

УДК 519.632

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ТРЕХМЕРНОМ СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ¹⁾

© 2019 г. П. Н. Петров^{1,*}, С. Ю. Доброхотов^{1,**}

¹⁾ 117526 Москва, пр-т Вернадского, 101, ИПМех.;
141700 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия)

*e-mail: petr.petrov@phystech.edu

**e-mail: dobr@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 10.07.2018 г.

Построена асимптотика решения уравнения Гельмгольца в трехмерном слое переменной толщины с локализованной правой частью при условии отсутствия “ловушечных” состояний и выполнении асимптотических условий излучения на бесконечности. Волновая часть решения содержит конечное число мод. Полученная формула позволяет достаточно явно описать влияние формы источника на волновую часть решения. Библиограф. 33. Фиг. 3.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, асимптотические решения, трехмерный слой переменной толщины.

DOI: 10.1134/S0044466919030074

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается уравнение Гельмгольца в трехмерном слое переменной толщины с локализованной правой частью

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = F\left(\frac{x_1 - \xi_1}{\mu}, \frac{x_2 - \xi_2}{\mu}\right) g\left(\frac{z - z_0}{\mu}\right), \quad u|_{z=d_1(\mathbf{x})} = 0, \quad u|_{z=d_2(\mathbf{x})} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – горизонтальные декартовы координаты, ось z направлена вверх перпендикулярно плоскости \mathbb{R}_x^2 . Здесь задающие границу слоя функции $d_1(\mathbf{x}) \leq z \leq d_2(\mathbf{x})$ и задающие источник функции $F(x_1, x_2)$, $g(z)$ предполагаются гладкими функциями всех своих аргументов. Кроме того, предполагается, что $F(\mathbf{x})$, $g(z)$ быстро убывают на бесконечности. При этом $g(z)$ будем считать финитной функцией, $d_1(\mathbf{x}) < z_0 < d_2(\mathbf{x})$, так что носитель правой части лежит внутри слоя. Для простоты считаем, что скорость звука c и частота ω являются постоянными.

Предполагается, что в рассматриваемой задаче длина волны звука и вертикальный размер волновода – величины одного порядка, характерный продольный размер волновода много больше вертикального. Удобно перейти к безразмерным переменным с помощью замены $z = z'd_0$, $x_i = x'_i l_0$, где l_0 и d_0 – характерные продольный и поперечный размеры волновода соответственно. Уравнение в новых переменных примет вид

$$\left(h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2'^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + n^2 \right) u = f\left(\frac{x_1' - \xi_1'}{\mu'}, \frac{x_2' - \xi_2'}{\mu'}\right) g\left(\frac{z' - z_0'}{\mu''}\right), \quad (2)$$

$$u|_{z'=d_1(\mathbf{x}')} = 0, \quad u|_{z'=d_2(\mathbf{x}')} = 0,$$

¹⁾ Аналитическая часть работы выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 17-01-00644), вычислительная часть работы выполнена в рамках гос. задания (AAAA-A17-117021310377-1).

где $h = d_0/l_0$ – малый параметр, здесь для простоты приняты следующие обозначения:

$$n^2 = \frac{d_0^2}{\lambda^2}, \quad f\left(\frac{x_1 - \xi_1}{\mu}, \frac{x_2 - \xi_2}{\mu}\right)g\left(\frac{d_0z - z_0}{\mu}\right) = d_0^2 F\left(\frac{x_1' - \xi_1'}{\mu'}, \frac{x_2' - \xi_2'}{\mu}\right)g\left(\frac{z' - z_0'}{\mu''}\right),$$

$$d_1'(x') = \frac{d_1(x'l_0)}{d_0}, \quad d_2'(x') = \frac{d_2(x'l_0)}{d_0}, \quad \mu'' = \frac{\mu}{d_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{l_0}.$$

Для наглядности мы сначала опишем метод решения уравнения (2) с одним малым параметром h

$$\left(h^2 \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2\right)u = f\left(\frac{x_1 - \xi_1}{h}, \frac{x_2 - \xi_2}{h}\right)g\left(\frac{z - z_0}{h}\right), \tag{3}$$

а потом обсудим, как это уравнение обобщается для различных соотношений между параметрами μ и h .

Это уравнение встречается в задачах о распространении звука от источника в мелком море с неоднородным рельефом дна (см. [1], [2]). Следует отметить, однако, что часто в практических задачах дно является проницаемым для звуковых волн и, таким образом, распространение звука рассматривается в двухслойной (многослойной) среде (см. [1]–[4]). Существуют, однако, и классы задач, в которых дно можно считать полностью отражающим. Явление, когда нарушается прямолинейность распространения звука в горизонтальной плоскости, называется *горизонтальной рефракцией* (см. [1]–[7]) и играет значительную роль в формировании волновых полей в мелком море. Горизонтальная рефракция может быть вызвана как неоднородностями дна (см. [3], [4]), так и неоднородностями поля скорости звука в водном слое (см. [5]–[7]) (например, внутренними волнами). Задача о распространении звука в слое, одна из границ которого является неоднородной поверхностью, естественным образом возникает при моделировании распространения звука в мелком море. В подводной акустике развивается несколько методов решения уравнения Гельмгольца, которые могут быть использованы в случае однослойного волновода. Среди них можно отметить метод трехмерного параболического уравнения (см. [4], [8]–[10]), подход, основанный на трассировке лучей в трехмерном пространстве (например, [11]) или методе гауссовых пучков (см. [1], [12]), а также наиболее близкие данной работе методы, основанные на отделении вертикальной переменной и получении уравнений, описывающих изменение модовых амплитуд в горизонтальной плоскости (см. [3], [4], [13], [14]). Этот подход был впервые предложен в 70-е годы (см. [13]), где уравнения на модовые амплитуды решаются с помощью лучевой теории (в акустике океана этот подход известен как “вертикальные моды – горизонтальные лучи”). В дальнейшем для вычисления модовых амплитуд применялись, например, методы параболического уравнения (см. [14]–[16]) (впервые в задачах подводной акустики применен в [14]) и метод гауссовых пучков [17]. К уравнению Гельмгольца в слое сводятся также, например, задачи распространения света в оптических волноводах и задачи распространения радиоволн над поверхностью Земли.

Используемый нами метод, основанный на отделении вертикальной переменной, сводит трехмерную задачу в слое к двумерной во всем пространстве. Задача о коротковолновой асимптотике функции Грина для оператора Гельмгольца в \mathbb{R}^n изучалась многими авторами, в частности, Келлером [18], Бабичем и Булдыревым [19], [20] и Кучеренко [21]. Если показатель преломления не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$, то функция Грина вычисляется точно. В случае переменного показателя преломления строилась асимптотика функции Грина, для этого точное решение уравнения с постоянным показателем преломления, “замороженным” в точке источника, склеивалось с определенной вне малой окрестности этой точки лучевой асимптотикой. Если в правой части стоит функция источника, например, Гауссова экспонента, необходимо вычислять свертку этой функции с функцией Грина, что обычно является не вполне простой задачей.

Цель этой работы – построение асимптотических решений задачи (2). С помощью адиабатической редукции в операторной форме (см. [22]) и недавно развитого подхода в [23] в предположении отсутствия “ловушечных” состояний и выполнения условий излучения на бесконечности (типа условия Зоммерфельда) в работе строится асимптотическое решение сформулированной задачи при $1 \gg \mu \geq h$. В пределе $f(x_1, x_2)g(z) \rightarrow \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z)$ полученные формулы описывают

асимптотику функции Грина для рассматриваемого уравнения Гельмгольца, однако, в отличие от такой асимптотики, полученная формула позволяет достаточно явно описать влияние формы источника на волновую часть решения. Реализация полученных формул сводится к построению лучей (или траекторий в фазовом пространстве), концы которых определяют волновые фронты, и последующем восстановлении на них волнового поля с помощью достаточно эффективных формул. В этой работе мы уделяем основное внимание явным формулам и прикладным аспектам, рассуждения проводятся на уровне формальных асимптотических разложений. Далее для простоты мы рассматриваем слой, встречающийся в задачах подводной акустики, $d_2(\mathbf{x}) = 0$, $d_1(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x})$, $D(\mathbf{x}) < 0$.

2. АДИАБАТИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ К ПЛОСКИМ ЗАДАЧАМ

Пусть сначала $D(\mathbf{x}) = \text{const}$, тогда стандартный метод Фурье приводит к представлению в виде “разложения по вертикальным модам”

$$u(\mathbf{x}, z) = \sum_{v=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi v z}{D}\right) \psi_v(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где функции $\psi_v(\mathbf{x})$ удовлетворяют двумерным задачам

$$\left(h^2 \Delta + n^2 - \frac{(\pi v)^2}{D^2} \right) \psi_v(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \left(g(z), \sin\left(\frac{\pi v z}{D}\right) \right), \quad (5)$$

где v – натуральное число (номер моды). Здесь и далее круглые скобки обозначают скалярное произведение

$$(\phi(z), \psi(z)) = -\frac{2}{D} \int_D \phi(z) \psi(z) dz. \quad (6)$$

Если D зависит от \mathbf{x} , то представление (4), (5) обобщается следующим образом [22]:

$$u = \sum_v \hat{\chi}_v \psi_v(x), \quad \hat{L}_v \psi_v(x) = F(\mathbf{x}) \left(g(z), \sin\left(\frac{\pi v z}{D}\right) \right), \quad (7)$$

где

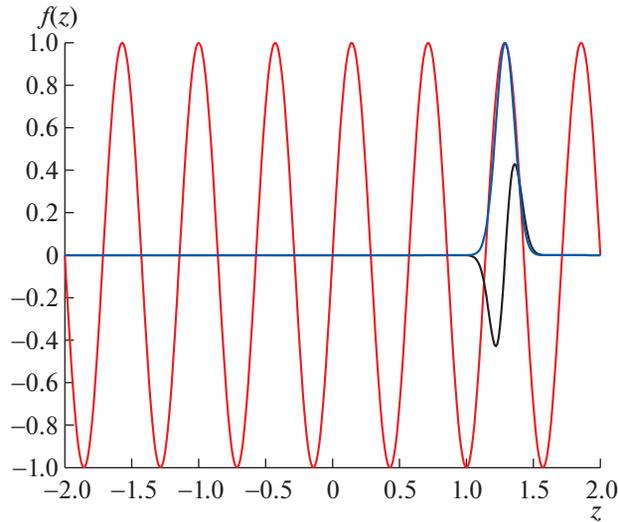
$$\hat{\chi}_v = \hat{\chi}_v \left(\overset{2}{x}, -i \overset{1}{h} \nabla_x, z, h \right), \quad \hat{L}_v = \hat{L}_v \left(\overset{2}{x}_i, -i \overset{1}{h} \nabla_x, h \right)$$

суть псевдодифференциальные операторы с символами $\chi_v = \chi_v(x, p, z, h)$, $L_v = L_v(x, p, h)$, цифры над оператором обозначают порядок действия этого оператора (см. [24], [27]). Функции χ_v , L_v предполагаются гладкими и допускают асимптотическое разложение по параметру h :

$$\begin{aligned} \chi_v &= \chi_v^0(x, p, z) + h \chi_v^1(x, p, z) + h^2 \chi_v^2(x, p, z), \\ L_v &= L_v^0(x, p) + h L_v^1(x, p) + h^2 L_v^2(x, p). \end{aligned} \quad (8)$$

В результате адиабатической редукции в операторной форме мы получили символы операторов $\hat{\chi}_v$ и \hat{L}_v с точностью до $O(h^2)$:

$$\begin{aligned} \hat{L}_v &= -h^2 \Delta + n^2 - \frac{(\pi v)^2}{D^2(\mathbf{x})} + ih \frac{(p, \nabla_x D(\mathbf{x}))}{D(\mathbf{x})} + O(h^2), \\ \hat{\chi}_v &= \sin\left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})}\right) + ih \frac{(p, \nabla_x D(\mathbf{x})) z^2}{2D(\mathbf{x})} \sin\left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})}\right) + O(h^2). \end{aligned} \quad (9)$$



Фиг. 1. Разные источники и модовая функция. Красным цветом изображена модовая функция $\sin\left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})}\right)$, синим цветом – функция источника $\exp\left(\frac{-(z - z_0)^2}{2h^2}\right)$, черным – функция источника $10z \exp\left(\frac{-(z - z_0)^2}{2h^2}\right)$. Из фигуры видно, как правая часть редуцированного двумерного уравнения зависит от формы источника. Заметим, что для источников некоторой формы скалярное произведение $\left(g\left(\frac{z - z_0}{h}\right), \chi_v^0\right)$ обращается в ноль.

Таким образом, задача в трехмерном слое (2) свелась к семейству задач для каждой моды в \mathbb{R}_x^2 :

$$\begin{aligned} & \left(h^2 \Delta - \frac{(\pi v)^2}{D(\mathbf{x})^2} + n^2 + ih \frac{(\rho, \nabla_x D(\mathbf{x}))}{D(\mathbf{x})} + O(h^2) \right) \psi_v(\mathbf{x}) = \\ & = f\left(\frac{x_1 - \xi_1}{h}, \frac{x_2 - \xi_2}{h}\right) \left(g\left(\frac{z - z_0}{h}\right), \sin\left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})}\right) \right). \end{aligned} \tag{10}$$

Подробный вывод уравнения (10) приведен в приложении (см. ниже).

Например, для $g(z) = \exp\left(\frac{-(z - z_0)^2}{2(h)^2}\right)$, скалярное произведение $(g(z), \chi_v^0)$ примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{D(\mathbf{x})} \int_{D(\mathbf{x})}^0 \sin\left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})}\right) e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2(h)^2}} = -\frac{h}{D(\mathbf{x})} e^{-\frac{(h v \pi)^2}{2 D^2(\mathbf{x})}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \\ & \times \left[\exp\left(-\frac{i v \pi z_0}{D(\mathbf{x})}\right) \left(\operatorname{Erfi}\left[\frac{h^2 v \pi - i D(\mathbf{x})(D(\mathbf{x}) - z_0)}{\sqrt{2} h D(\mathbf{x})}\right] - \operatorname{Erfi}\left[\frac{h^2 v \pi + i D(\mathbf{x}) z_0}{\sqrt{2} h D(\mathbf{x})}\right] \right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(\frac{i v \pi z_0}{D(\mathbf{x})}\right) \left(\operatorname{Erfi}\left[\frac{h^2 v \pi + i D(\mathbf{x})(D(\mathbf{x}) - z_0)}{\sqrt{2} h D(\mathbf{x})}\right] - \operatorname{Erfi}\left[\frac{h^2 v \pi - i D(\mathbf{x}) z_0}{\sqrt{2} h D(\mathbf{x})}\right] \right) \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что аргумент функции Erfi в (11) зависит от малого параметра h , поэтому в практических задачах для мод с номерами v такими, что $v \ll h^{-2}$, можно использовать асимптотическое представление функции Erfi :

$$\operatorname{Erfi}(z) = i + \frac{1}{\sqrt{\pi} z} e^{z^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right). \tag{12}$$

Формула (11) с учетом асимптотического представления функции Erfi примет следующий вид:

$$\left(\sin\left(\frac{\pi v z}{D(x)}\right), e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2h^2}} \right) = 2h^4 v \pi e^{-\frac{(h v \pi)^2}{2D^2(x)}} \left(\frac{e^{-\frac{z_0^2}{2h^2}}}{D^2(x) z_0^2} - \frac{\cos(v\pi) e^{-\frac{(D(x)-z_0)^2}{2h^2}}}{(D(x)-z_0)^2 z_0^2} \right) + o(h^4). \tag{13}$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА МАСЛОВА И “ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ” МОДЫ

Правые части в уравнениях (10) разумно представить в виде канонического оператора Маслова, чтобы для построения асимптотического решения воспользоваться развитой теорией в [23]. Функциям такого вида соответствует лагранжево многообразие (см., например, [25])

$$\Lambda = (p = \alpha, x = \xi, \alpha \in \mathbb{R}^2), \quad d\mu = dp_1 \wedge dp_2. \tag{14}$$

Тогда функцию $F_v\left(\frac{x_1 - \xi_1}{h}, \frac{x_2 - \xi_2}{h}\right)$ можно представить в виде

$$F_v\left(\frac{x_1 - \xi_1}{h}, \frac{x_2 - \xi_2}{h}\right) = \frac{h}{i} K_{(\Lambda, d\mu)}^h [A_v(\alpha)], \quad A_v(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F_v(y) e^{-i\alpha y} dy, \tag{15}$$

где $K_{(\Lambda, d\mu)}^h$ – канонический оператор Маслова [27].

Пусть главный символ $H_v(x, p) = L_v(x, p, 0)$ оператора \hat{L}_v не обращается в ноль при $(x, p) \in \Lambda$, т.е. $p^2 + \frac{(\pi v)^2}{D^2(\xi)} - n^2 \neq 0$, тогда согласно общим формулам из [26], [27] оператор \hat{L}_v обратим на функциях F_v :

$$\psi_v = \frac{h}{i} \hat{L}_v^{-1} K_{(\Lambda, d\mu)}^h [A_v(\alpha)] = \frac{h}{i} \left(K_{(\Lambda, d\mu)}^h \left[\frac{A_v(\alpha)}{H_v(\alpha, \xi)} \right] + O(h) \right). \tag{16}$$

Функции ψ_v быстро убывают и локализованы в окрестности точки $x = \xi$. При $H_v|_{\Lambda} \neq 0$ решение трехмерной задачи (2) представимо в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{h}{i} \left(K_{(\Lambda, d\mu)}^h \left[\frac{A(\alpha)}{H_v(\alpha, \xi)} \right] \sin\left(\frac{\pi v z}{D(x)}\right) + O(h) \right) \right] = \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi v z}{D(x)}\right) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{A_v(p) e^{\frac{i}{h} p(x-\xi)}}{H_v(p, \xi)} dp_1 dp_2 + O(h^2) \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Это представление носит формальный характер, нужно доказывать, что соответствующий ряд сходится, и при этом суммарная поправка будет по-прежнему величиной порядка $O(h^2)$. Доказательство довольно объемное, здесь не приводится.

4. “ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ” МОДЫ И ИХ АСИМПТОТИКИ

Формула (16) не работает в некоторой окрестности подмножества $L_0 \in \Lambda$, $L_0 = \left[p^2 + \frac{(\pi v)^2}{D^2(\xi)} - n^2 = 0 \right]$. Оператор \hat{L}_v на L_0 становится в некотором смысле “гиперболическим” и у решения задачи возникает осциллирующая волновая часть, связанная с новыми лагранжевыми многообразиями. Сами решения, таким образом, связаны с парой лагранжевых многообразий. Для появления “гиперболических” решений необходимо, чтобы главный символ $H_v(x, p) = L_v(x, p, 0)$ оператора \hat{L}_v обращался в ноль на некотором подмногообразии Λ . Равенство $p^2 + \frac{(\pi v)^2}{D^2(\xi)} - n^2 = 0$ выполняется только для конечного числа мод или не выполняется вообще.

В предположении, что мода с номером ν гиперболическая, применим к построению соответствующей асимптотики метод, недавно развитый в [23].

Решение строится при следующих условиях.

1. Главный символ $H_\nu(x, p) = L_\nu(x, p, 0)$ оператора \hat{L}_ν вещественен.
2. Гамильтоново векторное поле $V_H = (H_p, -H_x)$ не касательно к многообразию Λ ни в одной точке многообразия $L_0 = \{(x, p) \in \Lambda, H(x, p) = 0\}$.
3. Выходящая из произвольной точки $(x_0, p_0) \in L_0$ траектория $(X(x_0, p_0, t), P(x_0, p_0, t)) = g_H^t((x_0, p_0))$ поля V_H более не возвращается на L_0 и удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow T} |X(x_0, p_0, t)| = \infty$, где $t \in [0, T)$, $T \leq y$ – максимальный интервал существования траектории.

Пусть выполнены условия 1–3, тогда справедливо следующее

Утверждение. Пусть $\tilde{\Lambda} \in \Lambda$ – достаточно малая окрестность подмногообразия $L_0 \in \Lambda$, $t_0 > 0$ – достаточно малое число. Тогда при всех $t \in [0, t_0]$ корректно определены лагранжевы многообразия $\Lambda_t = g_H^t(\tilde{\Lambda})$.

Введем объекты, необходимые для определения канонического оператора на лагранжевом многообразии $\Lambda_+ = \cup_{t \geq 0} g_H^t(L_0)$. Будем считать, что начальная точка α^* на многообразии Λ выбрана лежащей на L_0 , тогда в качестве начальной точки на Λ_+ выберем эту же точку, а на Λ_t – точку $g_H^t(\alpha^*)$. В точках многообразия $L_0 \in \Lambda$ мера $d\mu$ может быть записана в виде $d\mu = dH \wedge d\sigma$, где $d\sigma$ – некоторая мера на L_0 . Определим на Λ_t меру $d\mu_t = (g_H^{t*})^{-1}d\mu$. Меру в точках многообразия Λ_+ при любом $t > 0$ определим как $d\mu_+ = dt \wedge (g_H^{t*})^{-1}d\sigma$. На траекториях векторного поля V_H , выходящих из всевозможных точек $(x_0, p_0) \in \Lambda$, определим функцию \tilde{A} как решение задачи Коши для уравнения переноса:

$$\frac{d\tilde{A}_\nu}{dt} + H_{sub}(X(x_0, p_0, t), (P(x_0, p_0, t)))\tilde{A}_\nu = 0, \quad \tilde{A}_\nu|_{t=0} = A_\nu(x_0, p_0), \tag{18}$$

где A_ν – амплитуда в формуле (15), а

$$H_{sub}(x, p) = i \frac{\partial L_\nu}{\partial h}(x, p, 0) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H_\nu}{\partial x_j \partial p_j}(x, p)$$

есть субглавный символ оператора \hat{L}_ν , $A_{+\nu}$ – сужение функции \hat{A}_ν на многообразии Λ_+ . В этой задаче $H_{sub}(x, p) = -\frac{(p, \nabla_x D(x))}{D(x)}$. Решение уравнения переноса выписывается явно:

$$\begin{aligned} A_{+\nu}(x_0, p_0, t) &= A_\nu(x_0, p_0) \exp\left(\int_0^t \frac{(P, \nabla_x D(X))}{D(X)} dt\right) = A_\nu(x_0, p_0), \\ \exp\left(-\int_0^t \frac{(\dot{X}, \nabla_x D(X))}{2D(X)} dt\right) &= A_\nu(x_0, p_0) \exp\left(-\int_{D(X(x_0, p_0, 0))}^{D(X(x_0, p_0, t))} \frac{dD(X)}{2D(X)}\right) = \\ &= A_\nu(x_0, p_0) \frac{\sqrt{D(X(x_0, p_0, 0))}}{\sqrt{D(X(x_0, p_0, t))}} = A_\nu(x_0, p_0) \frac{\sqrt{D(\xi)}}{\sqrt{D(X(x_0, p_0, t))}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Пусть $\rho \in C^\infty(\Lambda)$ и $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ – срезающие функции такие, что $\rho(\alpha) = 1$ в окрестности многообразия L_0 , $\text{supp } \rho \in \Lambda$;

$$\theta(t) = 1 \quad \text{при} \quad |t| \leq \frac{t_0}{2}, \quad \theta(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| \geq t_0.$$

Определение. Функция $\psi_\nu(x, h)$ называется асимптотическим решением уравнения $\hat{L}_\nu \psi_\nu(x, h) = F_\nu$ с (асимптотическим) условием предельного поглощения (см. [28]), если существует зависящее от параметра $\varepsilon \in (0, 1)$ семейство функций $\psi_{\nu\varepsilon}(x, h)$ такое, что $(\hat{L}_\nu - i\varepsilon)\psi_{\nu\varepsilon} = F_\nu + O(h^\infty)$

равномерно по $\varepsilon \|\Psi_v - \Psi_{ve}\|_{s,\Omega} \rightarrow 0$ равномерно по h при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любой ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ любого целого $s \geq 0$.

Теперь мы хотим применить следующее утверждение из [23].

Теорема. Если выполнены условия 1–3, уравнение (10) с правой частью (15) имеет асимптотическое решение $\Psi_v = \Psi_v(x, h)$, удовлетворяющее асимптотическому принципу предельного поглощения и представимое в главном члене формулой

$$\begin{aligned} \Psi_v = & \frac{h}{i} \left(K_{(\Lambda_+, d\mu)}^h \left[\frac{(1 - \rho(\alpha)A_v)}{H_v} \right] + \frac{2\pi}{h} e^{i\pi/2} K_{(\Lambda_+, d\mu_+)}^h [(1 - \Theta(t))A_{+v}] + \right. \\ & \left. + \frac{i}{h} \int_0^{t_0} \exp \left(\int_{\alpha^*}^{g_H^t(\alpha^*)} p dx \right) K_{(\Lambda_+, d\mu_+)}^h [\Theta(t)\rho(\alpha)A_v(t)] dt + O(h^{1/2}) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где интеграл в показателе экспоненты вычисляется вдоль траектории поля V_H .

Первое слагаемое соответствует “эллиптическим” модам. Второе слагаемое – быстроосциллирующая “гиперболическая” часть решения. Третье слагаемое – сшивка этих 2 решений на многообразии Λ_t , которое является малой окрестностью L_0 (эта окрестность L_0 покрывается особыми картами, для особых карт представление канонического оператора Маслова интегральное, в малой окрестности L_0 соответствующий интеграл расходится, поэтому мы используем представление в таком виде).

Замечание 1. Если правая часть (15) – финитная функция, локализованная в окрестности точки $x = \xi$, асимптотическое решение уравнения (10) в области $|x - \xi| > Ch^\beta$ для любых постоянных $C > 0$, $\beta \in (g(1/2), 1)$ для достаточно большого $L > 0$ представимо в главном члене в виде

$$\Psi_v(x, h) = 2\pi \left[K_{(\Lambda_+, d\mu_+)}^h (1 - \theta(Lt/h^\beta)) A_{+v} \right](x, h) + O(h^{2\beta-1/2}). \quad (21)$$

Решение исходной задачи получается в результате суммирования по всем модам. Заметим также, что условия излучения (или предельного поглощения) для исходной задачи заменяются на парциальные соотношения (см. [29]), построенные асимптотические решения им удовлетворяют автоматически.

Замечание 2. Рассмотрим амплитуду A_{+v} (19) на многообразии Λ_+ . Так как справедлива формула коммутации канонического оператора с псевдодифференциальным оператором, функция $\frac{\sqrt{D(\xi)}}{\sqrt{D(x)}}$ выносится за канонический оператор. Волновая часть решения представима в виде

$$\Psi_v(x, h) = 2\pi \frac{\sqrt{D(\xi)}}{\sqrt{D(x)}} \left[K_{(\Lambda_+, d\mu_+)}^h (1 - \theta(Lt/h^\beta)) A_v \right](x, h) + O(h^{2\beta-1/2}). \quad (22)$$

Амплитуда A_v для конкретного источника выписывается в явном виде, поэтому можно рассчитать, для какой частоты и на каком луче функция A_v имеет максимум (найти максимум функции двух переменных). Таким образом, меняя параметры источника, мы можем уменьшить или увеличить амплитуду в нужной области конфигурационного пространства (см. [23]). Из полученной формулы видно, как амплитуда зависит от координат точки, в окрестности которой расположен источник.

5. УПРОЩЕНИЕ ВОЛНОВОЙ МОДЫ И ПРИНЦИП МОПЕРТЮИ-ЯКОБИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

Ответ в двумерной задаче выражается через канонический оператор Маслова на многообразии $\Lambda_+ = \cup_{t \geq 0} g_H^t(L_0)$. Применим к двумерной задаче представление канонического оператора, развитое в работе [30]. По принципу Мопертюи-Якоби [31] решения систем Гамильтона совпадают для гамильтонианов $H(x, p)$ и $F(H(x, p), x, p)$ при условии, что уравнения $H(x, p) = 0$ и $F(H(x, p), x, p) = 0$ определяют одну и ту же поверхность в фазовом пространстве. Можно перейти

ти к гамильтониану $\tilde{H} = |p| / \sqrt{-\frac{(\pi\nu)^2}{D^2(x)} + n^2} - 1$. Новая система Гамильтона связана со старой следующим образом:

$$\frac{dP}{dt} = -H_x = -R(X)\tilde{H}_x = \frac{d\tilde{P}}{dt}, \quad \frac{dX}{dt} = H_p = R(X)\tilde{H}_p = R(X)\frac{d\tilde{X}}{d\tau}, \quad (23)$$

где $C(x) = 1/\sqrt{-(\pi\nu)^2/D^2(x) + n^2}$ – решение уравнения $H(x, |p|) = 0$ относительно $\frac{1}{|p|}$,

$R(x) = |p| \left. \frac{\partial H}{\partial |p|} \right|_{|p|=1/C(x)} = 2/C^2(x)$. На лагранжевом многообразии Λ_+ можно ввести так называемые эйконал координаты τ, ψ (см. [30]), где τ – собственное время новой системы Гамильтона, ψ – координата на L_0 :

$$p_1 = \sqrt{n^2 - \frac{(\pi\nu)^2}{D^2(\xi)}} \cos(\psi), \quad p_2 = \sqrt{n^2 - \frac{(\pi\nu)^2}{D^2(\xi)}} \sin(\psi), \quad x = \xi, \quad \psi = [0, 2\pi]. \quad (24)$$

Мера на лагранжевом многообразии $\Lambda_+ = \cup_{t \geq 0} g_H^t(L_0)$ имеет вид:

$$d\mu_+ = d\tau \wedge d\psi. \quad (25)$$

Канонический оператор в неособых картах определен следующим образом:

$$K_{(\Lambda_+, d\mu_+)}^h [A_{+v}(\tau, \psi)] = \left. \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}m_j} \sqrt{D(\xi)}}{\sqrt{2|\tilde{X}_\psi| D(x)/C(x)}} e^{i\tau/h} A_v(\psi) e_j(\tau, \psi) \right|_{(\tau, \psi)=(\tau_j(x), \psi_j(x))}, \quad (26)$$

где m_j – индекс Маслова неособой карты [26].

Канонический оператор в особых картах [32]:

$$K_{(\Lambda_+, d\mu_+)}^h [A_{+v}(\tau, \psi)] = \frac{C(x)\sqrt{D(\xi)}e^{-\frac{i\pi}{2}m_j^s e^{\frac{i\pi}{4}}}}{\sqrt{\pi h D(x)}} \int_R e^{i\tau/h} A_v(\psi) \sqrt{|\det(P, P_\psi)|} e_j(\tau, \psi) \Big|_{(\tau, \psi)=(\tau_j(x), \psi_j(x))}, \quad (27)$$

где m_j^s – индекс Маслова особой карты [26].

Канонический оператор в эйконал координатах имеет ряд замечательных свойств, которые упрощают компьютерную реализацию канонического оператора.

1. Якобиан выражается через производную \tilde{X}_ψ

$$|\tilde{J}| = C(\tilde{X}(\tau, \psi)) |\tilde{X}_\psi|. \quad (28)$$

2. Фаза волновой функции – собственное время гамильтоновой системы имеет вид

$$s(\tau, \psi) = s_0(\psi) + \tau = \left[\text{где } s_0(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \tilde{P}(0, \psi) d\tilde{X}(0, \psi) = 0 \right] = \tau. \quad (29)$$

Таким образом, волновые фронты – это кривые, соединяющие концы траекторий гамильтоновой системы.

6. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ПРАВОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим асимптотику задачи (2) с двумя малыми параметрами μ и h . Если $h \leq \mu$, можно легко свести задачу к предыдущей. Функцию $F_v\left(\frac{x_1 - \xi_1}{\mu}, \frac{x_2 - \xi_2}{\mu}\right)$ можно представить через канонический оператор с малым параметром h :

$$F_v\left(\frac{x_1 - \xi_1}{\mu}, \frac{x_2 - \xi_2}{\mu}\right) = \frac{h}{i} K_{(\Lambda, d\mu)}^h [A_v(\alpha)], \quad A_v(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F_v\left(\frac{y}{\mu}\right) e^{-i\alpha y} dy. \quad (30)$$

Если $h \ll \mu$ в двумерной задаче, нужно пользоваться формулой (20). Если μ порядка h , волновую часть решения двумерной задачи можно представить в виде (21).

Пусть $\mu \leq h^2$, тогда представление (30) не работает. Действительно, правая часть представима через канонический оператор только с малым параметром μ . В редуцированном уравнении для построения квазиклассической асимптотики вида (20) нужно сделать подстановку $\hat{p} = -i\mu\nabla_x$:

$$\left(\frac{h^2}{\mu^2}\hat{p}^2 + \frac{(\pi\nu)^2}{D^2(x)} - n^2\right)\Psi_\nu = K_{(\Lambda, d\mu)}^\mu[A_\nu(\alpha)]. \quad (31)$$

В приложении показано, что функция χ_ν^1 , определяющая поправку $h\chi_\nu^1\Psi_\nu$ к решению, пропорциональна p . Оценим эту поправку. Легко видеть, что

$$h\chi_\nu^1\Psi_\nu \sim h\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_{1,2}}\right)K_{(\Lambda, d\mu)}^\mu[A_\nu(\alpha)] \sim \frac{h^2}{\mu}. \quad (32)$$

Следовательно, при $\mu \ll h$ адиабатическое приближение не применимо. Подробнее о зависимости решения уравнений такого типа от отношения параметров μ и h (см., например, [22]).

7. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим применение полученных аналитических формул на конкретном примере. Возьмем рельеф дна, задаваемый функцией $D(\mathbf{x}) = -1 - \exp(-(x_1^2 + x_2^2))$. Источник находится в точке $\xi = (-3, 0)$, $\mu = 0.1$, $h = 0.01$. Решена система уравнений Гамильтона (33) и построены соответствующие траектории (фиг. 2):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, \quad \mathbf{x}(0) = (-3, 0), \quad p(0) = \mathbf{n}(\psi)\sqrt{n^2 - \frac{(\pi\nu)^2}{D^2(\xi)}}, \quad (33)$$

где $\mathbf{n}(\psi) = (\cos(\psi), \sin(\psi))$.

Как видно из решения (фиг. 2), каустики и фокальные точки для разных мод соответствуют разным точкам конфигурационного пространства. Решение проектируется с характеристик на конфигурационное пространство нетривиальным образом. Канонический оператор в неособых картах выражается по формуле (26). Существуют области конфигурационного пространства, которые соответствуют многолистности лангранжева многообразия Λ_+ . Проекция на \mathbb{R}_x^2 – сумма проекций с каждого листа. На фиг. 2 многолистность лагранжева многообразия соответствует областям с пересечением фронтов. Чтобы построить волновое поле в \mathbb{R}_x^2 , нужно сложить решения на всех фронтах. При проектировании с особых карт использовалось представление интеграла (27) через функции Эйри [32], [33].

Рассмотрим два варианта правой части в уравнении (10):

$$F(y) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right)\right], \quad (a_1y_1 + b_1y_2)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right)\right], \quad (34)$$

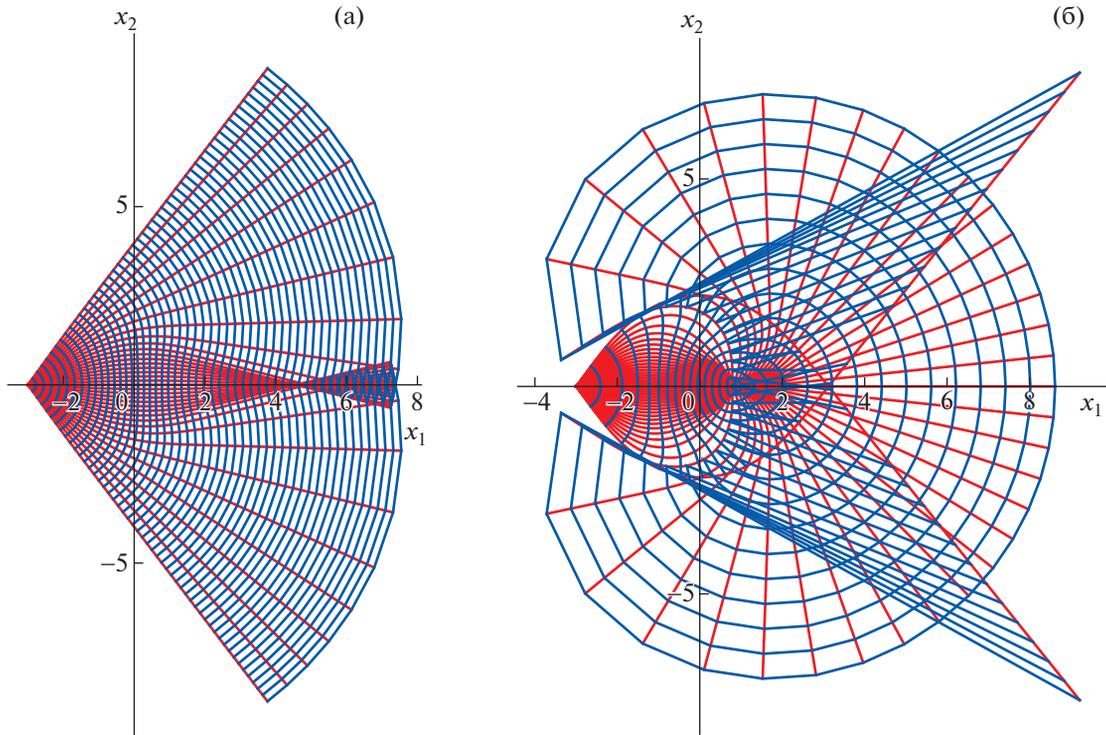
соответственно,

$$A(p) = ab \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2p_1^2 + b^2p_2^2)\right], \quad iab(a^2a_1p_1 + b^2b_1p_2)\exp\left[-\frac{1}{2}(a^2p_1^2 + b^2p_2^2)\right], \quad (35)$$

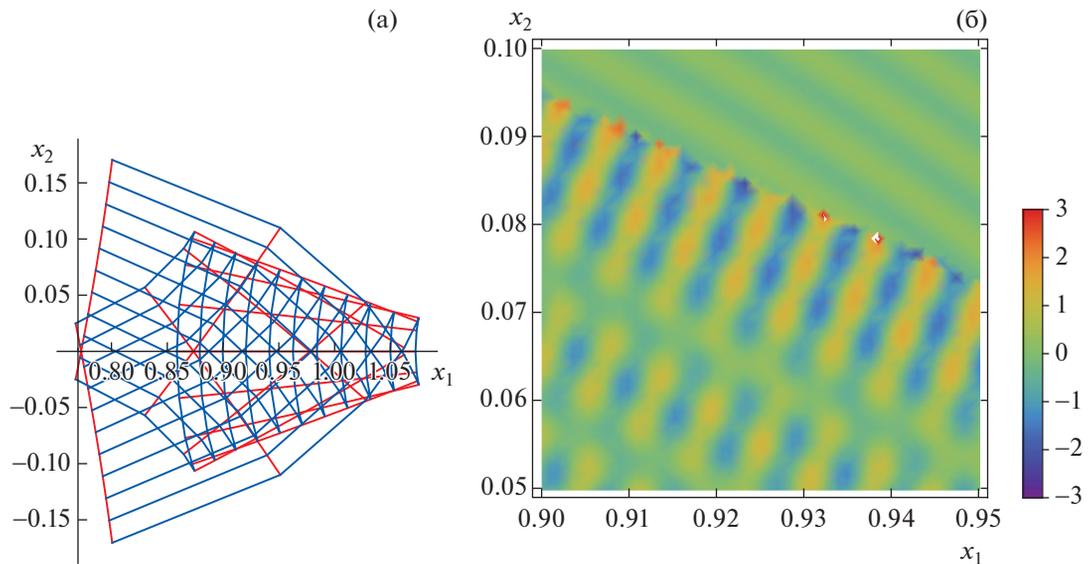
где $p = \sqrt{n^2 - \frac{(\pi\nu)^2}{D^2(\xi)}}\mathbf{n}(\psi) = \rho\mathbf{n}(\psi)$, амплитуду можно переписать в виде

$$A(p) = ab \exp\left[-\frac{1}{2}\rho^2(a^2\cos^2(\psi) + b^2\sin^2(\psi))\right], \quad (36)$$

$$iab\rho(a^2a_1\cos(\psi) + b^2b_1\sin(\psi))\exp\left[-\frac{1}{2}\rho^2(a^2\cos^2(\psi) + b^2\sin^2(\psi))\right].$$



Фиг. 2. (а) Траектории и волновые фронты при $\nu = 3$, $n = 13$, $\psi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. (б) Траектории и волновые фронты при $\nu = 4$, $n = 13$, $\psi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.



Фиг. 3. (а) Траектории и волновые фронты при $\nu = 4$; $n = 13$ в окрестности каустики. (б) Решение двумерного уравнения Гельмгольца с правой частью в виде гауссовой экспоненты при $\nu = 4$ в области конфигурационного пространства, соответствующей окрестности каустики ($x_1 \in (0.9, 0.95)$, $x_2 \in (0.05, 0.1)$).

В первом случае амплитуда максимальна при $\rho \rightarrow 0$, во втором случае максимум смещается в точку $\rho = 1/\sqrt{a^2 \cos^2(\psi) + b^2 \sin^2(\psi)}$, $\tan(\psi) = b/a_1$. Таким образом, меняя параметры источника, можно добиться максимума амплитуды в нужной области.

Приведем вывод соотношений (9). Сначала рассмотрим однородное уравнение Гельмгольца, подстановка (7) приводит к уравнению

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{\chi}_v\Psi_v = -n^2\hat{\chi}_v\Psi_v. \quad (37)$$

При этом будем предполагать, что функции Ψ_v удовлетворяют уравнению

$$\hat{L}_v\left(x_i, h\nabla_x^1, h\right)\Psi_v = -n^2\Psi_v. \quad (38)$$

Уравнение (37) можно переписать в виде

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{\chi}_v = \hat{\chi}_v\hat{L}_v. \quad (39)$$

Для решения уравнения (39) перейдем от операторов к символам (см. [22]). Символ произведения операторов можно найти по формуле [22]

$$\text{smb}\left(a\left(x, -ih\nabla_x^1, h\right)b\left(x, -ih\nabla_x^1, h\right)\right) = a\left(x, p - ih\nabla_x^1, h\right)b\left(x, p, h\right). \quad (40)$$

Следовательно, уравнение (39) можно переписать в виде

$$\mathcal{H}\left(x, -ih\nabla_x^1, z, \frac{\partial}{\partial z}, h\right)\chi\left(x, p, z, h\right) = \chi\left(x, -ih\nabla_x^1, z, h\right)L\left(x, p, h\right). \quad (41)$$

Решаем уравнение (41) с помощью теории возмущений, это дает

$$\mathcal{H}\chi_v^0 = L_v^0\chi_v^0, \quad \mathcal{H}\chi_v^1 - i\left(\nabla_p H, \nabla_x \chi_v^0\right) = \chi_v^1 L_v^0 + \chi_v^0 L_v^1 - i\left(\nabla_p \chi_v^0, \nabla_x L_v^0\right), \quad (42)$$

где χ_v^0 удовлетворяет граничным условиям

$$\chi_v^0\Big|_{z=0} = \chi_v^0\Big|_{z=D(x)} = 0. \quad (43)$$

Уравнение для χ_v^0 имеет вид

$$\left(-p^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\chi_v^0 = \chi_v^0 L_v^0. \quad (44)$$

Собственные функции и собственные значения задачи (44) с граничными условиями (43) имеют вид

$$\chi_v^0 = \sin\left(\frac{\pi v z}{D(x)}\right), \quad L_v^0 = -p^2 - \frac{(\pi v)^2}{D^2(x)},$$

$$L_v = -p^2 - \frac{(\pi v)^2}{D^2(x)} + O(h), \quad \chi_v = \sin\left(\frac{\pi v z}{D(x)}\right) + O(h).$$

Уравнение для L_v^1 запишем как

$$-\chi_v^1 L_v^0 + \mathcal{H}\chi_v^1 = -i\left(\nabla_p \chi_v^0, \nabla_x L_v^0\right) + \chi_v^0 L_v^1 + i\left(\nabla_p \mathcal{H}, \nabla_x \chi_v^0\right). \quad (45)$$

Оператор $(\mathcal{H} - L_v^1)$ самосопряженный, следовательно, разрешимость уравнения (45) эквивалентна ортогональности правой части и χ_v^0 :

$$\left(-i\left(\nabla_p \chi_v^0, \nabla_x L_v^0\right) + \chi_v^0 L_v^1 + i\left(\nabla_p \mathcal{H}, \nabla_x \chi_v^0\right), \chi_v^0\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$L_v^1 = i \frac{(p, \nabla_x D(\mathbf{x}))}{D(\mathbf{x})}.$$

Поэтому уравнение для модовых амплитуд с точностью до $O(h^2)$ можно переписать в виде

$$\left[-\hat{p}^2 - \frac{(\pi v)^2}{D^2(\mathbf{x})} + n^2 + ih \frac{(p, \nabla_x D(\mathbf{x}))}{D(\mathbf{x})} \right] \psi(x) = \left(\chi_v^0, F \left(\frac{x_1 - \xi_1}{\mu}, \frac{x_2 - \xi_2}{\mu} \right) g \left(\frac{z - z_0}{\mu''} \right) \right).$$

Вычислим символ оператора $\hat{\chi}_v^1$. Уравнение (45) эквивалентно следующему:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{(\pi v)^2}{D^2(\mathbf{x})} \right] \chi_v^1 = i (p, \nabla_x D(\mathbf{x})) \left(\frac{2z v \pi}{D^2(\mathbf{x})} \cos \left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})} \right) + \frac{1}{D(\mathbf{x})} \sin \left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})} \right) \right).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\chi_v^1(p, x, z) = c_1 \cos \left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})} \right) + c_2 \sin \left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})} \right) + i \frac{(p, \nabla_x D(\mathbf{x})) z^2}{2D(\mathbf{x})} \sin \left(\frac{\pi v z}{D(\mathbf{x})} \right), \quad (46)$$

где χ_v^1 удовлетворяет граничным условиям

$$\chi_v^1 \Big|_{z=0} = \chi_v^1 \Big|_{z=D(\mathbf{x})} = 0,$$

поэтому $c_1 = 0$.

Для того чтобы устранить неопределенность в выборе c_2 , можно нормировать функции χ_v в виде

$$(\chi, \chi) = 1. \quad (47)$$

Уравнение (47) равносильно тому, что главный член скалярного произведения равен единице, а

“поправка” порядка h равна нулю. Учитывая, что χ_v^0 не зависит от p , и $\left(a \left(\frac{1}{p}, \frac{2}{x} \right) \right)^* = \bar{a} \left(\frac{2}{p}, \frac{2}{x} \right)$, выпишем уравнение для первой поправки:

$$(\chi_v^1, \chi_v^0) + (\chi_v^0, \chi_v^1) = 0.$$

Отсюда следует, что $c_2 = 0$.

Авторы благодарят П.С. Петрова за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jensen F.B., Porter M.B., Kuperman W.A., Schmidt H.* Computational ocean acoustics. New York: Springer, 2011.
2. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of shallow water acoustics. New York: Springer, 2012. 540 p.
3. *Petrov P.S., Petrova T.N.* Asymptotic solution for the problem of sound propagation in a sea with an underwater canyon // J. of the Acoustical Society of America. 2014. V. 136. № 4. P. EL281–EL287.
4. *Petrov P.S., Sturm F.* An explicit analytical solution for sound propagation in a three-dimensional penetrable wedge with small apex angle // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 139. № 3. P. 1343–1352.
5. *Badiey M., Katsnelson B.G., Lin Y.-T., Lynch J.* Acoustic multipath arrivals in the horizontal plane due to approaching nonlinear internal waves // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129. № 4. P. EL141–EL147.
6. *Кацнельсон Б.Г., Переселков С.А.* Горизонтальная рефракция низкочастотного звукового поля, вызванная солитонами внутренних волн в мелководном волноводе // Акустический журнал. 2000. Т. 46. № 6. С. 779–788.
7. *Кацнельсон Б.Г., Бади М., Линч Дж.* Горизонтальная рефракция в мелком море и ее экспериментальные наблюдения // Акустический журнал. 2007. Т. 53. № 3. С. 362–376.
8. *Sturm F.* Investigation of 3-d benchmark problems in underwater acoustics: a uniform approach // J. Acoust. Soc. Am. 2008. V. 123. P. 3942.
9. *Lin Y.T., Collis J.M., Duda T.F.* A three-dimensional parabolic equation model of sound propagation using high-order operator splitting and Pade approximants // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 132. P. EL364–EL370.

10. *Sturm F.* Incorporating a cross-multiplied term in a three-dimensional parabolic equation model // Proc. of UA2014 – 2nd International Conference and Exhibition on Underwater Acoustics. 2014. IACM FORTH. P. 987–992.
11. *Rodriguez O.C., Sturm F., Petrov P., Porter M.* Three-dimensional model benchmarking for cross-slope wedge propagation // Proc. of Meetings on Acoustics. 2017. V. 30. P. 070004.
12. *Porter M.B.* The bellhop manual and users guide. Technical Report, Heat, Light, and Sound Research, Inc., La Jolla, CA, USA (2011), <http://oalib.hlsresearch.com/Rays/HLS-2010-1.pdf>.
13. *Weinberg H., Burridge R.* Horizontal ray theory for ocean acoustics // J. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 55. P. 63–79.
14. *Collins M.D.* The adiabatic mode parabolic equation // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 94. P. 2269–2278.
15. *Trofimov M.Y.* Wide-angle mode parabolic equations // Acoust. Phys. 2002. V. 48. P. 728–734.
16. *Trofimov M.Yu., Kozitskiy S.B., Zakharenko A.D.* A mode parabolic equation method in the case of the resonant mode interaction // Wave Motion. 2015. V. 58. P. 42–52.
17. *Trofimov M.Yu., Zakharenko A.D., Kozitskiy S.B.* Mode Gaussian beam tracing // Comput. Phys. Communications. 2016. V. 207. P. 179–185.
18. *Keller J.B.* Geometrical theory of diffraction // JOSA. 1962. V. 52. № 2. P. 116–130.
19. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1964. Т. 65(107). С. 576–630.
20. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
21. *Кучеренко В.В.* Коротковолновая асимптотика функции Грина для N-мерного волнового уравнения в неоднородной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 4. С. 908–913.
22. *Белов В.В., Доброхотов С.Ю., Тудоровский Т.Я.* Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках. I. Редукция к пространственно-одномерным уравнениям // Теор. и матем. физ. 2004. Т. 141. № 2. С. 267–303.
23. *Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е., Руло М.* // Докл. АН. 2017. Т. 475. № 6. С. 624–628.
24. *Карасев М.В., Маслов В.П.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
25. *Доброхотов С.Ю., Тироци Б., Шафаревич А.И.* Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова // Матем. заметки. 2007. Т. 82. Вып. 5. С. 792–796.
26. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
27. *Маслов В.П.* Операторные методы (введение в функ. анализ). М.: Наука, 1973.
28. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.
29. *Свешников А.Г.* Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 345–347.
30. *Доброхотов С.Ю., Миненков Д.С., Руло М.* Принцип Мопертюи–Якоби для гамильтонианов вида $f(x, |p|)f(x, |p|)$ в некоторых двумерных стационарных квазиклассических задачах // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 1. С. 48–57.
31. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. Рипол Классик, 1979.
32. *Доброхотов С.Ю., Макракис Г.Н., Назайкинский В.Е., Тудоровский Т.Я.* Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках // Теор. и матем. физ. 2013. Т. 177. № 3. С. 355–386.
33. *Reijnders K.J.A., Minenkov D.S., Katsnelson M.I., Dobrokhotov S.Y.* Electronic optics in graphene in the semi-classical approximation // Annals of Physics. 2018. V. 397. P. 65–135.