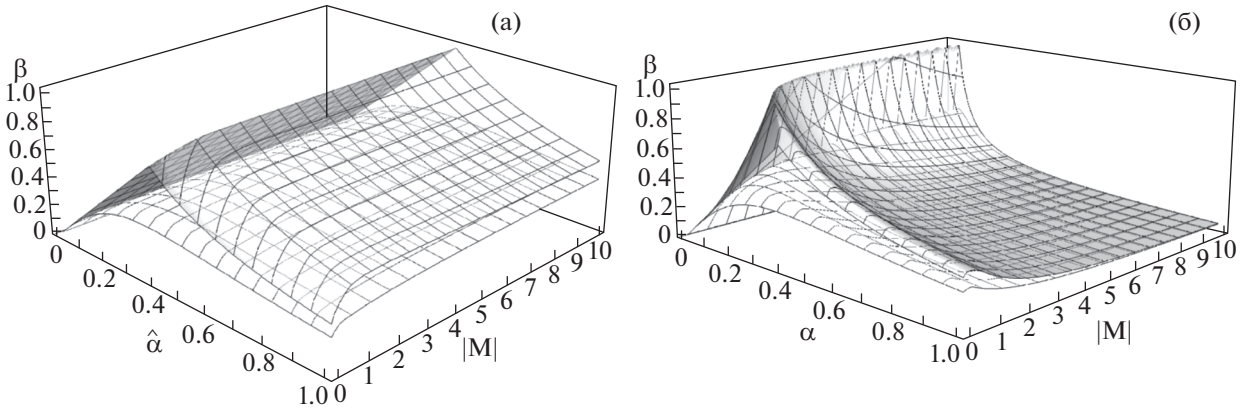
Очевидно, что правые части условий (25) и (27) максимальны при $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_{\text{opt}}$ и равны соответственно $2\hat{\alpha}_{\text{opt}}$ и $\hat{\alpha}_{\text{opt}}$; при этом

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha_S+1}} \leq \frac{|M|+1}{2\sqrt{\alpha_S+(|M|+1)^2}} \leq \hat{\alpha}_{\text{opt}} \leq \frac{|M|+1}{2 \min\{\sqrt{\alpha_S+M^2+1}, \sqrt{\alpha_S/2+(|M|+1)^2}\}} \leq \frac{1}{2}.$$

Существенно, что $\hat{\alpha}_{\text{opt}}$ лежит в сегменте $[1/(2\sqrt{\alpha_S+1}), 1/2]$, не зависящем от $|M|$.

Если вместо указанной выше формулы $\tau_* = \hat{\alpha}h/(c_* + |u_*|)$ использовать стандартную $\tau_* = \alpha h/c_*$, то в условиях (25) и (27) следует заменить $\hat{\alpha}$ на $\alpha(|M|+1)$. При этом при $\alpha_S > 0$ значение $\alpha_{\text{opt}} = \hat{\alpha}_{\text{opt}}/(|M|+1)$ станет убывать по $|M|$ и стремиться к 0 при $|M| \rightarrow \infty$, что неудобно на практике.

В типичном случае $\alpha_S = 1$ правые части условий (25) и (27) (верхняя и нижняя поверхности) представлены на фиг. 1а. Результаты замены в них $\hat{\alpha}$ на $\alpha(|M|+1)$ представлены на фиг. 1б; наблюдаются негативные изменения в графиках.



Фиг. 1. Правые части условий (25) и (27) (верхняя и нижняя поверхности) при $\alpha_S = 1$ (а). Они же после замены $\hat{\alpha}$ на $\alpha(|M| + 1)$ (б).

При $M = 0$, т.е. $u_* = 0$, условие (25) переходит в

$$\beta \leq \min\{2\alpha, [2\alpha(\alpha_S + 1)]^{-1}\},$$

полученное в [13] с помощью прямого анализа условия (9) и являющееся критерием (и необходимым, и достаточным условием).

Обратимся к КГДД системе. С учетом указанных выше упрощений ей отвечает упрощенная линейризованная схема (22), (23), а именно, схема (1) с теми же y , B и иной A :

$$y = \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} M & 1 \\ 1 & M \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & M \\ M & \alpha_S + M^2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Теорема 3. Рассмотрим схему (1), (4), (28).

1. Для нее необходимое условие L^2 -диссипативности (7) принимает вид

$$\beta \leq \min \left\{ \frac{2\hat{\alpha}\alpha_S}{q(\alpha_S, M) + \sqrt{q^2(\alpha_S, M) - \alpha_S(M^2 - 1)^2}}, \frac{(|M| + 1)^2}{2\hat{\alpha}\lambda_{\max}(A)} \right\}, \quad (29)$$

где $q(\alpha_S, M) = [(M^2 - 1)^2 + \alpha_S(M^2 + 1)]/2$ и

$$\lambda_{\max}(A) = \frac{\alpha_S + M^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_S + M^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha_S}. \quad (30)$$

2. Достаточное условие L^2 -диссипативности (10) получается из (29) в результате замены β на 2β .

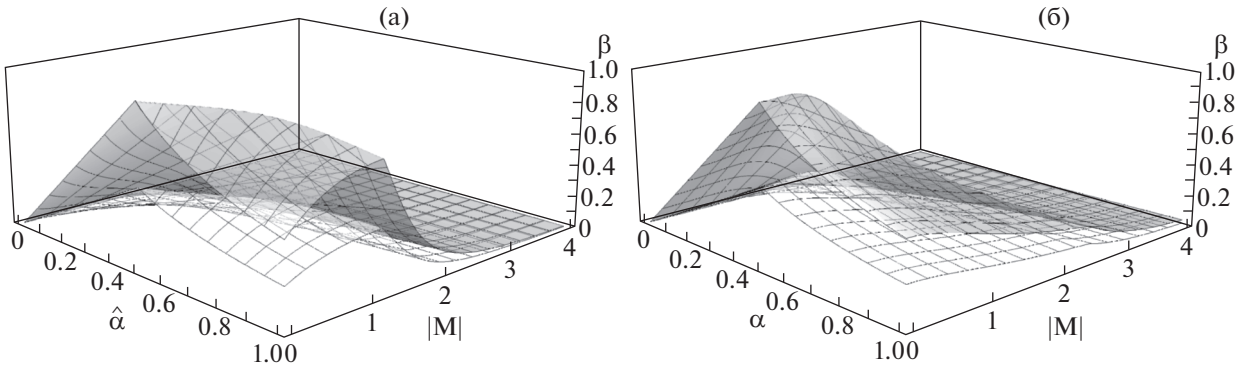
Доказательство. Матрицы A , B в (28) вещественны и симметричны. Легко проверяются свойство $A \geq 0$ и формула (30). С помощью замечания 1.1 первое неравенство (7) принимает вид $\tilde{\beta} \leq 1/[2\alpha\lambda_{\max}(A)]$.

Анализ второго неравенства (7) сложнее. Положив $\zeta = \tilde{\beta}/(2\alpha)$, перепишем его в виде

$$A - \zeta B^2 = \begin{pmatrix} 1 - \zeta(M^2 + 1) & M(1 - 2\zeta) \\ M(1 - 2\zeta) & \alpha_S + M^2 - \zeta(M^2 + 1) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Это неравенство эквивалентно неотрицательности диагональных элементов и определителя матрицы $A - \zeta B^2$, т.е. неравенствам

$$\zeta \leq \frac{1}{M^2 + 1}, \quad \zeta \leq \frac{\alpha_S + M^2}{M^2 + 1}, \quad (31)$$



Фиг. 2. Правая часть условия (29) и его половина (верхняя и нижняя поверхности) при $\alpha_S = 1$ (а). Они же после замены $\hat{\alpha}$ на $\alpha(|M| + 1)$ (б).

$$\det(A - \zeta B^2) = p_2(\zeta) \equiv (M^2 - 1)^2 \zeta^2 - [(M^2 - 1)^2 + \alpha_S(M^2 + 1)]\zeta + \alpha_S \geq 0. \tag{32}$$

При $|M| = 1$ и $\alpha_S > 0$ последнее неравенство означает, что $\zeta \leq 1/2$, а это следует из (31).

Пусть $|M| \neq 1$. Заметим, что

$$p_2\left(\frac{1}{M^2 + 1}\right) = -\left(\frac{(M^2 - 1)M}{M^2 + 1}\right)^2 \leq 0, \quad p_2\left(\frac{\alpha_S + M^2}{M^2 + 1}\right) = -\left(\frac{(M^2 + 2\alpha_S - 1)M}{M^2 + 1}\right)^2 \leq 0.$$

Поэтому с учетом (31) неравенство (32) означает, что

$$\zeta \leq \zeta_- = \frac{\alpha_S / (M^2 - 1)^2}{\zeta_B + \sqrt{\zeta_B^2 - \alpha_S / (M^2 - 1)^2}}, \quad \zeta_B := \frac{1}{2} \left(1 + \alpha_S \frac{M^2 + 1}{(M^2 - 1)^2} \right),$$

где ζ_- и ζ_B – меньший из корней и вершина квадратного трехчлена $p_2(\zeta)$ в (32). Отсюда и вытекает неравенство (29).

Если вместо указанной выше формулы $\tau_* = \hat{\alpha}h / (c_* + |u_*|)$ использовать стандартную $\tau_* = \alpha h / c_*$, то опять в условии (29) следует заменить $\hat{\alpha}$ на $\alpha(|M| + 1)$.

В типичном случае $\alpha_S = 1$ правая часть условия (29) (верхняя поверхность) и его половина – в соответствии с теоремой 3, п. 2 (нижняя поверхность) представлены на фиг. 2а. Результаты замены в них $\hat{\alpha}$ на $\alpha(|M| + 1)$ представлены на фиг. 2б; возникающие различия опять существенны. Графики достаточно быстро стремятся к 0 с ростом $|M|$; это вполне соответствует тому, что КГДД система изначально не предназначена для расчета течений с большими числами Маха. Сами же полученные выше результаты представляют интерес и при умеренных числах Маха.

При $M = 0$, т.е. $u_* = 0$, условие (29) переходит в условие

$$\beta \leq \min\{2\alpha \min\{\alpha_S, 1\}, [2\alpha \max\{\alpha_S, 1\}]^{-1}\},$$

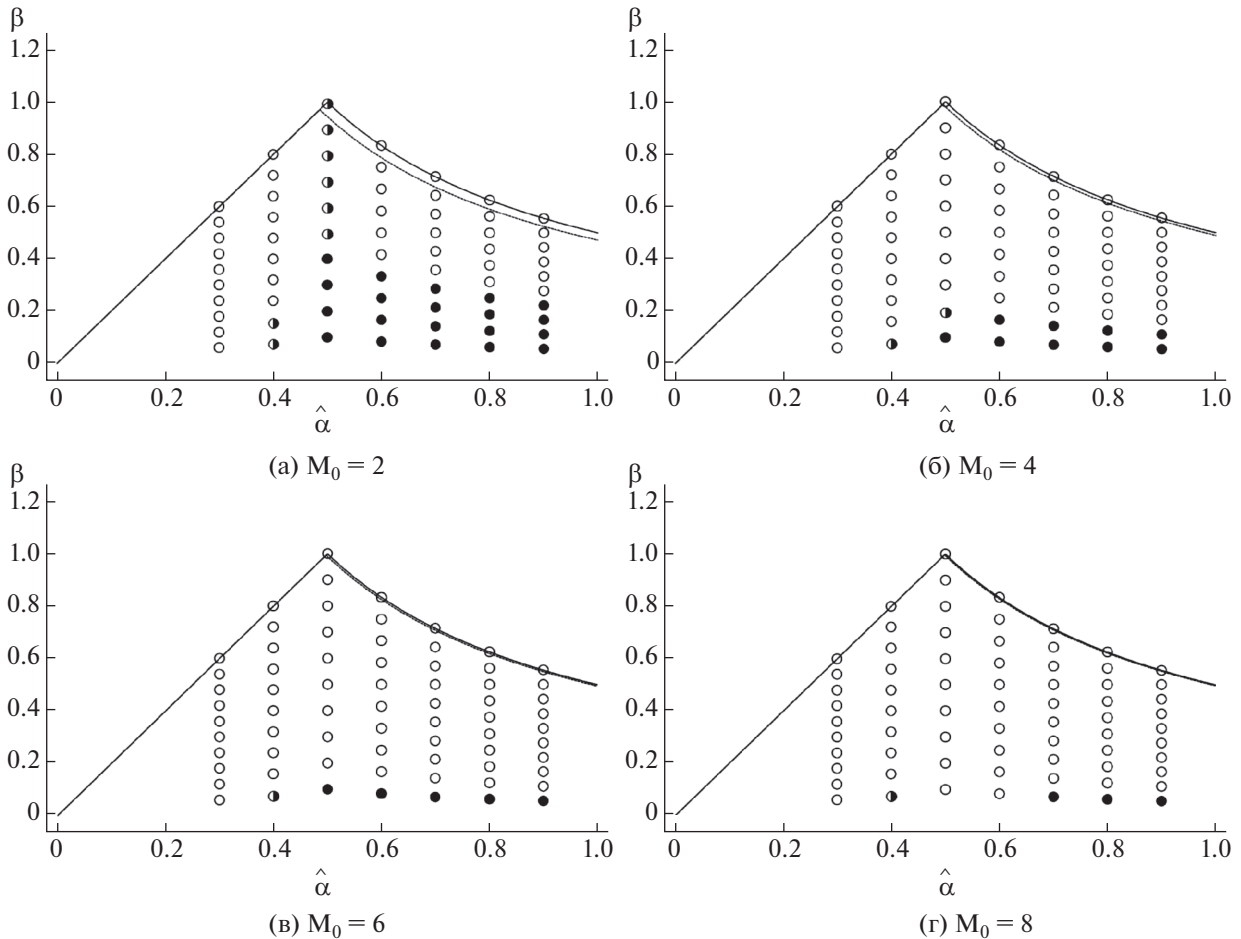
полученное в [13] с помощью прямого анализа условия (9) и являющееся критерием.

Отметим, что при $\alpha_S = 0$ схема (1), (4), (28) неустойчива (правая часть (29) равна 0) в отличие от схемы (1), (24).

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Численные эксперименты выполнены для модельных уравнения состояния $p(\rho) = \rho^\gamma$ с $\gamma = 5/3$ и задачи Римана с начальными данными

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0.5, & x > 0, \end{cases} \quad u_0(x) = \begin{cases} U, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{33}$$



Фиг. 3. Практический анализ устойчивости для разных M_0 в зависимости от $\hat{\alpha}$ при $\tau = \hat{\alpha}h/(|u| + c_s)$ для схемы стандартного типа.

где $U = \sqrt{\gamma}M_0$, M_0 – число Маха при $x < 0$. Задача описывает набегание движущейся массы газа на покоящуюся вдвое менее плотную. В течении между ними возникает слой газа со значением плотности больше 1 и скоростью из $(0, U)$; числа Маха лежат от 0 до M_0 .

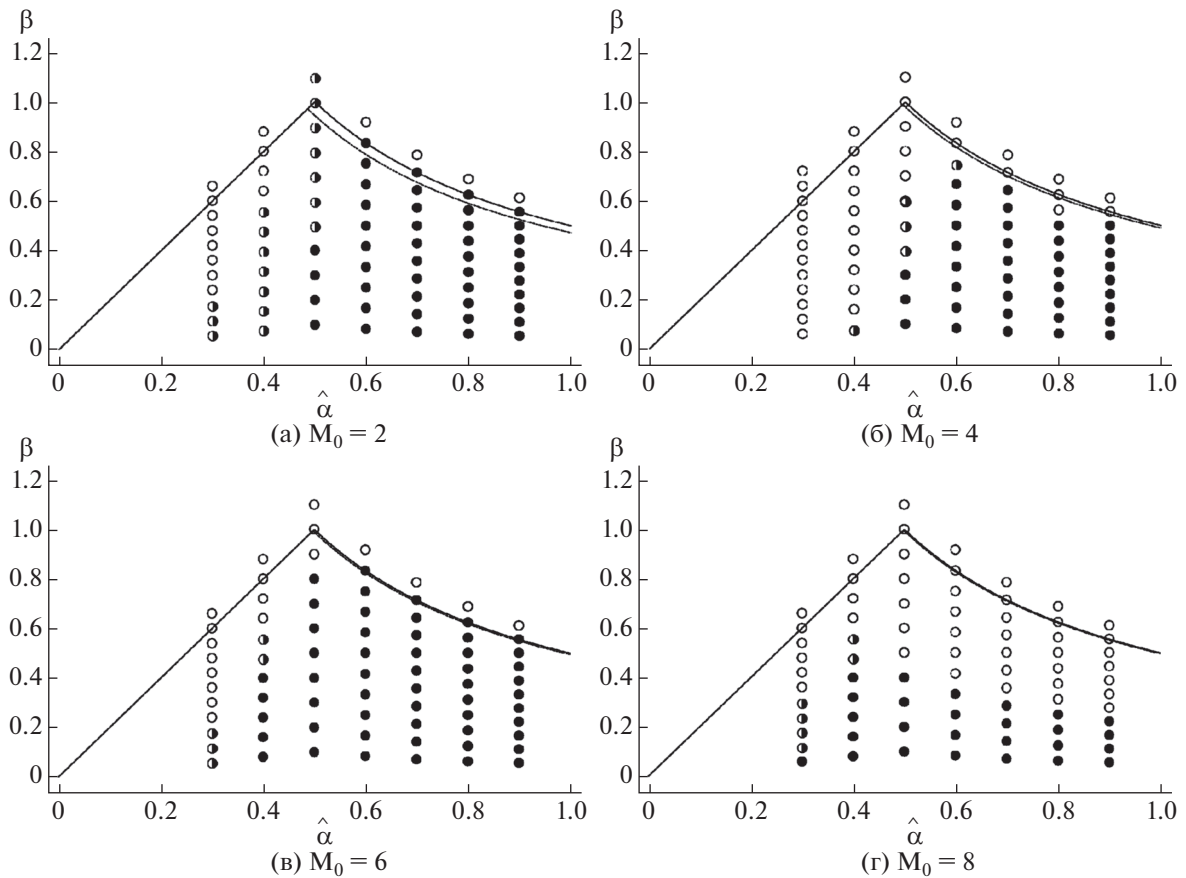
Задача решалась с применением КГД-системы для $M_0 = 2, 4, 6, 8$ на отрезке $[-X/2, X/2]$ с $X = 0.6$ и шагом $h = 0.002$ при $0 \leq t \leq t_{фин}$ с $t_{фин} = 0.05$. Бралась модифицированная формула $\tau = \hat{\alpha}h/(|u| + c_s(\rho))$, где $c_s(\rho) = \sqrt{p'(\rho)}$ – скорость звука, и $\alpha_s = 1$.

Результаты расчетов отражены на фиг. 3–5 для схемы стандартного типа и схем А и Б соответственно. На них пунктирной и сплошной линией изображены графики правых частей необходимых условий (25) при $M = M_0$ и (26) соответственно. Различие между ними невелико, уменьшается с ростом M_0 и визуально исчезает при $M_0 = 8$.

Тестировались значения $\hat{\alpha} = 0.3, 0.4, \dots, 0.9$ и $\beta = 0.1k \min\{2\hat{\alpha}, 1/(2\hat{\alpha})\}$, $k = 1, 2, \dots, 10$ (и $k = 11$ для схем А и Б) в долях от его максимального значения в условии (26).

Для анализа качества численных решений было решено использовать величину ϵ_V – отклонение их относительной вариации от 1 (на момент времени $t = t_{фин}$):

$$\epsilon_V = \max \left\{ \left| \frac{V(\rho)}{V_{*p}} - 1 \right|, \left| \frac{V(u)}{V_{*u}} - 1 \right| \right\} \quad \text{с} \quad V(y) = \sum_{i=1}^N |y_i - y_{i-1}|.$$



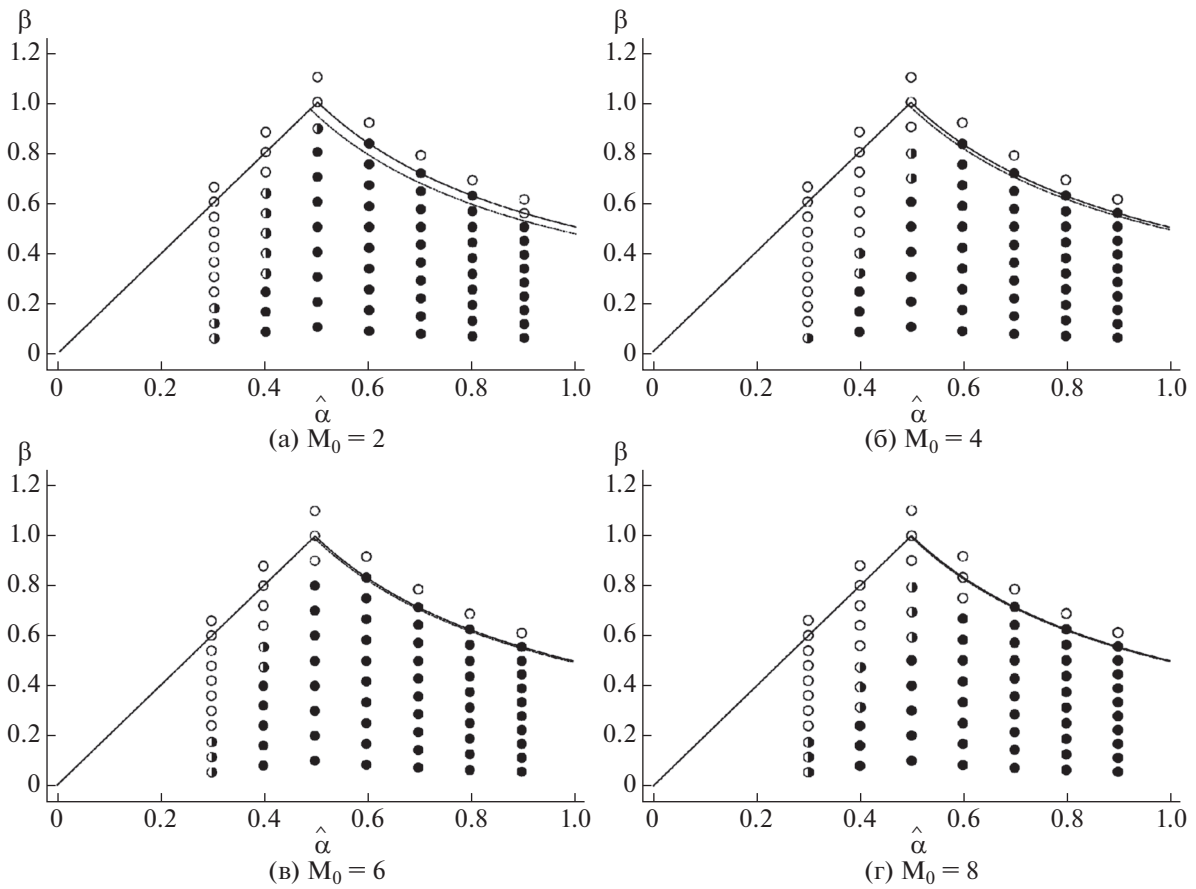
Фиг. 4. Практический анализ устойчивости для разных M_0 в зависимости от $\hat{\alpha}$ при $\tau = \hat{\alpha}h/(|u| + c_s)$ для схемы А.

Здесь $V(y)$ – вариация функции y , определенной на сетке $x_i = -X/2 + ih$, $0 \leq i \leq N$, а $V_{*p} = |\rho_{\max} - 1| + |\rho_{\max} - 0.5|$ с $\rho_{\max} = \max_{0 \leq i \leq N} \rho_i$ и $V_{*u} = U$ – “точные” вариации ρ и u .

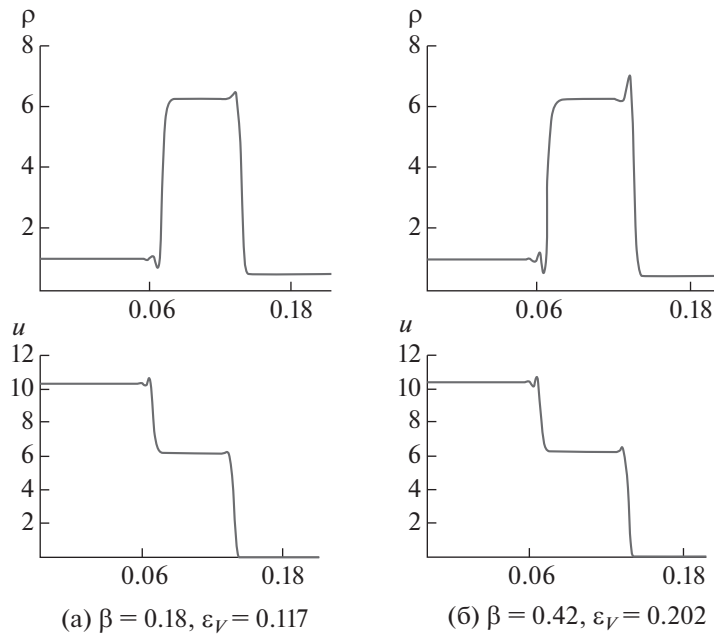
На фигурах точки с $\epsilon_V \in [0, 0.1], (0.1, 0.2], (0.2, \infty]$ помечены закрашенными, полужакрашенными, незакрашенными кружками (окружностями) соответственно; здесь $\epsilon_V = \infty$ означает, что расчет не был завершён из-за переполнения или появления отрицательных значений ρ . Условно можно считать, что они отвечают устойчивым, промежуточным, неустойчивым решениям соответственно, поскольку графики первых содержат только незначительные одиночные впадинки/пички, к тому же (как было проверено) не растущие во времени и тем самым вполне приемлемые на практике (в сложных расчетах), а графики последних – наоборот, уже заметные осцилляции. Забегая вперед, отметим, что довольно типичная ситуация отражена на фиг. 6. Подчеркнем, что при подсчете вариации учитывается амплитуда каждой впадинки/пичка, причем дважды, так что значение $\epsilon_V = 0.1$ не так уж велико.

Для схемы стандартного типа (фиг. 3) устойчивые результаты намного (кратно) хуже отвечающих необходимому условию (26), причем соответствие ухудшается с ростом M_0 и для $M_0 = 8$ становится минимальным (или вовсе исчезает) в зависимости от $\hat{\alpha}$. При этом при $\hat{\alpha} \geq 0.5$ соответствие лучше, чем при $\hat{\alpha} = 0.4, 0.3$.

Для схем А и особенно Б результаты существенно лучше. Для схемы А (фиг. 4) устойчивые результаты хорошо соответствуют необходимому условию (26) при $\hat{\alpha} \geq 0.6$ для $M_0 = 2, 4, 6$ (также при $\hat{\alpha} = 0.5$ для $M_0 = 6$). Для $M_0 = 8$ соответствие хуже. Соответствие также намного хуже при $\hat{\alpha} = 0.5, 0.4$ и особенно 0.3 .



Фиг. 5. Практический анализ устойчивости для разных M_0 в зависимости от $\hat{\alpha}$ при $\tau = \hat{h}/(|u| + c_s)$ для схемы Б.



Фиг. 6. Численные решения для $M_0 = 8, \hat{\alpha} = 0.3, \beta = 0.18$ и 0.42 для $t = t_{\text{фин}}$ по схеме Б.

Таблица 1. Значения ϵ_V для $M_0 = 8$ при различных $\hat{\alpha}$ и $\beta = 0.1k \min\{2\hat{\alpha}, 1/(2\hat{\alpha})\}$ для схемы А

$\hat{\alpha}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$
0.2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0.3	9.6E-02	1.0E-01	1.1E-01	1.3E-01	1.4E-01	1.5E-01	—	—	—	—	—
0.4	2.7E-02	3.3E-02	4.9E-02	6.4E-02	8.5E-02	1.0E-01	1.2E-01	—	—	—	—
0.5	5.0E-03	7.6E-03	1.1E-02	2.1E-02	—	—	—	—	—	—	—
0.6	2.3E-05	1.1E-04	2.7E-04	7.8E-04	—	—	—	—	—	—	—
0.7	1.7E-10	7.7E-09	1.1E-07	7.4E-07	—	—	—	—	—	—	—
0.8	4.3E-15	4.1E-15	3.1E-14	5.7E-12	—	—	—	—	—	—	—
0.9	5.6E-15	4.1E-15	4.1E-15	4.7E-15	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 2. Значения ϵ_V для $M_0 = 8$ при различных $\hat{\alpha}$ и $\beta = 0.1k \min\{2\hat{\alpha}, 1/(2\hat{\alpha})\}$ для схемы Б

$\hat{\alpha}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$
0.2	3.2E-01	3.4E-01	3.7E-01	—	—	—	—	—	—	—	—
0.3	9.7E-02	1.1E-01	1.2E-01	1.3E-01	1.6E-01	1.6E-01	2.0E-01	2.2E-01	—	—	—
0.4	2.3E-02	3.0E-02	3.5E-02	4.1E-02	6.2E-02	6.8E-02	9.6E-02	9.9E-02	1.0E-01	—	—
0.5	2.8E-03	6.1E-03	8.8E-03	1.1E-02	2.0E-02	3.0E-02	4.2E-02	5.5E-02	—	—	—
0.6	1.4E-05	6.4E-05	2.0E-04	4.4E-04	9.5E-04	1.4E-03	2.9E-03	3.9E-03	—	—	—
0.7	4.5E-11	3.1E-09	5.0E-08	3.6E-07	1.9E-06	5.9E-06	1.6E-05	4.1E-05	8.9E-05	1.7E-04	4.7E-01
0.8	4.4E-15	4.4E-15	1.1E-14	1.6E-12	7.8E-11	1.2E-09	9.7E-09	5.4E-08	2.1E-07	6.9E-07	7.9E-01
0.9	5.1E-15	4.4E-15	4.4E-15	4.4E-15	1.5E-14	7.3E-14	2.5E-14	1.2E-12	2.2E-11	2.3E-10	1.1

Для схемы Б (фиг. 5) устойчивые результаты очень хорошо соответствуют необходимому условию (26) при $\hat{\alpha} \geq 0.6$ для всех $M_0 = 2, 4, 6, 8$ (также при $\hat{\alpha} = 0.5$ для $M_0 = 2, 6$). Но это соответствие резко падает с уменьшением $\hat{\alpha}$ от 0.5 и становится плохим при $\hat{\alpha} = 0.3$.

Довольно типичные численные решения с $\epsilon_V \approx 0.1$ и $\epsilon_V \approx 0.2$ для $M_0 = 4$ при $\hat{\alpha} = 0.4$ для $t = t_{\text{фин}}$ по схеме Б показаны на фиг. 6. В случае $\epsilon_V \approx 0.1$ заметны незначительные одиночные впадинки/пички, а в случае $\epsilon_V \approx 0.2$ наблюдаются уже заметные осцилляции.

Дополнительно для примера в табл. 1 и 2 приведены значения ϵ_V для $M_0 = 8$ при различных $\hat{\alpha}$ и $\beta = 0.1k \min\{2\hat{\alpha}, 1/(2\hat{\alpha})\}$ для схем А и Б соответственно. Прочеркам соответствует разрушение численных решений к моменту $t = t_{\text{фин}}$. Это более детальная информация, чем на фиг. 4г и 5г соответственно. Обратим внимание на то, что ϵ_V не убывает по β при каждом $\hat{\alpha}$ — это естественно. При этом при $\hat{\alpha} = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ происходит резкий финальный скачок от малых значений ϵ_V к большим (для схемы Б) или к ситуации с разрушением решения (для схемы А и частично Б). Кроме того, ϵ_V быстро убывает по $\hat{\alpha}$ при каждом k (с частичным исключением $k = 0.9$ в табл. 2), что довольно неожиданно. В том числе при каждом k значения ϵ_V при $\hat{\alpha} = 0.7, 0.8, 0.9$ на несколько порядков меньше, чем при меньших $\hat{\alpha}$. Поэтому такие значения $\hat{\alpha}$ с успехом могут использоваться на практике.

Полученные результаты служат в пользу применения схем А и особенно Б с энергетически диссипативными дискретизациями по пространству.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.

3. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
4. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
5. *Злотник А.А.* О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Матем. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667–682.
6. *Злотник А.А.* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 325–337.
7. *Злотник А.А.* О построении квазигазодинамических систем уравнений и баротропной системе с потенциальной массовой силой // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.
8. *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184.
9. *Zlotnik A., Gavrilin V.* On a conservative finite-difference method for 1D shallow water flows based on regularized equations // In: Math. problems in meteorological modeling. Math. in Industry. V. 24. A. Bátkai, P. Csomós, A. Horányi, etc., eds. Cham: Springer, 2016. P. 16–31.
10. *Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E.* Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 6. P. 347–358.
11. *Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Истомина М.А.* Гидродинамические аспекты формирования спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках // Астрономический ж. 2018. Т. 95. № 1. С. 11–21.
12. *Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В.* Анализ устойчивости одной разностной схемы решения уравнений Сен–Венана в теории мелкой воды. В сб.: Примен. функц. анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ. 2013. С. 48–60.
13. *Zlotnik A., Lomonosov T.* On conditions for weak conservativeness of regularized explicit finite-difference schemes for 1D barotropic gas dynamics equations. In: Differential and difference equations with applications. Springer Proc. Math. & Statist. V. 230 Cham.: Springer, 2018. P. 635–647. См. также: <https://arxiv.org/abs/1803.09899>
14. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
15. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
16. *Злотник А.А., Ломоносов Т.А.* Об условиях L^2 -диссипативности линеаризованных явных КГД-разностных схем для уравнений одномерной газовой динамики // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 4. С. 375–380.
17. *Злотник А.А.* Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 10. С. 51–64.
18. *Злотник А.А.* О консервативных пространственных дискретизациях баротропной квазигазодинамической системы уравнений с потенциальной массовой силой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 301–317.