ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 4, с. 587–596

УДК 517.958

# СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1)]



**А. М. Денисов**

*(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия)*

*e-mail: den@cs.msu.ru*

Поступила в редакцию 10.10.2018 г.
Переработанный вариант 14.11.2018 г.
Принята к публикации 14.11.2018 г.

Рассматривается задача с данными на характеристиках для квазилинейного гиперболического уравнения. Ставится обратная задача, состоящая в определении неизвестного коэффициента уравнения, зависящего от его решения. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи задаются значения решения задачи с данными на характеристиках при фиксированном значении одной из независимых переменных. Доказывается теорема существования решения обратной задачи. Доказательство основано на выводе нелинейного операторного уравнения для неизвестного коэффициента и доказательстве его разрешимости. Библ. 15.

**Ключевые слова:** квазилинейное гиперболическое уравнение, задача с данными на характеристиках, обратная задача, теорема существования, нелинейное операторное уравнение.

**DOI:** 10.1134/S0044466919040021

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу для функции $u(x,t)$:

$$u_{xt} + au_t + b(u)u_x = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{1.3}$$

где $Q_\tau = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le \tau\}$, $a$ – положительная постоянная.

Задача (1.1)–(1.3) представляет собой задачу с данными на характеристиках для квазилинейного гиперболического уравнения (1.1). Сформулируем утверждение о существовании и единственности ее решения.

**Лемма 1.** *Предположим, что функции $b(s)$ и $f(t)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$b \in C^1(R), \quad 0 < b(s) \le b_{00}, \quad |b'(s)| \le b_{01}, \quad s \in R, \tag{1.4}$$

$$f \in C^1[0,T], \quad f(0) = 0, \tag{1.5}$$

*где $b_{00}$ и $b_{01}$ – положительные постоянные. Тогда существует единственная функция $u(x,t)$ такая, что $u, u_x, u_t, u_{xt} \in C(Q_T)$ и $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению* (1.1) *и условиям* (1.2), (1.3).

Сформулируем обратную задачу. Пусть число $a$ и функция $f(t)$ заданы, а функция $b(s)$ неизвестна. Требуется определить $b(s)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1.1)–(1.3)

$$u(l,t) = g(t), \quad 0 \le t \le T,$$

где $g(t)$ – заданная функция.

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 17-01-00525).

Дадим определение решения обратной задачи для $s \in [0, f(t_0)]$, где $t_0 \in (0, T]$.

**Определение.** Функция $b(s)$ называется решением обратной задачи для $s \in [0, f(t_0)]$, если $b \in C^1(R) \cap C^2[0, f(t_0)]$, $b(s)$ удовлетворяет условиям (1.4), $b''(s)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, f(t_0)]$ и соответствующее ей решение задачи (1.1)–(1.3) таково, что

$$u(l, t) = g(t), \quad 0 \le t \le t_0. \tag{1.6}$$

Основным результатом этой работы является локальная теорема существования решения обратной задачи.

**Теорема.** *Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ таковы, что: $f, g \in C^4[0, T]$, $f''''(t)$, $g''''(t)$ удовлетворяют условию Липшица на отрезке $[0, T]$, $f(0) = 0$, $f'(t) > 0$, $t \in [0, T]$, и*

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = f'(0)e^{-al}, \quad g''(0) > f''(0)e^{-al}. \tag{1.7}$$

*Тогда существуют число $t_0 \in (0, T]$ и функция $b(s)$, являющаяся решением обратной задачи для $s \in [0, f(t_0)]$.*

Исследованию обратных задач для гиперболических уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [1]–[6] и приведенные в них списки литературы). Обратные задачи для квазилинейных гиперболических уравнений изучались в работах [7]–[13].

## 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1)–(1.3)

В этом разделе мы установим некоторые свойства решения задачи (1.1)–(1.3). Начнем с доказательства леммы 1. Оно проводится стандартным образом (см., например, [14], [15]) однако, в процессе доказательства будут выведены интегральные уравнения, которые будут использованы в дальнейшем.

**Доказательство леммы 1.** Предположим, что существует функция $u(x, t)$ такая, что $u, u_x, u_t, u_{xt} \in C(Q_T)$ и $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3).

Интегрируя уравнение (1.1) с начальным условием $u_x(x, 0) = 0$, получаем

$$u_x(x, t) = -a\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t b(u(x, \theta))d\theta\right\}u_t(x, \tau)d\tau, \quad (x, t) \in Q_T. \tag{2.1}$$

Используя формулу интегрирования по частям и условие (1.3), преобразуем это уравнение к виду

$$u_x(x, t) + au(x, t) = a\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t b(u(x, \theta))d\theta\right\}b(u(x, \tau))u(x, \tau)d\tau, \quad (x, t) \in Q_T.$$

Интегрируя это уравнение с условием (1.2), получаем нелинейное интегральное уравнение для функции $u(x, t)$:

$$\begin{gathered} u(x, t) = f(t)e^{-ax} + a\int_0^x\int_0^t \exp\left\{-a(x - z) - \int_\tau^t b(u(z, \theta))d\theta\right\}\times \\ \times\, b(u(z, \tau))u(z, \tau)d\tau dz, \quad (x, t) \in Q_T. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Следовательно, если функция $u(x, t)$ является решением задачи (1.1)–(1.3), то она удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению (2.2).

Справедливо и обратное утверждение. Пусть функция $u(x, t)$ является непрерывным решением уравнения (2.2). Тогда из этого уравнения и условий леммы 1 следует, что $u_x, u_t, u_{xt} \in C(Q_T)$ и $u(x, t)$ является решением задачи (1.1)–(1.3). Таким образом, интегральное уравнение (2.2) эквивалентно задаче (1.1)–(1.3). Следовательно, для доказательства существования и единственности решения задачи (1.1)–(1.3) достаточно доказать существование и единственность непрерывного решения нелинейного интегрального уравнения (2.2). Существование решения этого уравнения следует из равномерной ограниченности и равномерной сходимости последовательности функций $u_n(x,t)$, определяемых итерационным процессом

$$u_{n+1}(x,t) = f(t)e^{-ax} + a\int_0^x\int_0^t \exp\left\{-a(x-z) - \int_\tau^t b(u_n(z,\theta))d\theta\right\}\times$$
$$\times\, b(u_n(z,\tau))u_n(z,\tau)d\tau dz, \quad n = 0,1\,\ldots, \quad u_0(x,t) = 0, \quad (x,t)\in Q_T.$$

Единственность непрерывного решения уравнения (2.2) следует из леммы Гронуолла. Таким образом, лемма 1 доказана.

Пусть $t_0$ – произвольное число такое, что $t_0 \in (0,T]$.

**Лемма 2.** *Предположим, что для функций* $b(s)$ *и* $f(t)$ *выполнены условия* (1.4) *и* (1.5) *соответственно. Тогда если* $b \in C^2[0, f(t_0)]$ *и* $b''(s)$ *удовлетворяет условию Липшица на отрезке* $[0, f(t_0)]$, *а* $f \in C^3[0,t_0]$, $f'(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$, *и* $f'''(t)$ *удовлетворяет условию Липшица на отрезке* $[0,t_0]$, *то решение задачи* (1.1)–(1.3), *т.е. функция* $u(x,t)$ *такова, что* $u \in C^3(Q_{t_0})$ *и* $u_{ttt}(x,t)$ *удовлетворяет в* $Q_{t_0}$ *условию Липшица по переменной* $t$. *Кроме того,*

$$u_t(x,t) > 0, \quad (x,t)\in Q_{t_0}, \quad u_x(x,t) < 0, \quad 0 \le x \le l, \quad 0 < t \le t_0, \tag{2.3}$$

$$0 \le u(x,t) \le f(t_0), \quad (x,t)\in Q_{t_0}. \tag{2.4}$$

**Доказательство.** Так как условия леммы 1 выполнены, то существует единственная непрерывная функция $u(x,t)$, имеющая в $Q_T$ непрерывные производные $u_x, u_t, u_{xt}$ и удовлетворяющая уравнению (2.2). Из уравнений (1.1) и (2.1) следует, что производная $u_t(x,t)$ является решением уравнения

$$u_{xt} + au_t = b(u)a\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t b(u(x,\theta))d\theta\right\}u_t(x,\tau)d\tau, \quad (x,t)\in Q_{t_0}.$$

Интегрируя это уравнение с условием $u_t(0,t) = f'(t)$, имеем

$$\begin{gathered} u_t(x,t) = f'(t)e^{-ax} + a\int_0^x e^{-a(x-z)}b(u(z,t))\times \\ \times\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t b(u(z,\theta))d\theta\right\}u_t(z,\tau)d\tau dz, \quad (x,t)\in Q_{t_0}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Из уравнения (2.5) и условий леммы следует, что $u_t(x,t) > 0$ в $Q_{t_0}$. Тогда из уравнения (2.1) получим, что $u_x(x,t) < 0$ при $0 \le x \le l$, $0 < t \le t_0$ и неравенства (2.3) доказаны. Неравенство (2.4) является следствием неравенств (2.3).

Из неравенства (2.4) следует, что решение задачи (1.1)–(1.3) на множестве $Q_{t_0}$ однозначно определяется значениями функций $f(t)$ на отрезке $[0,t_0]$ и функции $b(s)$ на отрезке $[0, f(t_0)]$.

Рассмотрим функцию $u(x,t)$ на множестве $Q_{t_0}$. Так как $b \in C^2[0, f(t_0)]$ и $b''(s)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, f(t_0)]$, а $f \in C^3[0,t_0]$ и $f'''(t)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,t_0]$, то из уравнения (2.2) следует, что $u \in C^3(Q_{t_0})$ и $u_{ttt}(x,t)$ удовлетворяет в $Q_{t_0}$ условию Липшица по переменной $t$. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим вопрос о коэффициентной устойчивости решения задачи (1.1)–(1.3) на специальном множестве функций $b(s)$.

Введем множество

$$K_{t_0} = \{k \in C[0, f(t_0)],\ k(0) = k_0,\ |k(s_1) - k(s_2)| \le L|s_1 - s_2|,\ \forall s_1, s_2 \in [0, f(t_0)]\},$$

где $k_0, L$ – постоянные, $L > 0$, $t_0 \in (0,T]$.

Рассмотрим множество $B_{t_0}$ функций $b(s)$ таких, что они удовлетворяют условиям (1.4) и

$$b(s) = b_0 + b_1 s + \int_0^s (s - z)k(z)dz, \quad s \in [0, f(t_0)], \tag{2.6}$$

где $b_0$ и $b_1$ – фиксированные постоянные, а $k(s)$ принадлежат множеству $K_{t_0}$.

Получим оценки устойчивости решения задачи (1.1)–(1.3) и его производных на множестве $B_{t_0}$.

**Лемма 3.** *Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условиям леммы 2, а функции $b_1(s)$ и $b_2(s)$ принадлежат множеству $B_{t_0}$. Тогда если $u_i(x,t)$, $i = 1, 2$ – решения задачи (1.1)–(1.3) с функциями $b_i(s)$ соответственно, то*

$$\|u_1 - u_2\|_{C(Q_{t_0})} \le c_1 t_0 \|b_1 - b_2\|_{C[0, f(t_0)]}, \tag{2.7}$$

$$\|(u_1)_t - (u_2)_t\|_{C(Q_{t_0})} \le c_2 t_0 \|b_1 - b_2\|_{C[0, f(t_0)]}, \tag{2.8}$$

$$\|(u_1)_{tt} - (u_2)_{tt}\|_{C(Q_{t_0})} \le c_3 t_0 \left\|b_1' - b_2'\right\|_{C[0, f(t_0)]}, \tag{2.9}$$

$$\|(u_1)_{ttt} - (u_2)_{ttt}\|_{C(Q_{t_0})} \le c_4 t_0 \left\|b_1'' - b_2''\right\|_{C[0, f(t_0)]}, \tag{2.10}$$

*где постоянные $c_m$, $m = 1, 2, 3, 4$, не зависят от $t_0$ и функций $b_1(s)$, $b_2(s)$, принадлежащих множеству $B_{t_0}$.*

**Доказательство.** Пусть $b(s)$ – произвольная функция из множества $B_{t_0}$. Из формулы (2.6) следует, что $b''(s) = k(s)$ для $s \in [0, f(t_0)]$. Принимая во внимание определение множества $K_{t_0}$, получим, что для любой функции $k(s)$ из этого множества справедлива оценка

$$|k(s)| \le |k_0| + Lf(t_0), \quad s \in [0, f(t_0)]. \tag{2.11}$$

Учитывая формулу (2.6) и неравенство (2.11), получаем, что любая функция $b(s)$ из множества $B_{t_0}$ и ее производные ограничены так, что

$$\|b\|_{C[0, f(t_0)]} \le c_5, \quad \|b'\|_{C[0, f(t_0)]} \le c_6, \quad \|b''\|_{C[0, f(t_0)]} \le c_7, \tag{2.12}$$

где постоянные $c_5, c_6$ и $c_7$ не зависят от $b(s)$.

Получим оценки для производных решения задачи (1.1)–(1.3) на множестве $Q_{t_0}$ равномерные относительно функций $b(s)$ из множества $B_{t_0}$.

Из уравнения (2.5) и неравенств (2.12) имеем

$$|u_t(x,t)| \le \|f'\|_{C[0,T]} + ac_5 \int_0^x \int_0^t |u_t(z,\theta)| d\theta dz, \quad (x,t) \in Q_{t_0}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|u_t\|_{C(Q_{t_0})} \le c_8 \quad \forall b \in B_{t_0}. \tag{2.13}$$

Дифференцируя уравнение (2.5) по $t$, получаем

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) = f''(t)e^{-ax} + a\int_0^x e^{-a(x-z)} b'(u(z,t))u_t(z,t) \times \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t b(u(z,\theta))d\theta\right\} u_t(x,\tau)d\tau dz + \\ + a\int_0^x e^{-a(x-z)} b(u(z,t)) \left[u_t(z,t) - \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t b(u(z,\theta))d\theta\right\} b(u(z,t))u_t(z,\tau)d\tau\right] dz, \quad (x,t) \in Q_{t_0}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Из формулы (2.14), неравенств (2.12) и (2.13) следует, что

$$\|u_{tt}\|_{C(Q_{t_0})} \le c_9 \quad \forall b \in B_{t_0}. \tag{2.15}$$

Аналогично, дифференцируя формулу (2.14) по $t$, используя неравенства (2.12), (2.13) и (2.15), имеем

$$\|u_{ttt}\|_{C(Q_{t_0})} \le c_{10} \quad \forall b \in B_{t_0}. \tag{2.16}$$

Перейдем к доказательству оценок (2.7)–(2.10). Пусть функции $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, являются решениями задачи (1.1)–(1.3) с функциями $b_i(s) \in B_{t_0}$. Тогда они удовлетворяют интегральным уравнениям, аналогичным уравнению (2.2)

$$u_i(x,t) = f(t)e^{-ax} + a\int_0^x\int_0^t \exp\left\{-a(x-z) - \int_\tau^t b_i(u_i(z,\theta))d\theta\right\}\times$$
$$\times\, b_i(u_i(z,\tau))u_i(z,\tau)d\tau dz, \quad (x,t)\in Q_{t_0}.$$

Вычитая одно уравнение из другого и используя оценки (2.12), получаем неравенство

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le alt_0 f(t_0)(t_0c_5 + 1)\|b_1 - b_2\|_{C[0,f(t_0)]} + ac_5c_6 f(t_0)\int_0^x\int_0^t\int_\tau^t |u_1(z,\theta) - u_1(z,\theta)|d\theta d\tau dz +$$
$$+\, a(c_6 f(t_0) + c_5)\int_0^x\int_0^t |u_1(z,\tau) - u_1(z,\tau)|d\tau dz, \quad (x,t)\in Q_{t_0},$$

из которого следует оценка (2.7).

Докажем неравенство (2.8). Записывая уравнения (2.5) для функций $(u_i)_t(x,t)$, вычитая их одно из другого и используя оценки (2.12),(2.13), имеем

$$|(u_1)_t(x,t) - (u_2)_t(x,t)| \le alt_0c_8(1 + c_5t_0)\|b_1 - b_2\|_{C[0,f(t_0)]} + alt_0c_6c_8(1 + c_5t_0)\|u_1 - u_2\|_{C(Q_{t_0})} +$$
$$+\, ac_5\int_0^x\int_0^t |(u_1)_t(z,\tau) - (u_1)_t(z,\tau)|d\tau dz, \quad (x,t)\in Q_{t_0}.$$

Из этого неравенства и оценки (2.7) следует неравенство (2.8).

Рассмотрим вопрос о коэффициентной устойчивости производной $u_{tt}(x,t)$. Из формулы (2.14) следует, что эта производная выражается через функции $u(x,t), u_t(x,t), b(u(x,t))$ и $b'(u(x,t))$. Используя эту формулу и оценки (2.7),(2.8),(2.12) и (2.13) выводим неравенство (2.9).

Дифференцируя равенство (2.14) по $t$, получаем формулу для производной $u_{ttt}(x,t)$. Используя эту формулу, оценки (2.7)–(2.9), (2.12),(2.13), (2.15) и условие Липшица для функций $b_1''(s)$, $b_2''(s)$, получаем оценку (2.10). Лемма 3 доказана.

## 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

**Доказательство теоремы существования.** Пусть функция $b(s)$ является решением обратной задачи для $s \in [0, f(t_0)]$. Из леммы 2 следует, что функция $u(x,t)$, являющаяся решением задачи (1.1)–(1.3) с этой функцией $b(s)$ такова, что $u \in C^3(Q_{t_0})$.

Проинтегрировав уравнение (1.1) с условием $u_t(0,t) = f'(t)$, получим

$$u_t(x,t) = f'(t)e^{-ax} - \int_0^x e^{-a(x-z)}b(u(z,t))u_z(z,t)dz, \quad (x,t)\in Q_{t_0}. \tag{3.1}$$

Введя функцию

$$q(s) = \int_0^s b(\xi)d\xi,$$

перепишем уравнение (3.1) в виде

$$u_t(x,t) = f'(t)e^{-ax} - \int_0^x e^{-a(x-z)}\frac{\partial}{\partial z}q(u(z,t))dz, \quad (x,t)\in Q_{t_0}.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$u_t(x,t) = f'(t)e^{-ax} - q(u(x,t)) + e^{-ax}q(u(0,t)) + a\int_0^x e^{-a(x-z)}q(u(z,t))dz, \quad (x,t)\in Q_{t_0}.$$

Положив $x = l$ и использовав условия (1.2), (1.6), получим

$$q(f(t)) = g'(t)e^{al} - f'(t) + q(g(t)))e^{al} - a\int_0^l e^{az}q(u(z,t))dz, \quad 0\le t\le t_0.$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$b(f(t))f'(t) = g''(t)e^{al} - f''(t) + b(g(t))g'(t)e^{al} - a\int_0^l e^{az}b(u(z,t))u_t(z,t)dz, \quad 0\le t\le t_0. \tag{3.2}$$

Используя это уравнение, найдем значение функции $b(s)$ при $s = 0$. Полагая в уравнении (3.2) $t = 0$ и учитывая формулу $u_t(x,0) = f'(0)e^{-ax}$, получаем $b(0)f'(0) = g''(0)e^{al} - f''(0) + b(0)g'(0)e^{al} - ab(0)f'(0)l$. Принимая во внимание условие (1.7), имеем

$$b(0) = (g''(0)e^{al} - f''(0))(af'(0)l)^{-1}. \tag{3.3}$$

Дифференцируя уравнение (3.2), получаем

$$\begin{aligned} b'(f(t))(f'(t))^2 + b(f(t))f''(t) = g'''(t)e^{al} - f'''(t) + b'(g(t))(g'(t))^2e^{al} + b(g(t))g''(t)e^{al} -\\ - a\int_0^l e^{az}b'(u(z,t))(u_t(z,t))^2dz - a\int_0^l e^{az}b(u(z,t))u_{tt}(z,t)dz, \quad 0\le t\le t_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Используем это уравнение для определения значения $b'(0)$. Найдем сначала производную $u_{tt}(x,t)$ при $t = 0$. Так как из уравнения (1.1) и условий (1.2), (1.3) следует, что $u_{tt}(x,0)$ является решением задачи

$$u_{xtt}(x,0) + au_{tt}(x,0) = ab(0)f'(0)e^{-ax}, \quad 0\le x\le l, \quad u_{tt}(0,0) = f''(0),$$

то

$$u_{tt}(x,0) = f''(0)e^{-ax} + ab(0)f'(0)e^{-ax}x.$$

Таким образом, значения производной $u_{tt}(x,0)$ определяются уже найденной величиной $b(0)$. Полагая $t = 0$ в уравнении (3.4), получаем уравнение для определения значения $b'(0)$

$$\begin{aligned} b'(0)\left[(f'(0))^2 - (g'(0))^2e^{al} + a\int_0^l (f'(0))^2e^{-az}dz\right] =\\ = g'''(0)e^{al} - f'''(0) + b(0)[g''(0)e^{al} - f''(0)] - ab(0)\int_0^l e^{az}u_{tt}(z,0)dz. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Так как из условия (1.7) следует, что

$$(f'(0))^2 - (g'(0))^2e^{al} + a\int_0^l (f'(0))^2e^{-az}dz > 0,$$

то из уравнения (3.5) величина $b'(0)$ определяется однозначно.

Дифференцируя уравнение (3.4), имеем

$$\begin{gathered}b''(f(t))(f'(t))^3 = -3b'(f(t))f'(t)f''(t) - b(f(t))f'''(t) + g''''(t)e^{al} - f''''(t) + \\ + b''(g(t))(g'(t))^3e^{al} + 3b'(g(t))g'(t)g''(t)e^{al} + b(g(t))g'''(t)e^{al} - \\ - a\int_0^l e^{az}b''(u(z,t))(u_t(z,t))^3dz - 3a\int_0^l e^{az}b'(u(z,t))u_t(z,t)u_{tt}(z,t)dz - a\int_0^l e^{az}b(u(z,t))u_{ttt}(z,t)dz, \quad 0 \le t \le t_0.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Используя уравнение (3.6), можно однозначно определить величину $b''(0)$. Действительно, из задачи (1.1)–(1.3) следует, что значения производных $u_t(x,0)$, $u_{tt}(x,0)$ и $u_{ttt}(x,0)$ определяются уже найденными значениями $b(0)$ и $b'(0)$.

Полагая $t = 0$ в уравнении (3.6) и учитывая то, что

$$(f'(0))^3 - (g'(0))^3e^{al} + a\int_0^l (f'(0))^3e^{-2az}dz > 0,$$

получаем уравнение для $b''(0)$, из которого это значение определяется однозначно.

Таким образом, мы показали, что если функция $b(s)$ является решением обратной задачи, то значения $b(0)$, $b'(0)$ и $b''(0)$ однозначно определяются заданными функциями $f(t)$, $g(t)$ и их производными при $t = 0$. Далее значения $b(0)$, $b'(0)$ и $b''(0)$ считаются известными.

Введем множество функций

$$\bar{K}_{t_0} = \{k \in C[0, f(t_0)],\ k(0) = b''(0),\ |k(s_1) - k(s_2)| \le L|s_1 - s_2|,\ \forall s_1, s_2 \in [0, f(t_0)]\},$$

где числа $t_0$ и $L$ таковы, что $t_0 \in (0, T]$, $L > 0$ и

$$b(0) > |b'(0)|f(t_0) + (|b''(0)| + Lf(t_0))(f(t_0))^2/2. \tag{3.7}$$

Введем оператор $D$, отображающий функции $k \in \bar{K}_{t_0}$ в функции $b(s;k)$:

$$b(s;k) = (Dk)(s) \equiv b(0) + b'(0)s + \int_0^s (s - z)k(z)dz, \qquad s \in [0, f(t_0)].$$

Очевидно, что функции $b(s;k) = (Dk)(s)$ принадлежат пространству $C^2[0, f(t_0)]$ и, в силу неравенства (3.7), положительны на отрезке $[0, f(t_0)]$.

Продолжим функцию $b(s;k)$ с отрезка $[0, f(t_0)]$ на всю прямую так, чтобы полученная функция удовлетворяла условиям леммы 2. Из лемм 1 и 2 следует, для этой продолженной функции $b(s;k)$ существует единственная функция $u \in C^3[Q_{t_0}]$, являющаяся решением задачи (1.1)–(1.3) на множестве $Q_{t_0}$, причем она однозначно определяется значениями функции $b(s;k)$ на отрезке $[0, f(t_0)]$. Следовательно, эта функция однозначно определяется функцией $k \in \bar{K}_{t_0}$. Далее это решение задачи (1.1)–(1.3) на множестве $Q_{t_0}$ будем обозначать через $u(x,t;k)$.

Перейдем к выводу нелинейного операторного уравнения для функции $k(s)$. Обозначим через $p(s)$ функцию, обратную к $s = f(t)$, $t \in [0, t_0]$. Введем на множестве $\bar{K}_{t_0}$ оператор $A$, определяемый следующим образом:

$$\begin{gathered}(Ak)(s) = \left[g''''(p(s))e^{al} - f''''(p(s))\right]h(s) + \left[b(g(p(s));k)g'''(p(s))e^{al} - b(s;k)f'''(p(s)\right]h(s) + \\ + 3\left[b'(g(p(s));k)g'(p(s))g''(p(s))e^{al} - b'(s;k)f'(p(s))f''(p(s))\right]h(s) + \\ + k(g(p(s)))(g'(p(s)))^3e^{al}h(s) - ah(s)\int_0^l e^{az}b(u(z,p(s);k);k)u_{ttt}(z,p(s);k)dz -\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$- 3ah(s)\int_0^l e^{az} b'(u(z, p(s); k); k) u_t(z, p(s); k) u_{tt}(z, p(s); k) dz -$$

$$- ah(s)\int_0^l e^{az} k(u(z, p(s); k))(u_t(z, p(s); k))^3 dz, \quad 0 \le s \le f(t_0),$$

где функция $h(s) = (f'(p(s)))^{-3}$.

Рассмотрим в пространстве $C[0, f(t_0)]$ операторное уравнение

$$k(s) = (Ak)(s), \quad 0 \le s \le f(t_0). \tag{3.9}$$

Пусть функция $\overline{k}(s)$ принадлежит множеству $\overline{K}_{t_0}$ и является решением уравнения (3.9). Покажем, что соответствующая ей функция $b(s; \overline{k})$ является решением обратной задачи для $s \in [0, f(t_0)]$. Для этого достаточно доказать, что функция $u(x, t; \overline{k})$ удовлетворяет условию (1.6). Так как функция $\overline{k}(s)$ является решением операторного уравнения (3.9), то из определения (3.8) следует, что функции $b(s; \overline{k})$ и $u(x, t; \overline{k})$ являются решением уравнения (3.6). Интегрируя уравнение (3.6) и учитывая равенства $b(0; \overline{k}) = b(0)$, $b'(0; \overline{k}) = b'(0)$, получаем, что функции $b(s; \overline{k})$ и $u(x, t; \overline{k})$ удовлетворяют уравнению (3.2). Из этого уравнения и уравнения (3.1) для функции $u(x, t; \overline{k})$ следует, что

$$u_t(l, t; \overline{k}) + \overline{q}(u(l, t; \overline{k})) = g'(t) + \overline{q}(g(t)), \quad 0 \le t \le t_0, \tag{3.10}$$

где функция

$$\overline{q}(s) = \int_0^s b(\xi; \overline{k}) d\xi.$$

Интегрируя уравнение (3.10) с условием $u(l, 0; \overline{k}) = g(0) = 0$, получаем, что $u(l, t; \overline{k}) = g(t)$ для $t \in [0, t_0]$. Следовательно, $b(s; \overline{k})$ является решением обратной задачи для $s \in [0, f(t_0)]$.

Таким образом, мы показали, что для доказательства теоремы существования решения обратной задачи достаточно доказать существование решения нелинейного операторного уравнения (3.9), принадлежащего множеству $\overline{K}_{t_0}$.

Докажем, что существуют такие $t_0 \in (0, T]$ и $L > 0$, что оператор $A$ отображает множество $\overline{K}_{t_0}$ в себя и является сжимающим на этом множестве.

Из определения (3.8) оператора $A$ и уравнения для определения числа $b''(0)$ следует, что $(Ak)(0) = b''(0)$ для всех $k \in \overline{K}_{t_0}$.

Найдем условия, при которых функция $(Ak)(s)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L$ для всех $k \in \overline{K}_{t_0}$. Пусть $M_1$ – положительная постоянная. Выберем числа $t_0 \in (0, T]$ и $L > 0$ так, что

$$f(t_0) L \le M_1. \tag{3.11}$$

При выполнении этого условия для функции $b(s; k)$, где $k \in \overline{K}_{t_0}$, справедливы оценки (2.12) с постоянными $c_5$, $c_6$, $c_7$, не зависящими от $L$. Учитывая условие (3.11) получаем, что для функции $u(x, t; k)$, где $k \in \overline{K}_{t_0}$, выполнены оценки (2.13), (2.15), (2.16) с постоянными $c_8$, $c_9$, $c_{10}$, не зависящими от $L$.

Рассмотрим функцию

$$R_1(s, \xi, \theta; k) = (g'(p(s)))^3 g'(p(\xi)) p'(\xi) e^{al} h(s) +$$

$$+ ah(s)\int_0^l e^{az} (u_t(z, p(s); k))^3 u_t(z, p(\theta); k) p'(\theta) dz, \quad s, \xi, \theta \in [0, f(t_0)].$$

Так как

$$R_1(0,0,0;k) = (g'(0))^4 e^{al}(f'(0))^{-4} + a(f'(0))^{-4}\int_0^l e^{az}(u_t(z,0;k))^4 dz(1+2e^{-3al})/3,$$

то существуют $t_0 \in (0,T]$ и постоянная $M_2 \in (0,1)$ такие, что

$$0 < R_1(s,\xi,\theta;k) \le M_2, \quad s,\xi,\theta \in [0, f(t_0)], \quad \forall k \in \bar{K}_{t_0}. \tag{3.12}$$

Используя оценки для функций $b(s;k)$, $u(x,t;k)$ и их производных, учитывая их независимость от $L$ и принимая во внимание неравенство (3.12), получаем, что

$$|(Ak)(s_1) - Ak)(s_2)| \le (M_3 + LM_2)|s_1 - s_2| \quad \forall s_1, s_2 \in [0, f(t_0)], \quad \forall k \in \bar{K}_{t_0}, \tag{3.13}$$

где $M_3$ – положительная постоянная, не зависящая от $L$.

Выберем число $L$ так, что

$$L \ge M_3(1 - M_2)^{-1}. \tag{3.14}$$

Тогда из неравенств (3.13), (3.14) следует, что функция $(Ak)(s)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L$ для всех $k \in \bar{K}_{t_0}$. Таким образом, оператор $A$ отображает множество $\bar{K}_{t_0}$ в себя.

Найдем условия, при которых оператор $A$ является сжимающим на множестве $\bar{K}_{t_0}$.

Рассмотрим функцию

$$R_2(s;k) = (g'(p(s)))^3 e^{al} h(s) + ah(s)\int_0^l e^{az}(u_t(z,p(s);k))^3 dz, \quad s \in [0, f(t_0)].$$

Так как $R_2(0;k) = (1 + e^{-2al})/2$, то существует число $t_0 \in (0,T]$ и постоянная $M_4 \in (0,1)$ такие, что

$$0 < R_2(s;k) \le M_4, \quad s \in [0, f(t_0)], \quad \forall k \in \bar{K}_{t_0}. \tag{3.15}$$

Пусть функции $k_1(s)$ и $k_2(s)$ принадлежат множеству $\bar{K}_{t_0}$. Из леммы 3 и неравенства (3.11) следует, что для функций $u(x,t;k_1)$ и $u(x,t;k_2)$ справедливы оценки (2.7)–(2.10) с постоянными $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, не зависящими от $L$ и $t_0$. Используя эти оценки и неравенство (3.15), получаем, что

$$\|Ak_1 - Ak_2\|_{C[0,f(t_0)]} \le (M_5 t_0 + M_4)\|k_1 - k_2\|_{C[0,f(t_0)]}, \tag{3.16}$$

где $M_5$ – положительная постоянная, не зависящая от $L$ и $t_0$. Тогда если $t_0 \in (0,T]$ таково, что

$$M_5 t_0 + M_4 < 1, \tag{3.17}$$

то из неравенства (3.16) следует, что оператор $A$ является сжимающим на множестве $\bar{K}_{t_0}$.

Выберем положительные числа $L$ и $t_0 \le T$ такими, что они удовлетворяют неравенствам (3.7), (3.11), (3.14) и (3.17). Легко видеть, что такие $L$ и $t_0$ существуют. Определив с этими постоянными множество $\bar{K}_{t_0}$, мы получим, что оператор $A$ отображает это множество в себя и является сжимающим на $\bar{K}_{t_0}$. Следовательно, существует функция $\bar{k} \in \bar{K}_{t_0}$, являющаяся решением операторного уравнения (3.9). Как было показано выше, функция $b(s;\bar{k})$ представляет собой решение обратной задачи для $s \in [0, f(t_0)]$. Теорема доказана.

Отметим, что основанное на методе сжимающих отображений доказательство теоремы существования представляет собой обоснование итерационного метода решения обратной задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1980.
2. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. *Kabanikhin S.I., Lorenzi A.* Identification problems of wave phenomena. VSP. The Netherlands, 1999.
4. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.

5. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer, 2006.
6. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство. Новосибирск, 2008.
7. *Cannon J.R., Du Chateau P.* An inverse problem for an unknown source term in a wave equation // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. № 3. P. 553–564.
8. *Cavaterra C.* An inverse problem for semilinear wave equation // Boll. Un. Mat. Ital. (B). 1988.V. 2. № 3. P. 695–711.
9. *Graselli M.* Local existence and uniqueness for a quasilinear hyperbolic inverse problem // Appl. Anal. 1989. V. 32. № 1. P. 15–30.
10. *Shcheglov A.Yu.* The inverse problem of determination of a nonlinear source in a hyperbolic equation // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1998. V. 6. № 6. P. 625–644.
11. *Денисов А.М.* Существование решения обратной задачи для квазилинейного уравнения гиперболического типа // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 9. С. 1155–1164.
12. *Денисов А.М., Ширкова Э.Ю.* Обратная задача для квазилинейного гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 9. С. 1091–1099.
13. *Денисов А.М.* Интегро-функциональное уравнение, возникающее при исследовании обратной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 9. С. 1207–1217.
14. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Том 2. М.: Гостехтеориздат, 1951.
15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.