ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 4, с. 597–610

УДК 517.958

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛЭМБА В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА

Х. Х. Ильясов[1,*], А. В. Кравцов[1,], С. В. Кузнецов[1,***], С. Я. Секерж-Зенькович[1,****]**

([1] 117526 Москва, пр-т Вернадского, 101, Ин-т проблем механ.; 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т, Россия)

**e-mail: ilyasov@ipmnet.ru*

***e-mail: avkravtsow@rambler.ru*

****e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru*

*****e-mail: sekerzh@gmail.com*

Поступила в редакцию 03.10.2018 г.
Переработанный вариант 14.11.2018 г.
Принята к публикации 14.11.2018 г.

Рассматривается задача Лэмба для силы, приложенной к границе упругого полупространства в случае, когда коэффициент Пуассона принимает предельное значение 1/2. Решение представляется в виде контурных интегралов, для которых приводятся асимптотические оценки при больших значениях полярного радиуса. Библ. 5.

Ключевые слова: упругая среда, уравнения Ламэ, коэффициент Пуассона, полюс Рэлея, асимптотические оценки контурных интегралов.

DOI: 10.1134/S0044466919040057

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Пусть упругая среда занимает полупространство. В случае малых относительных перемещений уравнения Ламэ имеют вид

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор перемещения, λ, μ, ρ – соответственно параметры Ламэ и плотность упругой среды. Пусть к свободной поверхности S упругой среды приложена внешняя нагрузка $\mathbf{n}p$, где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к S. Следуя [1], граничные условия на свободной поверхности зададим в виде

$$2\mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n} + \lambda\mathbf{n}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \rho g\mathbf{n}(\mathbf{n},\mathbf{u}) + \mu[\mathbf{n},\mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathbf{n}p,$$

где g – ускорение силы тяжести (вектор силы тяжести противоположен вектору $\mathbf{n}$). Считаем, что p зависит от точки свободной поверхности и времени.

Согласно теории предельного перехода будем считать, что коэффициент Пуассона $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \to \dfrac{1}{2} - 0$, а модуль Юнга $E = (3\lambda + 2\mu)(1 - 2\nu) \to +0$ так, что отношение $\dfrac{E}{1 - 2\nu}$ остается конечным, не равным нулю. Тем самым $\mu = \dfrac{E}{2(1 + \nu)} \to +0$, что означает отсутствие в упругой среде волн сдвига. Тогда уравнения для перемещений и граничные условия на S примут соответственно вид

$$\lambda\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \rho g u_z = p.$$

Представим вектор перемещений в виде $\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi$ и введем цилиндрическую систему координат (r,θ,z), для которой поверхность S совпадает с плоскостью $z = 0$ и орт оси z сонаправлен с вектором $\mathbf{n}$. Считая, что внешняя нагрузка имеет вид $p(r,t) = p_0 f(r)\cos\omega t$, где $f(r)$ –заданная функция, допускающая разложение в интеграл Фурье–Бесселя, а p_0, ω – заданные постоянные величины, получаем скалярную задачу

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi, \quad r > 0, \quad z \le 0, \quad t > 0, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}},$$

$$\rho\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{z=0} + \rho g\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = p_0 f(r)\cos\omega t, \quad r > 0, \quad t > 0,$$

которая должна быть дополнена граничными условиями на бесконечности. А именно, потребуем, чтобы функция φ описывала уходящую в бесконечность волну и $|\varphi| \to +0$ при $(r^2 + z^2)^{1/2} \to +\infty$.

Так как нагрузка не зависит от угловой переменной θ, то периодическое по времени решение будем искать в виде

$$\varphi(r,z,t) = \operatorname{Re}\{\Phi(r,z)e^{i\omega t}\}.$$

Для комплексной амплитуды $\Phi(r,z)$ получим

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{a^2}\Phi = 0, \quad r > 0, \quad z \le 0,$$

$$\rho g\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} - \rho\omega^2\Phi\Big|_{z=0} = p_0 f(r), \quad r > 0, \quad |\Phi| \to +0, \quad (r^2 + z^2)^{1/2} \to +\infty, \quad z \le 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} + ik_R\Phi = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to +\infty, \quad z \le 0, \quad k_R = \frac{\omega}{a}\sqrt{1 + \frac{\omega^2 a^2}{g^2}}.$$

Величина k_R носит название размерного полюса Рэлея.

Далее считаем, что функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = \frac{l^3}{(r^2 + l^2)^{3/2}}, \quad l > 0.$$

Введем безразмерные переменные и безразмерную комплексную амплитуду по формулам

$$r_a = \frac{\omega}{a}r, \quad z_a = \frac{\omega}{a}z, \quad \Phi^{(a)} = \frac{\omega^2}{a^2}\Phi.$$

Обозначим

$$l_a = \frac{\omega}{a}l, \quad \beta = \frac{g}{\omega a}, \quad \kappa_R = \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}}.$$

Тогда для $\Phi^{(a)}$ получим задачу

$$\Delta\Phi^{(a)} + \Phi^{(a)} = 0, \quad r_a > 0, \quad z_a \le 0,$$

$$\beta\left.\frac{\partial\Phi^{(a)}}{\partial z_a}\right|_{z_a=0} - \Phi^{(a)}\Big|_{z_a=0} = \frac{p_0}{\rho a^2}f(r_a), \quad r_a > 0, \quad \left|\Phi^{(a)}\right| \to +0, \quad (r_a^2 + z_a^2)^{1/2} \to +\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(a)}}{\partial r_a} + i\kappa_R\Phi^{(a)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{r_a}}\right), \quad r_a \to +\infty, \quad z \le 0,$$

где

$$f(r_a) = \frac{l_a^3}{(r_a^2 + l_a^2)^{3/2}}.$$

Заметим, что для образа Фурье–Бесселя данной функции имеет место формула [2]

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr_a) f(r_a) r_a dr_a = l_a^2 \mathrm{e}^{-l_a x}, \quad x > 0.$$

Поэтому будем искать решение задачи (1) в виде комплексного интеграла

$$\Phi^{(a)}(r_a, z_a) = \frac{p_0 l_a^2}{\rho a^2} \int_L \frac{J_0(\kappa r_a)\kappa}{\beta\sqrt{\kappa^2 - 1} - 1} \mathrm{e}^{z_a\sqrt{\kappa^2-1} - l_a\kappa} d\kappa, \tag{2}$$

где L – кривая, состоящая из отрезка $\gamma^{(u)}$: $[0, 1 - \rho_1]$ на верхнем берегу разреза $[-1, 1]$, отрезка γ_3: $[1 + \rho_1, \kappa_R - \rho_2]$, луча γ_5: $[\kappa_R + \rho_2, +\infty)$ и полуокружностей C_1: $\kappa = 1 + \rho_1 \mathrm{e}^{is}$, C_2: $\kappa = \kappa_R + \rho_2 \mathrm{e}^{is}$, $s \in [0, \pi]$, пробегаемых по часовой стрелке, $J_0(\kappa r_a)$ – функция Бесселя нулевого индекса аргумента κr_a, а под $\sqrt{\kappa^2 - 1} := y(\kappa)$ понимается однозначная аналитическая ветвь двузначной функции $\sqrt{\kappa^2 - 1}$, определенная на всей комплексной плоскости с разрезом $[-1, 1]$ и положительная при действительном $\kappa > 1$. На $\gamma^{(u)}$ функция $y(\kappa)$ доопределена своими предельными значениями.

Покажем, что интеграл (2) удовлетворяет уравнению в (1) и граничному условию при $z = 0$. Для этого убедимся, что данный интеграл можно дважды дифференцировать по параметрам r_a и z_a под знаком интеграла. Представим данный интеграл в виде суммы пяти интегралов: по отрезкам, лучу и полуокружностям. Рассмотрим сначала интеграл по лучу γ_5 $(\kappa = x \geq \kappa_R + \rho_2)$. Подынтегральная функция

$$h(r_a, z_a, x) = \frac{J_0(xr_a)x}{\beta\sqrt{x^2 - 1} - 1} \mathrm{e}^{z_a\sqrt{x^2-1} - l_a x}$$

непрерывна по совокупности переменных (r_a, x) при фиксированном z_a и по (z_a, x) при фиксированном r_a вместе с частными производными $\frac{\partial h}{\partial r_a}, \frac{\partial h}{\partial z_a}, \frac{\partial^2 h}{\partial r_a^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial z_a^2}$. Интеграл вдоль γ_5 от $h(r_a, z_a, x)$ сходится при любом фиксированном $r_a > 0$ по признаку сравнения

$$\lim_{x \to +\infty} |h(r_a, z_a, x)| x^2 = 0.$$

Интегралы вдоль γ_5 от $\frac{\partial h}{\partial r_a}, \frac{\partial h}{\partial z_a}$ сходятся равномерно соответственно по $r_a > 0$, $z_a \leq 0$ по признаку Вейерштрасса. Это следует из оценок

$$\left|\frac{\partial h}{\partial r_a}\right| = \frac{|J_1(xr_a)| x^2}{\left|\beta\sqrt{x^2 - 1} - 1\right|} \mathrm{e}^{z_a\sqrt{x^2-1} - l_a x} < \frac{x^2 \mathrm{e}^{-l_a x}}{\left|\beta\sqrt{x^2 - 1} - 1\right|},$$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial z_a}\right| = \frac{|J_0(xr_a)| x\sqrt{x^2 - 1}}{\left|\beta\sqrt{x^2 - 1} - 1\right|} \mathrm{e}^{z_a\sqrt{x^2-1} - l_a x} < \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{\left|\beta\sqrt{x^2 - 1} - 1\right|} \mathrm{e}^{-l_a x}.$$

Покажем, что интегралы от $\dfrac{\partial^2 h}{\partial r_a^2}$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial z_a^2}$ вдоль γ_5 сходятся равномерно соответственно по $r_a \geq \delta$, $z_a \leq 0$, где δ – любое положительное число. Имеем

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial r_a^2}\right| \leq \frac{\left|J_1'(xr_a)\right| x^3}{\left|\beta\sqrt{x^2-1}-1\right|}\mathrm{e}^{-l_a x} \leq \left\{\left|J_0(xr_a)\right| + \frac{\left|J_1(xr_a)\right|}{xr_a}\right\}\frac{x^3\mathrm{e}^{-l_a x}}{\left|\beta\sqrt{x^2-1}-1\right|} <$$

$$< \left(1+\frac{1}{xr_a}\right)\frac{x^3\mathrm{e}^{-l_a x}}{\left|\beta\sqrt{x^2-1}-1\right|} \leq \left(1+\frac{1}{x\delta}\right)\frac{x^3\mathrm{e}^{-l_a x}}{\left|\beta\sqrt{x^2-1}-1\right|},$$

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial z_a^2}\right| \leq \frac{\left|J_0(xr_a)\right| x(x^2-1)}{\left|\beta\sqrt{x^2-1}-1\right|}\mathrm{e}^{-l_a x} < \frac{x^3\mathrm{e}^{-l_a x}}{\left|\beta\sqrt{x^2-1}-1\right|}.$$

Мы воспользовались соотношениями [2] $J_0'(x) = -J_1(x)$, $J_1'(x) = J_0(x) - \dfrac{1}{x}J_1(x)$.

Таким образом, интеграл вдоль γ_5 от $h(r_a, z_a, x)$ имеет непрерывные частные производные по r_a, z_a первого и второго порядков и они равны интегралам от соответствующих частных производных функции $h(r_a, z_a, x)$.

Рассмотрим функцию трех комплексных переменных

$$h(\tilde{r}, \tilde{z}, \kappa) = \frac{J_0(\kappa\tilde{r})\kappa}{\beta\sqrt{\kappa^2-1}-1}\mathrm{e}^{\tilde{z}\sqrt{\kappa^2-1}-l_a\kappa},$$

где $\tilde{r}$, $\tilde{z}$ изменяются на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, а $\kappa \in C_k^-$ $(k = 1,2)$ (индекс a для краткости опускаем). Она аналитична по переменной $\tilde{r}$ на всей комплексной плоскости при фиксированных $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, $\kappa \in C_k^-$ и по переменной $\tilde{z}$ на всей комплексной плоскости при фиксированных $\tilde{r} \in \mathbb{C}$, $\kappa \in C_k^-$. То же самое относится к частным производным $\dfrac{\partial h}{\partial \tilde{r}}, \dfrac{\partial h}{\partial \tilde{z}}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial \tilde{r}^2}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial \tilde{z}^2}$. Кроме того, и сама функция $h(\tilde{r}, \tilde{z}, \kappa)$ и ее указанные частные производные непрерывны по совокупности двух переменных $(\tilde{r}, \kappa)$, $(\tilde{z}, \kappa)$ при фиксированной третьей. Поэтому интегралы вдоль C_k^- от $h(\tilde{r}, \tilde{z}, \kappa)$ аналитичны на всей комплексной плоскости по переменным $\tilde{r}$ и $\tilde{z}$, а частные производные первого и второго порядков от указанных интегралов равны интегралам от частных производных функции $h(\tilde{r}, \tilde{z}, \kappa)$ всюду на $\mathbb{C}$, а стало быть и при $\tilde{r} = r_a > 0$, $\tilde{z} = z_a \leq 0$.

Аналогичным образом доказывается, что интегралы вдоль $\gamma^{(u)}$, γ_3 также можно дифференцировать два раза по параметрам $r_a > 0$ и $z_a \leq 0$ под знаком интеграла. Таким образом,

$$\Delta\Phi^{(a)} = \frac{p_0 l_a^2}{\rho a^2}\int_L \left\{-\frac{\kappa}{r_a}J_1(\kappa r_a) - \kappa^2 J_0(\kappa r_a) + \frac{\kappa}{r_a}J_1(\kappa r_a) + (\kappa^2-1)J_0(\kappa r_a)\right\}\frac{\kappa\mathrm{e}^{z_a\sqrt{\kappa^2-1}-l_a\kappa}}{\beta\sqrt{\kappa^2-1}-1}d\kappa =$$

$$= -\frac{p_0 l_a^2}{\rho a^2}\int_L J_0(\kappa r_a)\frac{\kappa\mathrm{e}^{z_a\sqrt{\kappa^2-1}-l_a\kappa}}{\beta\sqrt{\kappa^2-1}-1}d\kappa = -\Phi^{(a)},$$

т.е. $\Delta\Phi^{(a)} + \Phi^{(a)} = 0$.

Покажем, что граничное условие при $z_a = 0$ $(r_a > 0)$ также удовлетворяется. Имеем

$$\beta\left.\frac{\partial\Phi^{(a)}}{\partial z_a}\right|_{z_a=0} - \left.\Phi^{(a)}\right|_{z_a=0} = \frac{p_0 l_a^2}{\rho a^2}\int_L J_0(\kappa r_a)\kappa\mathrm{e}^{-l_a\kappa}d\kappa = \frac{p_0 l_a^2}{\rho a^2}\left\{\int_{\gamma^{(u)}}\ldots + \int_{C_1^-}\ldots + \int_{\gamma_3}\ldots + \int_{C_2^-}\ldots + \int_{\gamma_5}\ldots\right\} =$$

$$= \frac{p_0 l_a^2}{\rho a^2}\int_0^{+\infty} J_0(xr_a)x\mathrm{e}^{-l_a x}dx = \frac{p_0 l_a^3}{\rho a^2}\frac{1}{(r_a^2 + l_a^2)^{3/2}} = \frac{p_0}{\rho a^2}f(r_a).$$

Мы заменили интегралы по C_1^-, C_2^- интегралами по отрезкам $[1-\rho_1, 1+\rho_1]$, $[\kappa_R-\rho_2, \kappa_R+\rho_2]$ соответственно в силу аналитичности функции $J_0(\kappa r_a)\kappa e^{-l_a\kappa}$ по переменной κ, а затем воспользовались соотношением [2]

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr_a)xe^{-l_ax}dx = \frac{l_a}{(r_a^2+l_a^2)^{3/2}}.$$

Для безразмерных комплексных амплитуд перемещений $U_z^{(a)}(r_a,z_a)$ и $U_r^{(a)}(r_a,z_a)$ получаем выражения

$$\begin{aligned} U_z^{(a)}(r_a,z_a) &= \frac{p_0l_a^2}{\rho a^2}\int_L \frac{J_0(\kappa r_a)\kappa\sqrt{\kappa^2-1}}{\beta\sqrt{\kappa^2-1}-1}e^{z_a\sqrt{\kappa^2-1}-l_a\kappa}d\kappa, \\ U_r^{(a)}(r_a,z_a) &= -\frac{p_0l_a^2}{\rho a^2}\int_L \frac{J_1(\kappa r_a)\kappa^2}{\beta\sqrt{\kappa^2-1}-1}e^{z_a\sqrt{\kappa^2-1}-l_a\kappa}d\kappa. \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что формальное интегральное представление решения задачи Лэмба в случае распределенной нагрузки для $0<\nu<1/2$ получено в [3]. Там же проведено сравнение аналитического и численного решений. В работе [4] начально-краевая задача Лэмба для полупространства решалась методом конечных элементов.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Функция $y(\kappa)$ положительна при $\kappa = x > 1$. Тогда для ее значений при $\kappa = \pm i\sigma$, $\sigma > 0$, и на берегах разреза $[-1,1]$, т.е. при $\kappa = x \pm i0$, $-1 < x < 1$, будем соответственно иметь

$$y(\pm i\sigma) = \pm i\sqrt{\sigma^2+1}, \quad y(x\pm i0) = \pm i\sqrt{1-x^2}.$$

Проведем на комплексной плоскости κ дополнительный разрез по лучу $(-\infty,-1]$. Функции Бесселя в подынтегральных выражениях в (2) и (3) представим в виде полусуммы функций Ханкеля I и II рода

$$J_m(\kappa r_a) = \frac{1}{2}\{H_m^{(1)}(\kappa r_a) + H_m^{(2)}(\kappa r_a)\}, \quad m = 0, 1,$$

под которыми понимаем такие однозначные аналитические в области $-\pi < \arg\kappa < \pi$ функции, что при $\kappa = x > 0$ их полусумма действительна. Итак, подынтегральные функции комплексной переменной κ мы будем рассматривать на всей комплексной плоскости с разрезом вдоль луча $(-\infty,1]$. Это подобласть области определения функции $y(\kappa)$. Заметим, что значения функции $H_m^{(n)}(\kappa r_a)$, $m=0,1$, $n=1,2$, при $\kappa = x\pm i0$, $0<x<1$ совпадают в силу ее аналитичности в области $-\pi < \arg\kappa < \pi$.

Обозначим через C_R и C'_R дуги окружностей $\kappa = Re^{is}$, $s\in[0,\pi/2]$ и $\kappa = Re^{is}$, $s\in[-\pi/2,0]$, через l_R, l'_R, γ_R отрезки $[i\rho_3, iR]$, $[-iR,-i\rho_4]$, $[\kappa_R+\rho_2, R]$ соответственно через $\gamma_1^{(u)}$, $\gamma_2^{(u)}$ отрезки $[\rho_3, 1-\rho_1]$, $[1-\rho_1, 1-\rho_5]$ $(\rho_5<\rho_1)$ на верхнем берегу разреза $(-\infty,1]$ соответственно через $\gamma_4^{(l)}$ отрезок $[\rho_4, 1-\rho_5]$ на нижнем берегу разреза $(-\infty,1]$, проходимый справа налево, через C_3 и C_4 дуги окружностей $\kappa=\rho_3e^{is}$, $s\in[0,\pi/2]$ и $\kappa=\rho_4e^{is}$, $s\in[-\pi/2,0]$ и через C_5 окружность $\kappa = 1+\rho_5e^{is}$, $s\in[-\pi,\pi]$.

Введем также обозначения

$$h_0^{(n)}(\kappa) = \frac{p_0l_a^2}{2\rho a^2}\frac{H_0^{(n)}(\kappa r_a)\kappa\sqrt{\kappa^2-1}}{\beta\sqrt{\kappa^2-1}-1}e^{z_a\sqrt{\kappa^2-1}-l_a\kappa},$$

$$h_1^{(n)}(\kappa) = -\frac{p_0l_a^2}{2\rho a^2}\frac{H_1^{(n)}(\kappa r_a)\kappa^2}{\beta\sqrt{\kappa^2-1}-1}e^{z_a\sqrt{\kappa^2-1}-l_a\kappa},$$

$$h^{(n)}(\kappa) = \frac{p_0 l_a^2}{2\rho a^2} \frac{H_0^{(n)}(\kappa r_a)\kappa}{\beta\sqrt{\kappa^2-1}-1} e^{z_a\sqrt{\kappa^2-1}-l_a\kappa}, \quad n = 1, 2.$$

Интегралы от $h_m^{(n)}$ и $h^{(n)}(\kappa)$ вдоль L будем понимать как предел при $R \to +\infty$, $\rho_3 \to +0$ интегралов

$$\int_{L_1} h_m^{(n)}(\kappa)d\kappa, \quad \int_{L_1} h^{(n)}(\kappa)d\kappa, \quad L_1 = C_3^- \cup \gamma_1^{(u)} \cup C_1^- \cup \gamma_3 \cup C_2^- \cup \gamma_R.$$

Пусть Γ_1 – замкнутая кусочно гладкая кривая вида $\Gamma_1 = L_1 \cup C_R \cup l_R^-$, проходимая против часовой стрелки. По теореме Коши имеем

$$\int_{\Gamma_1} h_m^{(1)}(\kappa)d\kappa = 0, \quad \int_{\Gamma_1} h^{(1)}(\kappa)d\kappa = 0, \quad m = 0,1. \tag{4}$$

Покажем, что

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} h_m^{(1)}(\kappa)d\kappa = 0, \quad m = 0,1. \tag{5}$$

Пусть $\kappa = Re^{is}$, $s \in [0,\pi/2]$. Тогда

$$|I_{Rm}| := \left|\int_{C_R} h_m^{(1)}(\kappa)d\kappa\right| \le \int_0^{\pi/2} \left|h_m^{(1)}(Re^{is})\right| Rds.$$

Для достаточно большого R и любого $s \in [0,\pi/2]$ справедливы неравенства

$$\left|\sqrt{R^2e^{2is}-1}\right| < 2R, \quad \left|e^{z_a\sqrt{R^2e^{2is}-1}}\right| \le 1.$$

Мы учли, что $\arg(\sqrt{R^2e^{2is}-1})$ изменяется на сегменте $[0,\pi]$. Поэтому

$$|I_{Rm}| < \frac{p_0 l_a^2}{\rho a^2} \frac{R^3}{\beta\sqrt{R^2-1}-1} \int_0^{\pi/2} \left|H_m^{(1)}(r_a Re^{is})\right| e^{-l_a R\cos s} ds. \tag{6}$$

Считая, что $R \gg 1$, воспользуемся асимптотикой функции Ханкеля [2]. Вместо (6) будем иметь

$$|I_{Rm}| < \frac{R^{5/2}}{\beta\sqrt{R^2-1}-1}\left(A_1 + \frac{A_2}{R}\right) \int_0^{\pi/2} e^{-r_a R\sin s - l_a R\cos s} ds < \frac{AR^{5/2}}{\beta\sqrt{R^2-1}-1} \int_0^{\pi/2} e^{-r_a R\sin s - l_a R\cos s} ds, \quad A_1 = \frac{p_0 l_a^2}{\rho a^2\sqrt{\pi r_a}}, \tag{7}$$

A_2 – некоторое положительное число, не зависящее от R, $A = A_1 + A_2$. Интеграл в правой части (7) оценивается также, как при доказательстве леммы Жордана [5]

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r_a R\sin s - l_a R\cos s} ds \le e^{-Rl_a} \int_0^{\pi/2} e^{2R(l_a - r_a)s/\pi} ds = \frac{\pi}{2R}(e^{-Rr_a} - e^{-Rl_a}).$$

Отсюда

$$0 \le |I_{Rm}| < \frac{\pi}{2} \frac{AR^{3/2}}{\beta\sqrt{R^2-1}-1}(e^{-Rr_a} - e^{-Rl_a}) \to +0, \quad R \to +\infty,$$

т.е. $I_{Rm} \to +0$ при $R \to +\infty$.

Покажем, что

$$\lim_{\rho_3\to+0} \int_{C_3^-} h_m^{(1)}(\kappa)d\kappa = 0, \quad m = 0,1.$$

Пусть $\kappa = \rho_3 e^{is}$, $s \in [0,\pi/2]$. Тогда

$$|I_{3m}| := \left|\int_{C_3^-} h_m^{(1)}(\kappa)d\kappa\right| \le \int_0^{\pi/2} \left|h_m^{(1)}(\rho_3 e^{is})\right| \rho_3 ds.$$

Для $\rho_3 \in (0,1)$ и любого $s \in [0,\pi/2]$ справедливы неравенства

$$\left|e^{z_a\sqrt{\rho_3^2 e^{2is}-1}}\right| \le 1, \quad \left|e^{-l_a\rho_3 e^{is}}\right| \le 1, \quad \left|\sqrt{\rho_3^2 e^{2is}-1}\right| \le \sqrt{1+\rho_3^2} < 2.$$

Оценим $\beta\sqrt{\rho_3^2 e^{2is}-1}-1$ при достаточно малом ρ_3 и любом $s \in [0,\pi/2]$. Для абсолютной величины будем иметь

$$\left|\beta\sqrt{\rho_3^2 e^{2is}-1}-1\right| = \left|\beta d(s) e^{i(\pi/2-\psi(s))}-1\right| = \{\beta^2 d^2(s) - 2\beta d(s)\sin\psi(s)+1\}^{1/2},$$

где

$$d(s) = (\rho_3^4 - 2\rho_3^2\cos 2s + 1)^{1/4}, \quad \psi(s) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho_3^2\sin 2s}{1-\rho_3^2\cos 2s}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\left|\beta\sqrt{\rho_3^2 e^{2is}-1}-1\right| > \{\beta^2 d^2(s) - \beta d(s)+1\}^{1/2} \ge \{\beta^2(\rho_3^4-2\rho_3^2+1)^{1/2} - \beta(\rho_3^4+2\rho_2^2+1)+1\}^{1/2} = \\ = \{\beta^2(1-\rho_3^2)^2 - \beta(\rho_3^2+1)^2+1\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что правая часть (8) стремится к $(\beta^2-\beta+1)^{1/2} > 0$ при $\rho_3 \to +0$.

Представим функции Ханкеля в виде

$$H_m^{(1)}(\kappa) = J_m(\kappa) + iN_m(\kappa), \quad m = 0,1,$$

где $N_m(\kappa)$ – функция Неймана индекса m. Известно [2], что при $\arg\kappa \in (-\pi,\pi)$

$$N_0(\kappa) = \frac{2}{\pi}J_0(\kappa)\left(\ln\frac{\kappa}{2}+C\right) + f(\kappa), \quad N_1(\kappa) = \frac{2}{\pi}J_1(\kappa)\left(\ln\frac{\kappa}{2}+C\right) - \frac{2}{\pi\kappa} + g(\kappa),$$

где $f(\kappa)$, $g(\kappa)$ – целые функции, $\ln\kappa = \ln|\kappa| + i\arg\kappa$, а C – постоянная Эйлера. Тогда для достаточно малого ρ_3 и всех $s \in [0,\pi/2]$

$$\left|H_0^{(1)}(r_a\rho_3 e^{is})\right| \le C_0(r_a)\left\{1+\frac{2}{\pi}\left(|\ln\rho_3| + \left|\ln\frac{r_a}{2}\right| + \frac{\pi}{2} + C\right)\right\} + C_2(r_a) := A_0(r_a,\rho_3),$$

$$\left|H_1^{(1)}(r_a\rho_3 e^{is})\right| \le C_1(r_a)\left\{1+\frac{2}{\pi}\left(|\ln\rho_3| + \left|\ln\frac{r_a}{2}\right| + \frac{\pi}{2} + C\right)\right\} + \frac{2}{\pi\rho_3} + C_3(r_a) := A_1(r_a,\rho_3),$$

где $C_1(r_a)$, $C_2(r_a)$ не зависят от ρ_3. Мы воспользовались тем, что функции $J_m(\kappa r_a)$, $f(\kappa r_a)$, $g(\kappa r_a)$ ограничены в окрестности точки $\kappa = 0$ при любом фиксированном r_a. Следовательно,

$$0 \le |I_{3m}| < \frac{p_0 l_a^2 \rho_3^{2+m} A_m(r_a,\rho_3)}{\rho a^2\left\{\beta^2(1-\rho_3^2)^2 - \beta(1+\rho_3^2)^2+1\right\}^{1/2}} \to +0, \quad \rho_3 \to +0,$$

т.е. $I_{3m} \to +0$ при $\rho_3 \to +0$. Аналогичным образом доказывается, что интегралы по $C_R\, C_3^-$ от $h^{(1)}(\kappa)$ также стремятся к нулю. Перейдем в (4) к пределу при $R \to +\infty$, $\rho_3 \to +0$. Тогда

$$\int_L h_0^{(1)}(\kappa)d\kappa = -I_z^{(1)}, \quad \int_L h_1^{(1)}(\kappa)d\kappa = -I_r^{(1)}, \quad \int_L h^{(1)}(\kappa)d\kappa = -I^{(1)}, \tag{9}$$

где $I_z^{(1)}$, $I_r^{(1)}$, $I^{(1)}$ есть интегралы по неотрицательной части мнимой оси. Они имеют вид

$$I_z^{(1)} = \frac{p_0 l_a^2}{\pi\rho a^2}\int_0^{+\infty}\frac{K_0(\sigma r_a)\sigma\sqrt{\sigma^2+1}}{i\beta\sqrt{\sigma^2+1}-1}e^{iz_a\sqrt{\sigma^2+1}-il_a\sigma}d\sigma,$$

$$I_r^{(1)} = i\frac{p_0 l_a^2}{\pi\rho a^2}\int_0^{+\infty}\frac{K_1(\sigma r_a)\sigma^2}{i\beta\sqrt{\sigma^2+1}-1}e^{iz_a\sqrt{\sigma^2+1}-il_a\sigma}d\sigma,$$

$$I^{(1)} = -i\frac{p_0 l_a^2}{\pi\rho a^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{K_0(\sigma r_a)\sigma}{i\beta\sqrt{\sigma^2+1}-1}e^{iz_a\sqrt{\sigma^2+1}-il_a\sigma}d\sigma,$$

$K_0(r_a\sigma)$, $K_1(r_a\sigma)$ – функции Макдональда нулевого и первого индексов. Мы воспользовались соотношениями [2]

$$H_0^{(1)}(-i\sigma) = -i\frac{2}{\pi}K_0(\sigma), \quad H_1^{(1)}(-i\sigma) = -\frac{2}{\pi}K_1(\sigma).$$

Интегралы от $h_m^{(2)}(\kappa)$ вдоль L_1 представим в виде суммы интегралов вдоль $L_2 = C_3^- \cup \gamma_1^{(u)}$ и $L_3 = C_1^- \cup \gamma_3 \cup C_2^- \cup \gamma_R$. Пусть Γ_2 – замкнутая кусочно гладкая кривая вида $\Gamma_2 = \gamma_2^{(u)} \cup C_5^- \cup \gamma_4^{(l)} \cup C_4^- \cup l_R' \cup C_R' \cup L_3^-$, проходимая против часовой стрелки. По основной теореме теории вычетов

$$\int\limits_{\Gamma_2} h_m^{(2)}(\kappa)d\kappa = 2\pi i\,\mathrm{Res}[h_m^{(2)}(\kappa),\kappa_R], \quad \int\limits_{\Gamma_2} h^{(2)}(\kappa)d\kappa = 2\pi i\,\mathrm{Res}[h^{(2)}(\kappa),\kappa_R]. \tag{10}$$

Подобно тому, как это было сделано выше, можно показать, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R'} h_m^{(2)}(\kappa)d\kappa = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{C_R'} h^{(2)}(\kappa)d\kappa = 0,$$

$$\lim_{\rho_4\to+0}\int\limits_{C_4^-} h_m^{(2)}(\kappa)d\kappa = \lim_{\rho_4\to+0}\int\limits_{C_4^-} h^{(2)}(\kappa)d\kappa = 0, \quad m = 0,1.$$

Покажем, что

$$\lim_{\rho_5\to+0}\int\limits_{C_5^-} h_m^{(2)}(\kappa)d\kappa = 0, \quad m = 0,1.$$

Пусть $\kappa = 1+\rho_5 e^{is}$, $s\in[-\pi,\pi]$. Тогда имеем

$$|I_{5m}| := \left|\int\limits_{C_5} h_m^{(2)}(\kappa)d\kappa\right| \le \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|h_m^{(2)}(1+\rho_5 e^{is})\right|\rho_5 ds.$$

Для достаточно малого ρ_5 и любого $s\in[-\pi,\pi]$ справедливы неравенства

$$\left|(1+\rho_5 e^{is})^2\right| < (1+\rho_5)^2 < 4, \quad \left|\sqrt{(1+\rho_5 e^{is2})-1}\right| \le \sqrt{2\rho_5+\rho_5^2} < 2,$$

$$\left|\beta\sqrt{(1+\rho_5 e^{is})^2-1}-1\right| \ge 1-\beta\sqrt{2\rho_5+\rho_5^2}, \quad \left|(1+\rho_5 e^{is})\sqrt{(1+\rho_5 e^{is})^2-1}\right| < 2(1+\rho_5) < 4,$$

$$\left|e^{-l_a(1+\rho_5 e^{is})}\right| \le e^{-l_a(1-\rho_5)} < 1, \quad \left|e^{z_a\sqrt{(1+\rho_5 e^{is})^2-1}}\right| \le e^{-z_a\sqrt{2\rho_5+\rho_5^2}} < e^{-2z_a}.$$

Функции $H_m^{(2)}(r_a\kappa)$ аналитичны в окрестности точки $\kappa = 1$, а следовательно, ограничены там, т.е. для любого $s\in[-\pi,\pi]$, любого достаточно малого ρ_5 и фиксированного r_a

$$\left|H_m^{(2)}(r_a(1+\rho_5 e^{is}))\right| \le C_{2m}(r_a).$$

Поэтому

$$0 \le |I_{5m}| < C'(r_a)\frac{4p_0 l_a^2\pi}{\rho a^2}\frac{\rho_5 e^{-2z_a}}{1-\beta\sqrt{2\rho_5+\rho_5^2}} \to +0, \quad \rho_5\to+0,$$

где $C'(r_a) = \max\{C_{20}(r_a), C_{21}(r_a)\}$, т.е. $I_{5m}\to+0$ при $\rho_5\to+0$. Точно также доказывается, что интеграл по C_5 от $h^{(2)}(\kappa)$ стремится к нулю.

Перейдем в равенствах (10) к пределу при $R\to+\infty$, $\rho_4\to+0$, $\rho_5\to+0$. Учитывая, что

$$\lim_{\rho_3\to+0}\int\limits_{L_2}\ldots + \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{L_3}\ldots = \int\limits_{L}\ldots,$$

окончательно получаем

$$\int_L h_0^{(2)}(\kappa)d\kappa = I_z^{(2)} + I_{z(u)} - I_{z(l)} - 2\pi i\,\mathrm{Res}[h_0^{(2)}(\kappa), \kappa_R],$$

$$\int_L h_1^{(2)}(\kappa)d\kappa = I_r^{(2)} + I_{r(u)} - I_{r(l)} - 2\pi i\,\mathrm{Res}[h_1^{(2)}(\kappa), \kappa_R],$$

$$\int_L h^{(2)}(\kappa)d\kappa = I^{(2)} + I_{(u)} + I_{(l)} - 2\pi i\,\mathrm{Res}[h^{(2)}(\kappa), \kappa_R],$$

где $I_z^{(2)}$, $I_r^{(2)}$, $I^{(2)}$ – интегралы по неположительной мнимой оси, $I_{z(u)}$, $I_{z(l)}$, $I_{r(u)}$, $I_{r(l)}$, $I_{(u)}$, $I_{(l)}$ – интегралы по отрезкам на берегах разреза. Указанные интегралы имеют вид

$$I_z^{(2)} = \frac{p_0 l_a^2}{\pi\rho a^2}\int_0^{+\infty}\frac{K_0(\sigma r_a)\sigma\sqrt{\sigma^2+1}}{i\beta\sqrt{\sigma^2+1}+1}\mathrm{e}^{-iz_a\sqrt{\sigma^2+1}+il_a\sigma}d\sigma,$$

$$I_r^{(2)} = i\frac{p_0 l_a^2}{\pi\rho a^2}\int_0^{+\infty}\frac{K_1(\sigma r_a)\sigma^2}{i\beta\sqrt{\sigma^2+1}+1}\mathrm{e}^{-iz_a\sqrt{\sigma^2+1}+il_a\sigma}d\sigma,$$

$$I^{(2)} = -i\frac{p_0 l_a^2}{\pi\rho a^2}\int_0^{+\infty}\frac{K_0(\sigma r_a)\sigma}{i\beta\sqrt{\sigma^2+1}+1}\mathrm{e}^{-iz_a\sqrt{\sigma^2+1}+il_a\sigma}d\sigma,$$

$$I_{z(u)} = i\frac{p_0 l_a^2}{2\rho a^2}\int_0^1\frac{H_0^{(2)}(xr_a)x\sqrt{1-x^2}}{i\beta\sqrt{1-x^2}-1}\mathrm{e}^{iz_a\sqrt{1-x^2}-l_a x}dx,$$

$$I_{z(l)} = i\frac{p_0 l_a^2}{2\rho a^2}\int_0^1\frac{H_0^{(2)}(xr_a)x\sqrt{1-x^2}}{i\beta\sqrt{1-x^2}+1}\mathrm{e}^{-iz_a\sqrt{1-x^2}-l_a x}dx,$$

$$I_{r(u)} = -\frac{p_0 l_a^2}{2\rho a^2}\int_0^1\frac{H_1^{(2)}(xr_a)x^2}{i\beta\sqrt{1-x^2}-1}\mathrm{e}^{iz_a\sqrt{1-x^2}-l_a x}dx,$$

$$I_{r(l)} = \frac{p_0 l_a^2}{2\rho a^2}\int_0^1\frac{H_1^{(2)}(xr_a)x^2}{i\beta\sqrt{1-x^2}+1}\mathrm{e}^{-iz_a\sqrt{1-x^2}-l_a x}dx,$$

$$I_{(u)} = \frac{p_0 l_a^2}{2\rho a^2}\int_0^1\frac{H_0^{(2)}(xr_a)x}{i\beta\sqrt{1-x^2}-1}\mathrm{e}^{iz_a\sqrt{1-x^2}-l_a x}dx,$$

$$I_{(l)} = \frac{p_0 l_a^2}{2\rho a^2}\int_0^1\frac{H_0^{(2)}(xr_a)x}{i\beta\sqrt{1-x^2}+1}\mathrm{e}^{-iz_a\sqrt{1-x^2}-l_a x}dx,$$

$K_0(r_a\sigma)$, $K_1(r_a\sigma)$ – функции Макдональда нулевого и первого индексов. Мы воспользовались соотношениями [2] в виде

$$H_0^{(2)}(-i\sigma) = i\frac{2}{\pi}K_0(\sigma), \quad H_1^{(2)}(-i\sigma) = -i\frac{2}{\pi}K_1(\sigma).$$

Отметим, что интегралы по отрезкам $[0, 1-\rho_1]$ и $[1-\rho_1, 1]$ на верхнем берегу разреза мы объединили в один по отрезку $[0,1]$. Для комплексных амплитуд получаем формулы

$$\Phi^{(a)}(r_a, z_a) = -I^{(1)} + I^{(2)} + I_{(u)} - I_{(l)} - 2\pi i\,\mathrm{Res}[h^{(2)}(\kappa), \kappa_R], \tag{11}$$

$$\begin{gathered} U_z^{(a)}(r_a, z_a) = -I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + I_{z(u)} - I_{z(l)} - 2\pi i\,\mathrm{Res}[h_0^{(2)}(\kappa), \kappa_R], \\ U_r^{(a)}(r_a, z_a) = -I_r^{(1)} + I_r^{(2)} + I_{r(u)} - I_{r(l)} - 2\pi i\,\mathrm{Res}[h_1^{(2)}(\kappa), \kappa_R]. \end{gathered} \tag{12}$$

Покажем, что при $r_a \gg 1$ интегралы в правых частях (11), (12) асимптотически малы по сравнению с вычетами в полюсе Рэлея κ_R.

Оценим сначала интегралы $I_z^{(m)}$, $I_r^{(m)}$, $I^{(m)}$ $(m = 1, 2)$. При любых $r_a > 0$, $z_a \le 0$ имеем

$$\left|I_z^{(m)}\right| \le B\int_0^{+\infty} K_0(r_a\sigma)\sigma\sqrt{\sigma^2+1}d\sigma \le \sqrt{2}B\int_0^1 K_0(r_a\sigma)\sigma d\sigma + \sqrt{2}B\int_1^{+\infty} K_0(r_a\sigma)\sigma^2 d\sigma <$$

$$< \sqrt{2}B\int_0^{+\infty} K_0(r_a\sigma)\sigma d\sigma + \sqrt{2}B\int_0^{+\infty} K_0(r_a\sigma)\sigma^2 d\sigma = \frac{\sqrt{2}B}{r_a^2} + \frac{\pi B}{\sqrt{2}r_a^3} < \frac{C_1}{r_a^2},$$

$$\left|I_r^{(m)}\right| \le B\int_0^{+\infty} K_1(r_a\sigma)\sigma^2 d\sigma = \frac{2B}{r_a^3}, \quad \left|I^{(m)}\right| \le B\int_0^{+\infty} K_0(r_a\sigma)\sigma d\sigma = \frac{B}{r_a^2}, \quad B = \frac{p_0 l_a^2}{\pi\rho a^2}.$$

Мы воспользовались формулой [2] в виде

$$\int_0^{+\infty} K_\nu(r_a\sigma)\sigma^\mu d\sigma = 2^{\mu-1} r_a^{-\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)$$

при $\nu = 0$, $\mu = 1, 2$ и при $\nu = 1$, $\mu = 2$. Отсюда получаем, что

$$I_z^{(m)} = O\left(\frac{1}{r_a^2}\right), \quad I_r^{(m)} = O\left(\frac{1}{r_a^3}\right), \quad I^{(m)} = O\left(\frac{1}{r_a^2}\right)$$

при любых $r_a > 0$, $z_a \le 0$, а следовательно, при $r_a \gg 1$ и любом $z_a \le 0$. Оценим интегралы по берегам разреза. Рассмотрим, например, интеграл $I_{z(u)}$. Представим его в виде

$$I_{z(u)} = iB\frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{1/\sqrt{r_a}} \ldots + \int_{1/\sqrt{r_a}}^1 \ldots\right\} := iB\frac{\pi}{2}(I_1 + I_2), \quad r_a \gg 1.$$

Тогда

$$\left|I_{z(u)}\right| \le B\frac{\pi}{2}(|I_1| + |I_2|), \quad |I_1| \le \int_0^{1/\sqrt{r_a}} \left|H_0^{(2)}(xr_a)\right| x dx = \frac{1}{r_a^2}\int_0^{\sqrt{r_a}} \left|H_0^{(2)}(s)\right| s ds < \frac{C_2}{r_a^{5/4}}.$$

Последнее неравенство справа имеет место, поскольку для непрерывной на сегменте $[0, \sqrt{r_a}]$ функции $\left|H_0^{(2)}(s)\right| s$

$$\lim_{r_a \to +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{r_a}} \left|H_0^{(2)}(s)\right| s ds}{r_a^{3/4}} = \lim_{r_a \to +\infty} \frac{2\left|H_0^{(2)}\left(\sqrt{r_a}\right)\right|}{3r_a^{-1/4}} = \frac{2^{3/2}}{3\pi^{1/2}}.$$

На сегменте $[1/\sqrt{r_a}, 1]$ при $r_a \gg 1$ значение аргумента xr_a функции Ханкеля $H_0^{(2)}(xr_a)$ также много больше единицы. Поэтому для всех x из указанного сегмента функцию Ханкеля можно представить асимптотической формулой [2]. Для I_2 будем иметь

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi r_a}}\int_{1/\sqrt{r_a}}^1 \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}{i\beta\sqrt{1-x^2}-1} e^{i(z_a\sqrt{1-x^2} - xr_a + \pi/4)} e^{-l_a x} dx + O\left(\frac{1}{r_a^{3/2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{r_a}}\int_{1/\sqrt{r_a}}^1 f_1(x)\cos\left(z_a\sqrt{1-x^2} - xr_a + \frac{\pi}{4}\right)dx +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{r_a}}\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1} f_2(x)\sin\left(z_a\sqrt{1-x^2}-xr_a+\frac{\pi}{4}\right)dx- \tag{13}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{r_a}}\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1} f_2(x)\cos\left(z_a\sqrt{1-x^2}-xr_a+\frac{\pi}{4}\right)dx-$$

$$-\frac{i}{\sqrt{r_a}}\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1} f_1(x)\sin\left(z_a\sqrt{1-x^2}-xr_a+\frac{\pi}{4}\right)dx+O\left(\frac{1}{r_a^{3/2}}\right),$$

где

$$f_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}{1+\beta^2(1-x^2)}\mathrm{e}^{-l_a x},\qquad f_2(x)=\beta\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{x}(1-x^2)}{1+\beta^2(1-x^2)}\mathrm{e}^{-l_a x}.$$

Интегралы в (13) оцениваются однотипно. Рассмотрим, например, первый, обозначив его через I_{21}. Имеем

$$I_{21}=-\frac{1}{\sqrt{r_a}}\left\{\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1} g_1(x)\cos\left(xr_a-\frac{\pi}{4}\right)dx+\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1} g_2(x)\sin\left(xr_a-\frac{\pi}{4}\right)dx\right\}, \tag{14}$$

где

$$g_1(x)=f_1(x)\cos(z_a\sqrt{1-x^2}),\qquad g_2(x)=f_1(x)\sin(z_a\sqrt{1-x^2}).$$

Отметим, что функции $g_1(x)$, $g_2(x)$ непрерывны на $[0,1]$ и непрерывно дифференцируемы соответственно на $(0,1)$ и $(0,1]$. Кроме того, производные $g_k'(x)$, $k=1,2$ абсолютно интегрируемы на $[0,1]$, поскольку при $x\in(0,1)$ имеют место оценки

$$\left|g_k'(x)\right|<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+l_a+|z_a|+2\beta^2\right). \tag{15}$$

Поэтому для I_{21} справедлива формула интегрирования по частям. Тогда вместо (14) будем иметь

$$I_{21}=\frac{1}{r_a^{3/2}}\left\{-g_1(x)\sin\left(xr_a-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{1/\sqrt{r_a}}^{1}+\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1} g_1'(x)\sin\left(xr_a-\frac{\pi}{4}\right)dx\right\}+$$

$$+\frac{1}{r_a^{3/2}}\left\{g_2(x)\cos\left(xr_a-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{1/\sqrt{r_a}}^{1}-\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1} g_2'(x)\cos\left(xr_a-\frac{\pi}{4}\right)dx\right\}.$$

Так как функции $g_k(x)$, $k=1,2$, непрерывны на сегменте $[0,1]$, то ограничены на нем, а следовательно, равномерно ограничены на сегменте $[1/\sqrt{r_a},1]$, т.е. $|g_k(x)|\le C_3$ для любого $x\in[1/\sqrt{r_a},1]$ и любого $r_a>1$. Отсюда с учетом (15) имеем

$$|I_{21}|\le\frac{1}{r_a^{3/2}}\left\{2C_3+\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1}\left|g_1'(x)\right|dx+\int\limits_{1/\sqrt{r_a}}^{1}\left|g_2'(x)\right|dx\right\}<\frac{1}{r_a^{3/2}}\left\{2C_3+\int\limits_0^1\left|g_1'(x)\right|dx+\int\limits_0^1\left|g_2'(x)\right|dx\right\}<$$

$$<\frac{2}{r_a^{3/2}}\left\{C_3+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{\pi}{2}+l_a+|z_a|+2\beta^2\right)\right\}=\frac{C_4(z_a)}{r_a^{3/2}}.$$

Мы воспользовались оценками (15).

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что четвертый интеграл в (13) имеет такую же оценку, как и I_{21}, а второй и третий, обозначим их I_{2k}, $k = 2,3$, оценку

$$\left|I_{2k}\right| < \frac{C_6}{r_a^{3/2}}, \quad C_6 = 2\left\{C_5 + \beta\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(3 + l_a + |z_a| + 2\beta^2)\right\},$$

где C_5 – постоянная, которая равномерно ограничивает функции

$$f_2(x)\cos(z_a\sqrt{1-x^2}), \quad f_2(x)\sin(z_a\sqrt{1-x^2}).$$

Тем самым имеем

$$\left|I_2\right| < \frac{C_7(z_a)}{r_a^{3/2}}, \quad C_7 = 2\{C_4(z_a) + C_6(z_a)\},$$

$$\left|I_{z(u)}\right| < \frac{C'}{r_a^{5/4}}, \quad C' = B\frac{\pi}{2}\{C_2 + C_7(z_a)\},$$

т.е. $I_{z(u)} = O(1/r_a^{5/4})$ при $r_a \gg 1$ и любом фиксированном $z_a \le 0$. Точно также можно показать, что $I_{z(l)} = O(1/r_a^{5/4})$, $I_{(u)} = O(1/r_a^{5/4})$, $I_{(l)} = O(1/r_a^{5/4})$ при тех же r_a и z_a.

Оценим интегралы $I_{r(u)}$, $I_{r(l)}$. При этом подробных пояснений делать не будем. Представим $I_{r(u)}$ в виде

$$I_{r(u)} = B\frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{1/\sqrt{r_a}}\ldots + \int_{1/\sqrt{r_a}}^{1}\ldots\right\} := B\frac{\pi}{2}(I_3 + I_4), \quad r_a \gg 1.$$

Откуда имеем

$$\left|I_{r(u)}\right| \le B\frac{\pi}{2}(|I_3| + |I_4|), \quad |I_3| \le \int_0^{1/\sqrt{r_a}}\left|H_1^{(2)}(xr_a)\right|x^2dx = \frac{1}{r_a^3}\int_0^{\sqrt{r_a}}\left|H_1^{(2)}(s)\right|s^2ds < \frac{C_2'}{r_a^{7/4}},$$

так как верно

$$\lim_{r_a\to+\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{r_a}}\left|H_1^{(2)}(s)\right|s^2ds}{r_a^{5/4}} = \lim_{r_a\to+\infty}\frac{2\left|H_1^{(2)}(\sqrt{r_a})\right|}{5r_a^{-1/4}} = \frac{2^{3/2}}{5\pi^{1/2}}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
I_4 &= i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi r_a}}\int_{1/\sqrt{r_a}}^{1}\frac{x^{3/2}e^{-l_a x}}{i\beta\sqrt{1-x^2}-1}e^{i(z_a\sqrt{1-x^2}-xr_a+\pi/4)}dx + O\left(\frac{1}{r_a^{3/2}}\right) = \\
&= -\frac{i}{\sqrt{r_a}}\int_{1/\sqrt{r_a}}^{1}f_3(x)\cos\left(z_a\sqrt{1-x^2} - xr_a + \frac{\pi}{4}\right)dx - \\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{r_a}}\int_{1/\sqrt{r_a}}^{1}f_4(x)\sin\left(z_a\sqrt{1-x^2} - xr_a + \frac{\pi}{4}\right)dx - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{r_a}}\int_{1/\sqrt{r_a}}^{1}f_4(x)\cos\left(z_a\sqrt{1-x^2} - xr_a + \frac{\pi}{4}\right)dx + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{r_a}}\int_{1/\sqrt{r_a}}^{1}f_3(x)\sin\left(z_a\sqrt{1-x^2} - xr_a + \frac{\pi}{4}\right)dx + O\left(\frac{1}{r_a^{3/2}}\right),
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{x^{3/2}e^{-l_a x}}{1+\beta^2(1-x^2)}, \quad f_4(x) = \beta\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{x^{3/2}\sqrt{1-x^2}e^{-l_a x}}{1+\beta^2(1-x^2)}.$$

Интегралы в (16) оцениваются также, как в (13). Приведем конечный результат:

$$|I_4| < \frac{C_7'}{r_a^{3/2}}, \quad C_7' = 2[C_4'(z_a) + C_6'(z_a)],$$

$$C_4'(z_a) = 2\left\{C_3' + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{2} + l_a + \frac{\pi}{2}|z_a| + 2\beta^2\right)\right\},$$

$$C_6'(z_a) = 2\left\{C_5' + \beta\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} + l_a + |z_a| + 2\beta^2\right)\right\},$$

а C_3', C_5' – постоянные, которыми при $x \in [0,1]$ равномерно ограничены соответственно функции

$$f_3(x)\cos(z_a\sqrt{1-x^2}), \quad f_3(x)\sin(z_a\sqrt{1-x^2}),$$

$$f_4(x)\cos(z_a\sqrt{1-x^2}), \quad f_4(x)\sin(z_a\sqrt{1-x^2}).$$

Окончательная оценка для $I_{r(u)}$ имеет вид

$$|I_{r(u)}| < \frac{C''(z_a)}{r_a^{3/2}}, \quad C''(z_a) = B\frac{\pi}{2}\{C_2' + C_7'(z_a)\},$$

т.е. $I_{r(u)} = O(1/r_a^{3/2})$ при $r_a \gg 1$ и любом фиксированном $z_a \le 0$. Аналогичная оценка имеет место для $I_{r(l)}$ при тех же r_a и z_a. Рассуждая так же, как и выше, можно получить, что $I_{(u)} = O(1/r_a^{5/4})$, $I_{(u)} = O(1/r_a^{5/4})$, где $r_a \gg 1$ и $z_a \le 0$ фиксировано.

В силу полученных ранее равномерных по $r_a > 0$, $z_a \le 0$ оценок интегралы $I_z^{(m)}$, $I_r^{(m)}$, $I^{(m)}$ стремятся к нулю при $(r_a^2 + z_a^2)^{1/2} \to +\infty$. Покажем, что все интегралы по берегам разреза также стремятся к нулю при $(r_a^2 + z_a^2)^{1/2} \to +\infty$. Для них полученные ранее оценки уже неприменимы, так как они неравномерны относительно z_a. Получим равномерные. Например, для $I_{z(u)}$ имеем

$$|I_{z(u)}| \le \frac{\pi B}{2}\int_0^1 \left|H_0^{(2)}(xr_a)\right| x dx = \frac{\pi B}{2r_a^2}\int_0^{r_a}\left|H_0^{(2)}(s)\right| s ds \le \frac{C'}{\sqrt{r_a}} \to +0, \quad (r_a^2 + z_a^2)^{1/2} \to +\infty.$$

Аналогичным образом доказывается, что и остальные интегралы по берегам разреза равномерно стремятся к нулю. Вычисляя вычеты в (11), (12), для $\Phi^{(a)}(r_a, z_a)$, $U_z^{(a)}(r_a, z_a)$ и $U_r^{(a)}(r_a, z_a)$ будем иметь

$$\Phi^{(a)}(r_a, z_a) = -i\frac{\pi^2 B}{\beta^2}H_0^{(2)}\left(\frac{r_a}{\beta}\sqrt{1+\beta^2}\right)e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}} + O\left(\frac{1}{r_a^{5/4}}\right),$$

$$U_z^{(a)}(r_a, z_a) = -i\frac{\pi^2 B}{\beta^3}H_0^{(2)}\left(\frac{r_a}{\beta}\sqrt{1+\beta^2}\right)e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}} + O\left(\frac{1}{r_a^{5/4}}\right),$$

$$U_r^{(a)}(r_a, z_a) = i\pi^2 B\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta^3}H_1^{(2)}\left(\frac{r_a}{\beta}\sqrt{1+\beta^2}\right)e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}} + O\left(\frac{1}{r_a^{3/2}}\right).$$

Заметим, что

$$\left|H_m^{(2)}\left(\frac{r_a}{\beta}\sqrt{1+\beta^2}\right)e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}}\right| \le \left|H_m^{(2)}\left(\frac{r_a}{\beta}\sqrt{1+\beta^2}\right)\right| \to +0,$$

при $(r_a^2 + z_a^2)^{1/2} \to +\infty$. Отсюда и из доказанного выше следует, что $\left|\Phi^{(a)}(r_a, z_a)\right| \to +0$ при $(r_a^2 + z_a^2)^{1/2} \to +\infty$.

Используя асимптотику функций Ханкеля на бесконечности [2], получаем

$$\Phi^{(a)}(r_a, z_a) = -i\pi^{3/2} B \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_a}} \frac{e^{i(\pi/4 - r_a\sqrt{1+\beta^2}\beta^{-1})}}{\beta^{3/2}(1+\beta^2)^{1/4}} e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}} + O\left(\frac{1}{r_a^{5/4}}\right),$$

$$U_z^{(a)}(r_a, z_a) = -i\pi^{3/2} B \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_a}} \frac{e^{i(\pi/4 - r_a\sqrt{1+\beta^2}\beta^{-1})}}{\beta^{5/2}(1+\beta^2)^{1/4}} e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}} + O\left(\frac{1}{r_a^{5/4}}\right),$$

$$U_r^{(a)}(r_a, z_a) = -\pi^{3/2} B \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_a}} \frac{(1+\beta^2)^{1/4}}{\beta^{5/2}} e^{i(\pi/4 - r_a\sqrt{1+\beta^2}\beta^{-1})} e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}} + O\left(\frac{1}{r_a^{3/2}}\right).$$

Поэтому третье условие (1) также выполняется. Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Интеграл* (2) *является решением задачи* (1) *при* $r_a > 0$, $z_a \le 0$.

Для действительных безразмерных перемещений при $r_a \gg 1$ будем иметь следующие выражения:

$$u_z^{(a)}(r_a, z_a, t) = \operatorname{Re}\{U_z^{(a)}(r_a, z_a) e^{i\omega t}\} = \pi^{3/2} B \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_a}} \frac{e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}}}{\beta^{5/2}(1+\beta^2)^{1/4}} \sin\left(\omega t - \frac{r_a}{\beta}\sqrt{1+\beta^2} + \frac{\pi}{4}\right) + f_1(r_a, z_a, t),$$

$$u_r^{(a)}(r_a, z_a, t) = \operatorname{Re}\{U_r^{(a)}(r_a, z_a) e^{i\omega t}\} = -\pi^{3/2} B \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_a}} \frac{(1+\beta^2)^{1/4}}{\beta^{5/2}} e^{(z_a - l_a\sqrt{1+\beta^2})\beta^{-1}} \times$$
$$\times \cos\left(\omega t - \frac{r_a}{\beta}\sqrt{1+\beta^2} + \frac{\pi}{4}\right) + f_2(r_a, z_a, t),$$

где $|f_1(r_a, z_a, t)| \le C_1/r_a^{5/4}$, $|f_2(r_a, z_a, t)| \le C_2/r_a^{3/2}$ для любого $t > 0$ и любого фиксированного $z_a \le 0$.

Возвращаясь к размерным переменным, получаем

$$u_z(r, z, t) = \sqrt{\frac{2\pi}{k_R r}} \frac{p_0}{\rho} \left(\frac{l\omega}{g}\right)^2 \frac{\omega^2}{g} e^{\omega^2 z/g - lk_R} \sin\left(\omega t - k_R r + \frac{\pi}{4}\right) + g_1(r, z, t),$$

$$u_r(r, z, t) = \sqrt{\frac{2\pi k_R}{r}} \frac{p_0}{\rho} \left(\frac{l\omega}{g}\right)^2 e^{\omega^2 z/g - lk_R} \cos\left(\omega t - k_R r + \frac{\pi}{4}\right) + g_2(r, z, t),$$

где $g_k(r, z, t)$ имеют ту же оценку по переменной r, что и $f_k(r_a, z_a, t)$ по переменной r_a $(k = 1, 2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bromwich T.J.I'A.* On the influence of gravity on elastic waves and, in particular, on the vibrations of an elastic Globe // Proc. London Math. Soc. 1898. V. 30. P. 98–120.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
3. *Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Внешняя пространственная задача Лэмба. Распределенная по поверхности гармоническая нагрузка // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2016. № 1. С. 50–56.
4. *Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я.* Конечноэлементные модели в задаче Лэмба // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2011. № 6. С. 160–169.
5. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967.