ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 4, с. 621–648

УДК 517.538

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКЛАССИЧЕСКИХ НЕЛОКАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1)]

© 2019 г. М. О. Корпусов

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ физ. ф-т;
117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия)

e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 01.12.2016 г.
Переработанный вариант 16.06.2017 г.
Принята к публикации 14.11.2018 г.

Рассматривается абстрактная задача Коши для некоторого нелинейного нелокального дифференциально-операторного уравнения первого порядка, причем эта задача Коши является обобщением ряда модельных физических примеров. Для абстрактной задачи Коши получены результаты о существовании непродолжаемого во времени классического решения, при некоторых достаточных условиях получены результаты о разрушении за конечное время, для которого получены двусторонние оценки. Наконец, при некоторых условиях доказана глобальная корректность задачи вне зависимости от величины начальной функции. Библ. 29.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.1134/S0044466919040069

1. ВВЕДЕНИЕ

В своих двух классических работах [1] и [2] в 1973, 1974 г. предложен новый энергетический метод исследования возникновения разрушения в двух задачах Коши для абстрактных формально параболического и формально гиперболического уравнений:

$$Pu_t = -Au + F(u), \quad u(0) = u_0,$$

$$Pu_{tt} = -Au + F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,$$

где операторы P и A линейные, а оператор $F(u)$ нелинейный. Результаты о разрушении были получены как для классических решений, так и для слабых решений. Отметим также работу [3].

В 1977 г. опубликована работа [4], в которой энергетический метод был использован для решения такой пары абстрактных задач Коши:

$$Pu_t = -Au + B(u) + F(t,u), \quad u(0) = u_0,$$

$$Pu_{tt} = -Au + B(u) - aPu_t + F(t,u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,$$

где оператор $B(u)$ может быть нелинейным. В 1997 г. вышла работа [5], в которой уже рассматривалось следующее уравнение:

$$(P(u_t))_t + A(u) + Q(t,u_t) = F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1.$$

В 1998 г. в работе [6] было рассмотрено следующее общее уравнение формально параболического типа:

$$Q(t,u,u_t) + A(t,u) = F(t,u), \quad u(0) = u_0.$$

В это же время начинает развиваться тематика доказательства разрушения решений формально гиперболических уравнений с положительной энергией. В этой связи отметим следующие работы P. Pucci и J. Serrin [7] и [8]. Отметим также недавние результаты в этом направлении [9]–[12].

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РУДН “5-100”.

Отметим, что важным развитием энергетического метода явилась работа [13], в которой рассматривалась первая начально-краевая задача для уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + a u_t |u_t|^{m-1} = b u |u|^{p-1}$$

в цилиндре $[0, T] \times \Omega$. Результат был обобщен в работах [14] и [15] на случай следующего нелинейного нелокального уравнения:

$$u_{tt} - \Delta u + \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds + |u_t|^{m-2} u_t = |u|^{p-2} u.$$

Наша работа продолжает исследования, начатые в работах [16]–[18]. В работе [18] рассматривалась абстрактная задача Коши следующего вида:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u)\right) + H_f'(u) = F_f'(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{1.1}$$

где $H_f'(u)$, $F_f'(u)$ – это производные Фреше нелинейных операторов. В этой работе мы рассмотрели классическое и слабое решения задачи Коши (1.1) и доказали результаты о существовании непродолжаемых решений, а также получили достаточные условия разрушения решений за конечное время. Для доказательства разрушения за конечное время мы пользовали нашу модификацию энергетического метода, изложенную в работе [19].

В настоящей работе мы рассмотрим абстрактную задачу Коши следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\left(A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u)\right) + L_1 u + \int\limits_0^t ds h(t-s) L_2 u(s) + DP(u) = F(u), \quad u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

где операторы A_0 и L_1, L_2, D линейные, а операторы $A_j(u)$ и $F(u)$, $P(u)$ нелинейные. Для доказательства существования сильного решения этой задачи Коши мы применим метод монотонных операторов Браудера–Минти [20], а для доказательства разрушения за конечное время применим метод энергетических оценк, развитый в работе [19].

2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

В этой работе мы рассмотрим модельные задачи о возникновении “пробоя” в кристаллических полупроводниках при наличии сильной временной дисперсии.

Начнем с рассмотрения системы уравнений квазистационарного электрического поля. Общая система уравнений в этом случае имеет следующий вид (см., например, [21]):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi n, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + Q, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{J}$ – вектор плотности тока свободных зарядов, n – концентрация свободных зарядов, наконец, слагаемое Q описывает распределение источников или стоков свободных зарядов.

Напомним, что согласно теории электричества (см., например, [21]) электрические заряды в материальных средах условно делятся на *свободные* и *связанные*. Свободные заряды могут перемещаться на макроскопические расстояния, а связанные заряды – нет. При этом электрические среды условно разделяются на *проводники*, *полупроводники* и *диэлектрики*. В проводниках связанных зарядов нет, в диэлектриках нет свободных зарядов, а в полупроводниках есть как свободные, так и связанные заряды. Поскольку в данной работе мы рассматриваем эффект “пробоя” в полупроводниках, то и займемся рассмотрением общих факторов действующих в кристаллических полупроводниках.

В полупроводниках распределение связанных зарядов определяется вектором поляризуемости среды $\mathbf{P}$, который связан с вектором индукции электрического поля $\mathbf{D}$ равенством

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \tag{2.3}$$

При этом распределение плотности связанных зарядов в полупроводнике определяется величиной

$$\rho = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать различные модели кристаллических полупроводников. В одних моделях вектор поляризуемости $\mathbf{P}$ связан с вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, например, таким соотношением

$$\mathbf{P} = \varkappa_0 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}, \quad \varkappa_0 > 0, \tag{2.5}$$

а в других моделях мы будем рассматривать непосредственно распределение связанных зарядов ρ в виде некоторой функции от потенциала ϕ электрического поля $\mathbf{E}$ (который, заметим, существует в предположении поверхностной односвязанности области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, где рассматривается система уравнений (2.1)), например, такого вида

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{P} = |\phi|^q \phi, \quad q \geq 0.$$

Теперь рассмотрим вектор плотности тока свободных зарядов $\mathbf{J}$. Во многих моделях его можно рассматривать зависящим от напряженности электрического поля следующим образом:

$$\mathbf{J} = \sigma(|\mathbf{E}|)\mathbf{E},$$

где величина $\sigma(r)$ по своему физическому смыслу есть коэффициент проводимости среды, который зависит, вообще говоря, от модуля напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Кроме того, в данной работе мы будем рассматривать случай сильной временной дисперсии, т.е. когда зависимость плотности тока свободных зарядов от напряженности поля является нелокальной. Типичный пример такой зависимости следующий:

$$\mathbf{J}(x,t) = \int_0^t ds \sigma(t-s)\mathbf{E}(x,s), \quad \sigma(t) \in \mathbb{C}[0,+\infty). \tag{2.6}$$

Наконец, обсудим слагаемое Q в правой части уравнения (2.2). Как мы уже говорили, это слагаемое описывает распределение источников или стоков свободных зарядов в полупроводнике и представляет собой функцию от потенциала ϕ самосогласованного электрического поля $\mathbf{E}$. В настоящей монографии мы рассматриваем тот важный случай, когда функция Q описывает распределение источников свободных зарядов, которое мы будем моделировать следующим образом:

$$Q(\phi) = |\phi|^q \phi, \quad q > 0. \tag{2.7}$$

Заметим, что мы будем рассматривать два механизма возникновения пробоя в кристаллических полупроводниках – это пробой, вызванный источниками свободных зарядов, распределение которых описывается функцией (2.7), или пробой, вызванный наличием отрицательной дифференциальной проводимости среды (см., например, [22]). Отрицательность дифференциальной проводимости среды учитывается тем, что вектор плотности тока электрического поля $\mathbf{J}$ связан с напряженностью поля $\mathbf{E}$ соотношением вида

$$\mathbf{J} = -\sigma(|\mathbf{E}|)\mathbf{E}, \quad \sigma(r) > 0 \quad \text{при} \quad r > 0.$$

Итак, мы будем рассматривать эти *два механизма возникновения пробоя* в кристаллических полупроводниках.

Теперь мы обсудим формулу связи индукции электрического поля $\mathbf{D}$ от напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Для этого с учетом формулы (2.3) надо обсудить различные механизмы зависимости вектора $\mathbf{P}$ от $\mathbf{E}$. Действительно, помимо формулы (2.5), которая учитывает *керровскую* зависимость вектора $\mathbf{P}$ от вектора $\mathbf{E}$ можно учесть еще так называемую *пространственную* дисперсию среды. Давайте обсудим, как учитывается пространственная дисперсия среды. Как известно (см., например, [23]), в этом случае связь $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ является операторной:

$$\mathbf{P} = \hat{\varkappa}\mathbf{E}, \tag{2.8}$$

где оператор $\hat{\varkappa}$ поляризуемости среды имеет, вообще говоря, следующий нелокальный характер:

$$\hat{\varkappa}f(x) = \int\limits_{R^3} dy \varkappa(x-y)f(y). \tag{2.9}$$

Заметим, что формула (2.9) записана для всего трехмерного эвклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Предположим, что формула (2.8) рассматривается так же во всем трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Тогда формально применим преобразование Фурье к обеим частям равенства (2.8) и получим следующее алгебраическое равенство:

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \varkappa(k)\hat{\mathbf{E}}(k), \tag{2.10}$$

где $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$ – это *волновой вектор*, соответствующий рассматриваемому преобразованию Фурье. Теперь предположим, что

$$\varkappa(k) \in \mathbb{C}^{\infty}(R^3).$$

Тогда эту функцию можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $(0,0,0) \in R^3$ с остаточным членом в форме Пеано:

$$\varkappa(k) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=1,1,1}^{n_1,n_2,n_3} c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} k_3^{\alpha_3} + \overline{o}(k_1^{n_1} k_2^{n_2} k_3^{n_3}). \tag{2.11}$$

В этом месте обычно многие физики-теоретики рассматривают вместо формулы (2.11) ее "укороченный" вариант. А именно следующую формулу:

$$\varkappa_0(k) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=1,1,1}^{n_1,n_2,n_3} c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} k_3^{\alpha_3}. \tag{2.12}$$

При этом формула (2.10) примет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \varkappa_0(k)\hat{\mathbf{E}}(k). \tag{2.13}$$

Если теперь формально применить обратное преобразование Фурье к равенству (2.13), то с учетом формулы (2.12) мы получим выражение

$$\mathbf{P}(x) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=1,1,1}^{n_1,n_2,n_3} c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \left(i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \left(i\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{\alpha_3} \mathbf{E}(x). \tag{2.14}$$

Таким образом, мы пришли к искомой модельной связи векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$. У многих физиков-теоретиков укороченная функция $\varkappa_0(k)$ имеет следующий простой вид:

$$\varkappa_0(k) = \varkappa_0|k|^2, \quad \varkappa_0 > 0, \quad |k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2.$$

И тогда выражение (2.14) примет следующий вид:

$$\mathbf{P}(x) = -\varkappa_0 \Delta_x \mathbf{E}(x), \quad \Delta_x \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{2.15}$$

Заметим, что эти рассуждения, приведшие нас к формуле (2.14), имеют "физический" характер. Кроме того, формула (2.14) выведена только для всего пространства $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Однако формально формула (2.14) корректна и для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Поэтому мы будем говорить о пространственной дисперсии и в случае произвольной области изменения переменных $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, имея в виду соотношение вида (2.14).

Теперь обсудим еще один фактор, который влияет на общую ситуацию в кристаллических полупроводниках – это наличие *внешнего электрического поля*. Пусть $\mathbf{E}_0$ – это внешнее постоянное электрическое поле. Тогда согласно общей макроскопической теории электричества (см., например, [24]) наличие этого внешнего поля приводит к возникновению тока свободных зарядов $\mathbf{J}_0$, направление которого противоположно направлению внешнего поля $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{J}_0 = en_0(\phi)\mathbf{E}_0,$$

где $n_0(\varphi)$ – есть "квазистационарное" распределение плотности свободных зарядов. Мы будем моделировать эту функцию следующим образом:

$$n_0 = n_0(\phi) = 1 + a_1\phi + a_2\phi^2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}^1. \tag{2.16}$$

Наличие этого постоянного внешнего электрического поля $\mathbf{E}_0$ приводит к появлению дополнительного слагаемого в уравнении (2.2). Именно, уравнение (2.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_0) + Q.$$

Таким образом, мы учли самые разнообразные факторы, имеющие место в кристаллических полупроводниках. Теперь давайте обсудим, каким образом мы будем учитывать все эти факторы. Поскольку все эти факторы имеют отношения к векторам $\mathbf{J}$ и $\mathbf{P}$, то и учитывать все эти факторы мы будем в виде линейной суперпозиции:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \ldots + \mathbf{J}_n, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \ldots + \mathbf{P}_n. \tag{2.17}$$

Действительно, каждое слагаемое в (2.17) отвечает за свой эффект, имеющий место в кристаллическом полупроводнике.

Приступим к рассмотрению системы уравнений квазистационарного магнитного поля в кристаллическом полупроводнике. Общая система уравнений в отсутствие тока свободных зарядов имеет следующий вид (см., например, [23]):

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M},$$

где $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{M}$ – это векторы индукции, напряженности и намагниченности магнитного поля. Данную систему уравнений необходимо дополнить уравнением, связывающим векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$. Действительно, в качестве такового уравнения возьмем уравнение Ландау–Лифшица (см. [24]):

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma[\mathbf{H}, \mathbf{M}] + \mathbf{R}, \tag{2.18}$$

где вектор $\mathbf{R}$ характеризует, в частности, распределение "источников" магнитных доменов в кристаллическом полупроводнике–магнетике. Довольно часто уравнение (2.18) можно существенно упростить, воспользовавшись тем, что вектор намагниченности представим в виде следующей суммы:

$$\mathbf{M} = \mathfrak{M} + \mathbf{m}, \quad |\mathbf{m}| \ll |\mathfrak{M}|, \tag{2.19}$$

т.е. в виде "квазистационарной" намагниченности $\mathfrak{M}$ и малой, быстропеременной добавки $\mathbf{m}$. С учетом (2.19) из (2.18) получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma[\mathbf{H}, \mathfrak{M}] + \mathbf{R}.$$

Теперь мы учтем некоторые факторы, имеющие место в кристаллических полупроводниках магнетиках.

Прежде всего заметим, что можно учесть, что квазистационарная намагниченность состоит из нескольких слагаемых, каждое из которых отвечает за учет некоторого фактора:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \cdots + \mathfrak{M}_n.$$

Во-первых, как правило, $\mathfrak{M}$ содержит линейную по полю часть вида

$$\mathfrak{M}_{1j} = a_j H_j, \quad a_j \in R^1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Во-вторых, точно также как и ранее, можно учесть сильную пространственную дисперсию кристаллического полупроводника–магнетика, т.е. следующую связь векторов $\mathfrak{M}_2$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathfrak{M}_2 = -\chi_0\Delta\mathbf{H}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{2.20}$$

Вывод уравнения (2.20) точно такой же, как и вывод уравнения (2.15). Вектор $\mathbf{R}$ также может быть записан в виде следующей суперпозиции:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \ldots + \mathbf{R}_n. \tag{2.21}$$

Можно учесть наличие “источников” доменов, описываемых формулой вида

$$\mathbf{R}_1 = -a_3|\mathbf{H}|^{p-2}\mathbf{H}, \quad a_3 > 0.$$

Наконец, учтем наличие релаксационных механизмов или, иначе говоря, сильную временную дисперсию следующего вида:

$$\mathbf{R}_2(t) = a_4\int_0^t ds h(t-s)\mathbf{H}(s), \quad a_4 \in \mathbb{R}^1, \quad h(t) \in \mathbb{C}[0,+\infty). \tag{2.22}$$

Теперь мы обсудим граничные условия для рассматриваемых систем векторных уравнений. Конечно, их вид и количество для корректной постановки рассматриваемых далее задач зависят от того факта, учитываем ли мы сильную пространственную дисперсию или нет. В основном мы будем рассматривать тот случай, когда граница материальной среды представляет собой заземленную и идеально проводящую среду. Тогда на границе $\partial\Omega$ области Ω имеют место следующие равенства:

$$\phi|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial n_x}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.23}$$

где ϕ — это потенциал электрического поля. При рассмотрении кристаллического полупроводника—магнетика мы будем рассматривать аналогичные граничные условия вида

$$\psi|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n_x}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.24}$$

где ψ — это потенциал магнитного поля.

Давайте отдельно обсудим возникновение нелинейных граничных условий для потенциала электрического поля. Действительно, предположим, что на границе кристаллического полупроводника $\partial\Omega$, занимающего область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, имеются либо стоки, либо источники поверхностных зарядов, тогда согласно граничным условиям общего вида получим граничное условие следующего вида:

$$(\mathbf{E}, n_x)|_{\partial\Omega} = \eta(x)|_{\partial\Omega}, \tag{2.25}$$

где n_x — это внешняя нормаль в точке $x \in \partial\Omega$. Предположим, что распределение поверхностных зарядов моделируется нелинейной степенной функцией вида:

$$\eta(\phi(x)) = \eta_0|\phi(x)|^q\phi(x), \quad q > 0, \tag{2.26}$$

где $\eta_0 > 0$ для стоков, а $\eta_0 < 0$ для источников свободных зарядов.

Таким образом, мы рассмотрели важные физические факторы, имеющие место в кристаллических полупроводниках, и выписали некоторые граничные условия. Теперь мы переходим к выводу разнообразных модельных нелинейных уравнений, являющихся следствиями рассмотренных в этом разделе моделей.

2.1. Уравнение нелинейных нелокальных волн ББМБ с источником

Рассмотрим кристаллический полупроводник, занимающий ограниченную поверхностно односвязанную область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$ в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^3$. Предположим, что распределение связанных зарядов в этом полупроводнике описывается формулой (2.4), т.е.

$$\rho = \operatorname{div}\mathbf{P} = P_0|\phi|^{q_1}\phi, \quad q_1 \geq 0, \quad P_0 > 0.$$

Предположим, что этот полупроводник находится во внешнем постоянном и однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0$, причем в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ выбран ортонормированный репер $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ таким образом, чтобы

$$\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_1, \quad E_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Помимо всего прочего предположим, что в полупроводнике имеет место временная дисперсия, задаваемая формулой (2.6). Пусть, кроме того, в полупроводнике имеются распределенные источники свободных зарядов, задаваемые функцией $Q(\phi)$ следующего вида:

$$Q(\phi) = Q_0|\phi|^{q_2}\phi, \quad q_2 > 0, \quad Q_0 > 0.$$

Таким образом, с учетом результатов предыдущего раздела приходим к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi, \tag{2.27}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = P_0|\phi|^{q_1}\phi,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2) + Q_0|\phi|^{q_2}\phi,$$

$$\mathbf{J}_0 = \sigma_0 n_0(\phi)\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{J}_1 = \sigma_1\int\limits_0^t ds h(t-s)\mathbf{E}(s), \quad \mathbf{J}_2 = \sigma_2\mathbf{E}, \tag{2.28}$$

где “квазистационарное” распределение свободных зарядов $n_0(\phi)$ моделируется формулой (2.16), т.е. следующим образом:

$$n_0(\phi) = 1 + a_1\phi + a_2\phi^2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}^1.$$

В “единичных” коэффициентах, т.е. когда не имеющие принципиального характера коэффициенты полагаются равными единице, из системы уравнений (2.27), (2.28) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\phi - |\phi|^{q_1}\phi) + \Delta\phi + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \phi\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \int\limits_0^t ds h(t-s)\Delta\phi(s) + |\phi|^{q_2}\phi = 0, \quad q_1 \ge 0, \quad q_2 > 0, \tag{2.29}$$

где $h(t) \in \mathbb{C}[0,+\infty)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Уравнение (2.29) в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^3$ дополним однородным граничным условием

$$\phi\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.30}$$

а также начальным условием

$$\phi(x,0) = \phi_0(x). \tag{2.31}$$

2.2. Уравнение нелинейных нелокальных волн ББМБ с нелокальным источником

Рассмотрим кристаллический полупроводник при учете тех же факторов, что и при выводе уравнения (2.29), однако при рассмотрении нелокального распределения источников свободных зарядов, описываемых функцией

$$Q(\phi) = -Q_0\left[\int\limits_\Omega dx|\nabla\phi|^2\right]^{q_2}\Delta\phi, \quad q_2 > 0. \tag{2.32}$$

Давайте обсудим физические основы появления такого рода нелинейной и нелокальной зависимости. Действительно, рассмотрим кристаллический полупроводник при наличии отрицательной проводимости, т.е. когда связь векторов тока проводимости $\mathbf{J}$ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ следующая:

$$\mathbf{J} = -\sigma_0\mathbf{E}, \quad \sigma_0 > 0. \tag{2.33}$$

Как известно, величина σ_0 имеет физический смысл коэффициента проводимости среды, который, вообще говоря, зависит от средней по области температуры. Заметим, что эта усредненная температура имеет следующий вид:

$$T = T_0 + \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega|\nabla\phi|^2 dx,$$

где T_0 — это температура фононов. Положив температуру фононов $T_0 = 0$ и взяв модельную зависимость $\sigma_0 = \sigma_0(T)$ вида

$$\sigma_0 = a_0 T^{q_2}, \quad q_2 > 0, \tag{2.34}$$

мы получим зависимость вида (2.32). Действительно, из (2.33), (2.34) вытекает следующая цепочка равенств:

$$Q(\phi) = -\operatorname{div}\mathbf{J} = a_0\sigma_0 T^{q_2}\operatorname{div}\mathbf{E} = -a_0\sigma_0\left[\int\limits_\Omega dx|\nabla\phi|^2\right]^{q_2}\Delta\phi,$$

где $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Таким образом, мы пришли к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\phi - |\phi|^{q_1}\phi) + \Delta\phi + \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \phi\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \int\limits_0^t ds h(t-s)\Delta\phi(s) - \left[\int\limits_\Omega dx|\nabla\phi|^2\right]^{q_2}\Delta\phi = 0,$$
$$q_1 \ge 0, \quad q_2 > 0,$$

где $h(t) \in \mathbb{C}[0,+\infty)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, которое нужно дополнить граничным и начальным условиями (2.30) и (2.31).

2.3. Нелокальное диссипативное уравнение типа Розенау—Бюргерса с источником

Теперь перейдем к рассмотрению кристаллического полупроводника при учете пространственной дисперсии. Итак, прежде всего учтем влияние двух факторов в векторе поляризуемости $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2. \tag{2.35}$$

Во-первых, учтем сильную пространственную дисперсию

$$\mathbf{P}_1 = -a_0\Delta\mathbf{E}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

а во-вторых, учтем керровскую нелинейность вида

$$\mathbf{P}_2 = a_1|\mathbf{E}|^{p_1-2}\mathbf{E}, \quad p_1 \ge 2, \quad a_1 > 0.$$

Предположим, что кристаллический полупроводник, занимающий область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, имеет отрицательную дифференциальную проводимость, т.е. ток проводимости $\mathbf{J}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2,$$

где

$$\mathbf{J}_1 = \sigma_0[1 - |\mathbf{E}|^{p_2-2}]\mathbf{E}, \quad \sigma_0 > 0,$$

а вектор $\mathbf{J}_2$ учитывает временную дисперсию

$$\mathbf{J}_2(t) = \int\limits_0^t ds h(t-s)\mathbf{E}(s).$$

Таким образом, мы пришли к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{J}, \tag{2.37}$$

где

$$\mathbf{P} = -a_0\Delta\mathbf{E} + a_1|\mathbf{E}|^{p_1-2}\mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \sigma_0[1 - |\mathbf{E}|^{p_2-2}]\mathbf{E} + \int\limits_0^t ds h(t-s)\mathbf{E}(s).$$

Из системы уравнений (2.36), (2.37) приходим к следующему модельному уравнению пятого порядка с единичными коэффициентами:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta^2\phi + \Delta\phi + \Delta_{p_1}\phi) + \Delta\phi + \int\limits_0^t ds h(t-s)\Delta\phi(s) - \Delta_{p_2}\phi = 0,$$

$$\Delta_p\phi \equiv \operatorname{div}(|\nabla\phi|^{p-2}\nabla\phi), \quad p \geq 2, \quad p_1 \geq 2, \quad p_2 > 2.$$

Данное уравнение в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^3$ дополним граничными условиями (2.23) и начальным условием

$$\phi(x,0) = \phi_0(x).$$

2.4. Нелинейное-нелокальное уравнение спиновых волн

Теперь мы приступим к выводу модельного нелокального-нелинейного уравнения спиновых волн в кристаллическом полупроводнике–магнетике (см. уравнения (2.18)–(2.22)). Рассмотрим следующие факторы, влияющие на вид квазистационарной намагниченности $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3, \tag{2.38}$$

где слагаемое $\mathfrak{M}_1$ линейно зависит от напряженности магнитного поля:

$$\mathfrak{M}_{1j} = a_j H_j, \quad a_j \in R^1, \quad j = 1,2,3,$$

слагаемое $\mathfrak{M}_2$ учитывает сильную пространственную дисперсию вида

$$\mathfrak{M}_2 = -a_0\Delta\mathbf{H}, \quad a_0 > 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

наконец, слагаемое $\mathfrak{M}_3$ учитывает “керровскую” нелинейность вида

$$\mathfrak{M}_3 = a_1|\mathbf{H}|^{p_1-2}\mathbf{H}, \quad a_1 > 0, \quad p_1 \geq 2.$$

Заметим, что

$$[\mathfrak{M}_2, \mathbf{H}] = [\mathfrak{M}_3, \mathbf{H}] = 0.$$

Величина $\mathbf{R}$ из формулы (2.21) учитывает два фактора. Первый – это наличие временной дисперсии

$$\mathbf{R}_1(t) = \int\limits_0^t ds h(t-s)\mathbf{H}(s),$$

второй – это наличие “источников” магнитных доменов

$$\mathbf{R}_2 = -a_2|\mathbf{H}|^{p_2-2}\mathbf{H}, \quad p_2 > 2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2.$$

Следовательно, если кристаллический полупроводник–магнетик занимает ограниченную поверхностно-односвязанную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то при учете указанных факторов приходим к следующей системе уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \quad \mathbf{H} = -\nabla\psi,$$

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} = \gamma[\mathbf{H}, \mathfrak{M}] + \mathbf{R}, \quad \mathbf{M} = \mathfrak{M} + \mathbf{m}.$$

Займемся арифметикой:

$$\operatorname{div}[\mathbf{H}, \mathfrak{M}_1] = -(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathfrak{M}_1) = -\beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) - \beta_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - \beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right), \tag{2.39}$$

где

$$\beta_1 = a_2 - a_3, \quad \beta_2 = a_3 - a_1, \quad \beta_3 = a_1 - a_2, \quad |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| > 0.$$

Заметим, что

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

С учетом (2.18)–(2.22) и (2.38), (2.39) приходим к следующему уравнению пятого порядка с единичными коэффициентами:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta^2\psi + \Delta\psi + \Delta_{p_1}\psi) + \int\limits_0^t ds h(t-s)\Delta\psi(s) + \alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) + \\ + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) - \Delta_{p_2}\psi = 0, \quad \Delta_p\psi \equiv \operatorname{div}(|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi), \quad p \geq 2, \quad p_1 \geq 2, \quad p_2 > 2,\end{gathered} \tag{2.40}$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, но $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| > 0$. Уравнение (2.40) в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^3$ дополним граничными условиями (2.24), а также начальным условием

$$\psi(x,0) = \psi_0(x).$$

2.5. Одна нелинейная-нелокальная система уравнений

Теперь рассмотрим систему уравнений (2.35)–(2.37) в смысле комплекснозначных функций, т.е. когда

$$\mathbf{D},\ \mathbf{E},\ \mathbf{P},\ \mathbf{J} \in \mathbb{C}^3 \equiv \mathbb{R}^3 + i\mathbb{R}^3,$$

$$\phi = \phi_1 + i\phi, \quad n = n_1 + in_2,$$

однако, функцию $h(t)$ будем считать вещественной. Тогда относительно вещественных потенциалов ϕ_1 и ϕ_2 получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta^2\phi_1 + \Delta\phi_1 + \operatorname{div}([|\nabla\phi_1|^2 + |\nabla\phi_2|^2]^{(p_1-2)/2}\nabla\phi_1)) + \Delta\phi_1 + \\ + \int\limits_0^t ds h(t-s)\Delta\phi_1(s) - \operatorname{div}([|\nabla\phi_1|^2 + |\nabla\phi_2|^2]^{(p_2-2)/2}\nabla\phi_1) = 0,\end{gathered} \tag{2.41}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta^2\phi_2 + \Delta\phi_2 + \operatorname{div}([|\nabla\phi_1|^2 + |\nabla\phi_2|^2]^{(p_1-2)/2}\nabla\phi_2)) + \Delta\phi_2 + \\ + \int\limits_0^t ds h(t-s)\Delta\phi_2(s) - \operatorname{div}([|\nabla\phi_1|^2 + |\nabla\phi_2|^2]^{(p_2-2)/2}\nabla\phi_2) = 0,\end{gathered} \tag{2.42}$$

где $p_1 \geq 2$, $p_2 > 2$. Систему уравнений (2.41), (2.42) в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^3$ необходимо дополнить граничными условиями

$$\phi_1|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial\phi_1}{\partial n_x}\right|_{\partial\Omega} = \phi_2|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial n_x}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

а также начальными условиями

$$\phi_1(x,0) = \phi_{10}(x), \quad \phi_2(x,0) = \phi_{20}(x).$$

2.6. Нелинейная-нелокальная система уравнений А.П. Осколкова с источником

Приведем без вывода (см., например, [25]) одну важную нелинейную и нелокальную систему уравнений А.П. Осколкова с источником следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta\mathbf{u} + \int\limits_0^t h(t-s)\Delta\mathbf{u}(s)ds + (\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2\mathbf{u} = \nabla p, \tag{2.43}$$

где p — давление в жидкости, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости в жидкости. Систему уравнений (2.43) необходимо дополнить условием несжимаемости жидкости:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$

а также в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^3$ граничным условием

$$\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0$$

и, наконец, начальным условием

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, а область Ω является ограниченной с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$.

2.7. Нелокальное-нелинейное уравнение с нелинейным граничным условием

Теперь рассмотрим кристаллический полупроводник в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ при учете распределения связанных зарядов вида

$$\rho = \operatorname{div}\mathbf{P} = \phi, \tag{2.44}$$

источников свободных зарядов, распределение которых описывается функцией $Q(\phi)$ следующего вида:

$$Q(\phi) = |\phi|^{q_2}\phi, \quad q_2 > 0,$$

и, наконец, при учете тока проводимости вида

$$\mathbf{J} = \sigma_0\mathbf{E} + \int_0^t ds h(t-s)\mathbf{E}. \tag{2.45}$$

Предположим, что на границе $\partial\Omega$ области Ω имеются “стоки” свободных зарядов. В этом случае согласно (2.25) и (2.26) получим граничное условие

$$\left.\left(\frac{\partial\phi}{\partial n_x} + |\phi|^{q_1}\phi\right)\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad q_1 \geq 0,$$

а для потенциала ϕ в области Ω из условий (2.44), (2.45) вытекает следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\phi - \phi) + \Delta\phi + \int_0^t ds h(t-s)\Delta\phi(s) + |\phi|^{q_2}\phi = 0,$$

которое осталось дополнить начальным условием

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x).$$

2.8. Нелинейное уравнение с нелинейным эволюционным нелокальным граничным условием

Теперь рассмотрим кристаллический полупроводник в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ при учете распределения связанных зарядов вида

$$\rho = \operatorname{div}\mathbf{P} = \phi + |\phi|^{q_1}\phi, \tag{2.46}$$

источников свободных зарядов, распределение которых описывается функцией $Q(\phi)$ следующего вида:

$$Q(\phi) = |\phi|^{q_2}\phi, \quad q_2 > 0, \tag{2.47}$$

и при учете тока проводимости вида

$$\mathbf{J} = \sigma_0\mathbf{E}.$$

Наконец, учтем наличие распределения свободных зарядов на границе $\partial\Omega$ области Ω так, что ток проводимости на границе связан с распределением свободных зарядов вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{J}, n_x) + (\mathbf{J}, n_x) = \int_0^t ds h(t-s) f(x,\phi)(s). \tag{2.48}$$

Из (2.47), (2.48) вытекает следующая модельная задача:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\phi - \phi - |\phi|^{q_1}\phi) + \Delta\phi + |\phi|^{q_2}\phi = 0,$$

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial n_x} + \frac{\partial\phi}{\partial n_x} + \int_0^t ds h(t-s) f(x,\phi)(s)\right)\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

которую дополним начальным условием

$$\phi(x,0) = \phi_0(x).$$

3. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ $h(t)$

Во всех полученных в предыдущем разделе уравнениях содержится слагаемое вида

$$\int_0^t ds h(t-s)\Delta\phi(s),$$

описывающее переходные процессы в кристаллических полупроводниках.

В этом разделе мы рассмотрим некоторые модельные выражения для этой функции $h(t)$. Прежде всего заметим, что в качестве этой функции можно взять следующее выражение:

$$h(t) = h_0 e^{-at}, \quad h_0 > 0, \quad a > 0. \tag{3.1}$$

Действительно, формула (3.1) описывает самый распространенный механизм релаксации. Кроме того, можно рассмотреть следующее уравнение:

$$h(t) = h_0 t^n e^{-at}, \quad h_0 > 0, \quad a > 0, \quad n \in N.$$

Наконец, можно учесть колебательный режим релаксации следующего вида:

$$h(t) = h_0 \sin(\omega_0 t) e^{-at}, \quad h_0 > 0, \quad a > 0, \quad \omega_0 > 0,$$

или

$$h(t) = h_0 \cos(\omega_0 t) e^{-at}, \quad h_0 > 0, \quad a > 0, \quad \omega_0 > 0.$$

С другой стороны, в физике обычно релаксационные процессы протекают лишь конечное время, т.е. функция $h(t)$ финитна:

$$h(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{при} \quad 0 \le t \le t_0; \\ 0 & \text{при} \quad t_0 \le t \le +\infty, \end{cases}$$

где функция $\omega(t) \in \mathbf{C}_0^\infty(R_+^1)$. В следующих разделах мы будем изучать полученные в этом разделе уравнения при обобщении следующего важного условия, что найдутся постоянные $a > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что

$$h(t) \in \mathbb{C}^{(1)}(R_+^1), \quad \max\{|h(t)|, |h'(t)|\} \le h_0 e^{-at} \quad \text{при} \quad t \ge 0.$$

4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1,n}$ и при $i = \overline{1,4}$ относительно соответствующих норм

$$\|\cdot\|_0, \quad \|\cdot\|_j, \quad |\cdot|_i$$

и с сопряженными банаховыми пространствами V_0^*, V_j^*, W_i^* относительно соответствующих скобок двойственностей

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_0, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_j, \quad (\cdot,\cdot)_i$$

и соответствующих норм

$$\|\cdot\|_0^*, \quad \|\cdot\|_j^*, \quad |\cdot|_i^*.$$

Предположим, что банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1,n}$ и при $i = \overline{1,4}$ являются рефлексивными и сепарабельными. Предположим также, что

$$A_0 : V_0 \to V_0^*, \quad A_j : V_j \to V_j^*, \quad L_1 : W_1 \to W_1^*, \quad L_2 : W_2 \to W_2^*,$$
$$F : W_3 \to W_3^*, \quad P : V_0 \to W_4, \quad D : W_4 \to V_0^*.$$

Теперь последовательно укажем условия на все операторные коэффициенты задачи (1.2). Итак,

Условия A_0:

(i) оператор $A_0 : V_0 \to V_0^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем имеет место неравенство

$$\|A_0 u\|_0^* \le M_0 \|u\|_0 \quad \text{для всех} \quad u \in V_0;$$

(ii) оператор A_0 является коэрцитивным, причем имеет место неравенство

$$\langle A_0 u, u\rangle_0 \ge m_0 \|u\|_0^2 \quad \text{для всех} \quad u \in V_0;$$

(iii) величина $\langle A_0 u, u\rangle_0^{1/2}$ является нормой на V_0, порождающей рассматриваемую топологию банахова пространства V_0.

Условия A:

(i) оператор $A_j : V_j \to V_j^*$ является монотонным и непрерывным оператором;

(ii) оператор A_j дифференцируем по Фреше, причем его производная Фреше

$$A'_{jf}(u) : V_j \to \mathcal{L}(V_j, V_j^*)$$

является непрерывным, симметричным, монотонным и неотрицательно-определенным оператором при фиксированном $u \in V_j$;

(iii) оператор A_j является положительно-однородным

$$A_j(ru) = r^{p_j - 1} A_j(u) \quad \text{при} \quad p_j > 2, \quad r \ge 0, \quad u \in V_j;$$

(iv) справедливы следующие неравенства сверху и снизу:

$$\|A_j(u)\|_j^* \le M_j \|u\|_j^{p_j - 1}, \quad \langle A_j(u), u\rangle_j \ge m_j \|u\|_j^{p_j}, \quad M_j, m_j > 0;$$

(v) величина $\langle A_j(u), u\rangle_j^{1/p_j}$ является нормой на банаховом пространстве V_j, порождающей рассматриваемую топологию банахова пространства V_j.

Условия F:

(i) оператор $F : W_3 \to W_3^*$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т.е. имеет место неравенство

$$|F(u_1) - F(u_2)|_3 \le \mu(R)|u_1 - u_2|_3 \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in W_3,$$

где $\mu = \mu(R)$ есть ограниченная но всяком компакте неубывающая функция своего аргумента;

(ii) оператор F является положительно однородным, т.е.

$$F(ru) = r^{1+q_2} F(u) \quad \text{при} \quad q_2 > 0, \quad r \ge 0, \quad u \in W_3;$$

(iii) оператор F имеет симметричную производную Фреше

$$F'_f(\cdot) : W_3 \to \mathcal{L}(W_3, W_3^*);$$

(iv) оператор F удовлетворяет неравенству сверху

$$|F(u)|_3^* \le M|u|_3^{q_2+1} \quad \text{для всех} \quad u \in W_3.$$

Условия L:

(i) оператор $L_i : W_i \to W_i^*$ при $i = 1,2$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем

$$|L_i u|_i^* \le D_i |u|_i \quad \text{для всех} \quad u \in W_i;$$

(ii) оператор L_i является коэрцитивным, причем

$$(L_i u, u)_i \ge d_i |u|_i^2 \quad \text{для всех} \quad u \in W_i;$$

(iii) величина $(L_i u, u)_i^{1/2}$ является нормой на W_i, порождающей рассматриваемую топологию банахова пространства W_i.

Условия DP:

(i) оператор $D : W_4 \to V_0^*$ является линейным и непрерывным, причем имеет место неравенство сверху

$$\|Du\|_0^* \le D_3 |u|_4 \quad \text{для всех} \quad u \in W_4;$$

(ii) оператор $P : V_0 \to W_4$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т.е.

$$|P(u_1) - P(u_2)|_4 \le \mu_0(R)\|u_1 - u_2\|_0 \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in V_0,$$

где функция $\mu_0 = \mu_0(R)$ – ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента, $R = \max\{\|u_1\|_0, \|u_2\|_0\}$;

(iii) справедливо неравенство сверху

$$|P(u)|_4 \le D_4 \|u\|_0^{1+q_3}, \quad q_3 \ge 0 \quad \text{для всех} \quad u \in V_0;$$

(iv) для всех $u \in V_0$ имеет место неравенство

$$\langle DP(u), u\rangle_0 = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in V_0.$$

Рассмотрим теперь используемые нами банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1,n}$ и $i = \overline{1,4}$. Пусть H – некоторое сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным. Предположим, что выполнены следующие условия.

Условия H:

(i) имеют место следующие цепочки плотных и непрерывных вложений:

$$V_0 \overset{ds}{\subset} V_j \overset{ds}{\subset} H \overset{ds}{\subset} V_j^* \overset{ds}{\subset} V_0^* \quad \text{при} \quad j = \overline{1,n},$$

$$V_0 \overset{ds}{\subset} W_i \overset{ds}{\subset} H \overset{ds}{\subset} W_i^* \overset{ds}{\subset} V_0^* \quad \text{при} \quad i = 1,2,3;$$

(ii) имеют место непрерывные вложения

$$V_0 \subset W_4 \subset H \subset W_4^* \subset V_0^*.$$

Заметим, что в силу пункта (i) из условий H приходим к следующим равенствам скобок двойственностей

$$\langle f, u\rangle_0 = \langle f, u\rangle_j \quad \text{для всех} \quad f \in V_j^*, \quad u \in V_0, \quad \text{при} \quad j = \overline{1,n},$$

$$\langle f, u\rangle_0 = (f, u)_i \quad \text{для всех} \quad f \in W_i^*, \quad u \in V_0, \quad \text{при} \quad i = \overline{1,3}.$$

Наконец, потребуем выполнения следующих условий.

Условия $h(t)$:

(i) функция $h(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,+\infty)$;

(ii) функция $h(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\max\{|h(t)|, |h'(t)|\} \leq \chi'(t), \quad \chi(t) \leq 0, \quad \chi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, +\infty);$$

(iii) для функции $\chi'(t)$ выполнено следующее свойство:

$$\int_0^{+\infty} \chi'(t)dt < +\infty.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что выполнены все указанные условия.

5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде всего рассмотрим следующие функционалы:

$$\psi_1(u) = (L_1u, u)_1, \quad \psi_2(u) = (L_2u, u)_2, \quad \psi_3(u) = (F(u), u)_3, \tag{5.1}$$

и, следующий важный функционал

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle A_0u, u\rangle_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j - 1}{p_j}\langle A_j(u), u\rangle_j. \tag{5.2}$$

Справедлива (см. [18, лемма 4.1])

Лемма 1. *Если оператор $A : X \to X^*$ дифференцируем по Фреше и имеет симметричную производную Фреше*

$$A'_u(u) : X \to \mathfrak{L}(X, X^*)$$

и $A(su) = s^{p-1}A(u)$ при условиях $s \geq 0$ и $p \geq 2$, где X — это пространство Банаха с сопряженным X^* относительно скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$, тогда функционал

$$\psi(u) \equiv \langle A(u), u\rangle : X \to R^1$$

является непрерывно дифференцируемым по Фреше и его производная Фреше есть

$$\psi'_f(u) = pA(u) \quad \text{для всех} \quad u \in X.$$

В силу результата этой леммы приходим к выводу о том, что имеют место явные выражения для производных фреше функционалов, определенных формулами (5.1) и (5.2):

$$\psi'_{1f}(u) = 2L_1u, \quad \psi'_{2f}(u) = 2L_2u, \quad \psi'_{3f}(u) = (q_2 + 1)F(u),$$

$$\Phi'_f(u) = A_0u + \sum_{j=1}^{n}(p_j - 1)A_j(u).$$

Имеет место следующая (см. лемма 4.2 работы [18]):

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия леммы 1 и предположим, что $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; X)$ для некоторого $T > 0$, тогда функционал*

$$\psi(u)(t) \equiv \langle A(u), u\rangle \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]).$$

Но тогда в силу этой леммы и цепочек плотных и непрерывных вложений из Условия H приходим к выводу о том, что на функциях

$$u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; V_0) \quad \text{при} \quad T > 0$$

функционалы

$$\psi_1(u)(t), \quad \psi_2(u)(t), \quad \psi_3(u)(t), \quad \Phi(u)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]).$$

Справедливо утверждение (лемма 4.3 из [18]):

Лемма 3. *Пусть выполнены все условия леммы* 1 *и предположим, что* $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];X)$ *для некоторого* $T > 0$, *тогда*

$$\langle (A(u))', u\rangle = \frac{p-1}{p}\frac{d}{dt}\langle A(u), u\rangle.$$

Поэтому имеют место следующие равенства для функционалов:

$$\left\langle \left(A_j(u)\right)' u\right\rangle_j = \frac{p_j - 1}{p_j}\frac{d}{dt}\left\langle A_j(u), u\right\rangle_j \quad \text{при} \quad j = \overline{1,n}. \tag{5.3}$$

Справедлива следующая

Лемма 4. *Имеет место неравенство*

$$\left|\langle DP(u), v\rangle_0\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\langle A_0 v, v\rangle_0 + \frac{c_1^2}{2\varepsilon}\langle A_0 u, u\rangle_0^{1+q_3} \quad \textit{для всех} \quad u, v \in V_0, \tag{5.4}$$

где

$$c_1 = \frac{D_3 D_4}{m_0^{1+q_3/2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left|\left\langle DP(u), v\right\rangle_0\right| \le \|DP(u)\|_0^* \|v_0\| \le D_3 |P(u)|_4 \frac{1}{m_0^{1/2}}\left\langle A_0 v, v\right\rangle_0^{1/2} \le$$

$$\le D_3 D_4 \frac{1}{m_0^{1/2}}\frac{1}{m_0^{(1+q_3)/2}}\left\langle A_0 v, v\right\rangle_0^{1/2}\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0^{(1+q_3)/2} =$$

$$= c_1 \left\langle A_0 v, v\right\rangle_0^{1/2}\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0^{(1+q_3)/2} \frac{\varepsilon}{2}\left\langle A_0 v, v\right\rangle_0 + \frac{c_1^2}{2\varepsilon}\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0^{1+q_3},$$

здесь мы воспользовались Условием A_0 пункта (ii), а также Условием DP.

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Имеют место неравенства*

$$\left|(L_i u, v)_i\right| \le l_i \left\langle A_0 u, u\right\rangle_0^{1/2}\left\langle A_0 v, v\right\rangle_0^{1/2} \le \frac{\varepsilon}{2}\left\langle A_0 v, v\right\rangle_0 + \frac{l_i^2}{2\varepsilon}\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0 \quad \textit{для всех} \quad u, v \in V_0, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.5}$$

Доказательство. В силу свойства (iii) Условия L мы приходим к неравенству Шварца

$$\left|(L_i u, v)_i\right| \le (L_i u, u)_i^{1/2}(L_i v, v)_i^{1/2}.$$

С другой стороны, имеет место по Условию H непрерывное вложение H. Наконец, в силу Условия A_0 п. (iii) величина $\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0^{1/2}$ есть норма на V_0, поэтому имеет место неравенство

$$(L_i u, u)_i^{1/2} \le l_i^{1/2}\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0^{1/2} \quad \text{для всех} \quad u \in V_0.$$

Осталось воспользоваться неравенством Коши–Буняковского с “ε”.

Лемма доказана.

6. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В СИЛЬНОМ ОБОБЩЕННОМ СМЫСЛЕ

Дадим определение сильного обобщенного решения задачи (1.2).

Определение 1. Функцию $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];V_0)$, удовлетворяющую равенству при некотором $T > 0$

$$\left\langle R(u), w\right\rangle_0 = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \quad \text{и всех} \quad w \in V_0, \tag{6.1}$$

где

$$R(u) \equiv \frac{d}{dt}\left(A_0 u + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)\right) + L_1 u + \int_0^t ds h(t-s) L_2 u(s) + DP(u) = F(u), \quad u(0) = u_0 \in V_0,$$

назовем *сильным обобщенным решением задачи Коши* (1.2).

Прежде всего нам нужно доказать, что оператор

$$A(u) \equiv A_0 u + \sum_{j=1}^{n} A_j(u) : V_0 \to V_0^*$$

является обратимым, причем обратный оператор является липшиц-непрерывным. С этой целью докажем, что оператор $A(u)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера–Минти:

(I) *оператор* $A(u)$ является радиально-непрерывным.

Это утверждение есть следствие непрерывности операторов A_0 и $A_j(\cdot)$.

(II) *оператор* $A(u)$ является сильно монотонным.

Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \right\rangle_0 = \left\langle A_0 u_1 - A_0 u_2, u_1 - u_2 \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \left\langle A_j(u_1) - A_j(u_2), u_1 - u_2 \right\rangle_j \geq$$
$$\geq \left\langle A_0 u_1 - A_0 u_2, u_1 - u_2 \right\rangle_0 \geq m_0 \|u_1 - u_2\|_0^2.$$

(III) *оператор* $A(u)$ является коэрцитивным.

Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\langle A(u), u \right\rangle_0 = \left\langle A_0 u, u \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \left\langle A_j(u), u \right\rangle_j \geq m_0 \|u\|_0^2 + \sum_{j=1}^{n} m_j \|u\|_j^{p_j} \geq m_0 \|u\|_0^2.$$

Таким образом, в силу теоремы Браудера–Минти для оператора

$$A(u) : V_0 \to V_0^*$$

определен обратный оператор

$$A^{-1}(v) : V_0^* \to V_0.$$

Докажем, что оператор $A^{-1}(\cdot)$ является липшиц-непрерывным. Действительно, в силу сильной монотонности оператора $A(u)$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$m_0 \|u_1 - u_2\|_0^2 \left\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 \right\rangle_0 \leq$$
$$\leq \|A(u_1) - A(u_2)\|_0^* \|u_1 - u_2\|_0 \Rightarrow m_0 \|u_1 - u_2\|_0 \leq \|A(u_1) - A(u_2)\|_0^*,$$

откуда вытекает искомое неравенство

$$\left\|A^{-1}(w_1) - A^{-1}(w_2)\right\|_0 \leq \frac{1}{m_0} \|w_1 - w_2\|_0^* \quad \text{для всех} \quad w_1, w_2 \in V_0^*.$$

Таким образом, если ввести следующее обозначение:

$$A(u) = v,$$

то абстрактную задачу Коши (1.2) можно переписать в классе $v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; V_0^*)$ в эквивалентном виде:

$$\frac{dv}{dt} = -L_1 A^{-1}(v) - \int_0^t ds h(t-s) L_2 A^{-1}(v)(s) - DP(A^{-1}(v)) + F(A^{-1}(v)), \tag{6.2}$$

$$v(0) = v_0 = A(u_0) \in V_0^*. \tag{6.3}$$

В проверке корректности формулировки нуждается только начальное условие (6.3). Прежде всего заметим, что в классе $v(t) \in \mathbb{C}([0,T];V_0^*)$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$u(t_1) - u(t_2)_0 = A^{-1}(v(t_1)) - A^{-1}(v(t_2))_0 \le v(t_1) - v(t_2)_0^* \to 0 \quad \text{при} \quad t_1 \to t_2.$$

Значит, $u(t) \in \mathbb{C}([0,T];V_0)$. В силу непрерывности операторов A_0 и A_j приходим к выводу о справедливости следующей цепочки выражений:

$$v_0 = v(0) = \lim_{t\downarrow 0} v(t) = \lim_{t\downarrow 0} A(u(t)) = A(u(0)) = A(u_0).$$

Следовательно, начальное условие (6.3) корректно.

Заметим, что в классе $v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];V_0^*)$ задача (6.2) эквивалентна интегральному уравнению:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t dsG(v)(s), \tag{6.4}$$

где

$$G(v)(t) = -L_1A^{-1}(v) - \int_0^t dsh(t-s)L_2A^{-1}(v)(s) - DP(A^{-1}(v)) + F(A^{-1}(v)).$$

Будем искать решение интегрального уравнения (6.4) в классе $v(t) \in C(0,T;V_0^*)$. С этой целью перепишем интегральное уравнение (6.4) в операторном виде

$$v(t) = H(v)(t), \tag{6.5}$$

где

$$H(v)(t) = v_0 + \int_0^t dsG(v)(s).$$

Здесь можно воспользоваться результатами работы [26] и доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $v_0 \in V_0^*$ найдется такое $T_0 = T_0(v_0) > 0$, что существует единственное решение $v(t) \in \mathbb{C}([0,T_0);V_0^*)$ уравнения (6.5), причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае справедливо следующее предельное свойство*:

$$\lim_{t\uparrow T_0} v_0^*(t) = +\infty.$$

Отметим, что

$$G : \mathbb{C}([0,T_0);V_0^*) \to \mathbb{C}([0,T_0);V_0^*)$$

и поэтому

$$\int_0^t G(v)(s)ds \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);V_0^*).$$

Стало быть, решение $v(t)$ уравнения (6.5) принадлежит к классу $\mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);V_0^*)$.

Итак, мы пришли к уравнению с известной правой частью:

$$A_0u + \sum_{j=1}^n A_j(u) = v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);V_0^*) \quad \text{при некотором} \quad T_0 > 0. \tag{6.6}$$

Нам понадобится следующая теорема (см. теорему 12.3.3 с. 651 из [27] или теорему 4.2.1 с. 60 из [28]):

Теорема 2. *Пусть P — непрерывно дифференцируемое отображение открытого шара $U = B_r(x_0)$ в банаховом пространстве X в банахово пространство Y. Предположим, что оператор $\Lambda := P_f'(x_0)$ взаимно однозначно отображает X на все Y. Тогда P взаимно однозначно отображает некоторую* *окрестность* V *точки* x_0 *на некоторую окрестность* W *точки* $P(x_0)$*, причем отображение* $R := P^{-1} : W \to V$ *непрерывно дифференцируемо и выполнено равенство*

$$R'_f(y) = (P'_f(P^{-1}(y)))^{-1}, \quad y \in W.$$

Пусть оператор $P(u) := A_0 u + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)$, $U = X = V_0$, $Y = V_0^*$. Рассмотрим производную Фреше оператора P :

$$P'_f(u_0) = A_0 + \sum_{j=1}^{n} A'_j(u_0) : V_0 \to V_0^*, \quad u_0 \in V_0.$$

Докажем, что для любого $u_0 \in V_0$ оператор $P'_f(u_0)$ имеет обратный. С этой целью снова воспользуемся монотонностью рассматриваемых операторов.

(I) *оператор* $P'_f(u_0)$ является радиально непрерывным.

Это следствие непрерывности оператора A_0 и того, что при фиксированном $u_0 \in V_0$ оператор $A''_{if}(u_0) \in \mathscr{L}(V_0; V_0^*)$.

(II) *оператор* $P'_f(u_0)$ является сильно монотонным.

Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\langle \left[A_0 + \sum_{j=1}^{n} A'_{if}(u_0) \right] v_1 - \left[A_0 + \sum_{j=1}^{n} A'_{jf}(u_0) \right] v_2, v_1 - v_2 \right\rangle_0 = \langle A_0 v_1 - A_0 v_2, v_1 - v_2 \rangle_0 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left\langle A'_{jf}(u_0) v_1 - A'_{jf}(u_0) v_2, v_1 - v_2 \right\rangle_j \geq m_0 \|v_1 - v_2\|_0^2.$$

(III) *Оператор* $P'_f(u_0)$ является коэрцитивным.

Но это утверждение есть следствие пункта (II) и линейности этого оператора при фиксированной функции $u(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}_0); V_0)$. Итак, оператор

$$P'_f(u_0) := A_0 + \sum_{j=1}^{n} A'_{jf}(u_0) : V_0 \to V_0^*$$

является обратимым. Следовательно, в силу теоремы 2 из (6.6) имеет место равенство

$$u(t) = R(v(t)) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0); V_0).$$

Таким образом, из теорем 1, 2 и (6.6) вытекает

Теорема 3. *Для любых функций* $u_0 \in V_0$ *найдется такое* $T_0 = T_0(u_0) > 0$, *что для любого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное классическое решение задачи* (1.2) *класса* $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; V_0)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае имеем*

$$\lim_{t \uparrow T_0} A_0 u + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)_0^*(t) = +\infty.$$

7. РАЗРУШЕНИЕ СИЛЬНОГО ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.2) ПРИ $q_2 + 2 > \bar{p}$

Пусть $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0); V_0)$ — сильное обобщенное решение задачи (1.2). Прежде всего введем следующие обозначения:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \langle A_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle A_j(u), u \rangle_j, \tag{7.1}$$

$$J(t) = \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^{n} \left\langle A'_{jf}(u) u', u' \right\rangle_j. \tag{7.2}$$

Справедлива

Лемма 6. *Имеет место следующее неравенство:*

$$(\Phi'(t))^2 \le \overline{p}J(t)\Phi(t) \quad при \quad \overline{p} = \max_{j=\overline{1,n}} p_j, \quad t \in [0, T_0). \tag{7.3}$$

Доказательство. В силу условий A и A_0 справедливо неравенство Шварца для производных Фреше $A'_{j,u} : V_j \to \mathscr{L}(V_j; V_j^*)$ операторов $A_j : V_j \to V_j^*$:

$$\begin{aligned} \left|\left\langle (A_j(u))', u\right\rangle_j\right| = \left|\left\langle A'_{jf}(u)u', u\right\rangle_j\right| \le \left\langle A'_{jf}(u)u', u'\right\rangle_j^{1/2} \left\langle A'_{jf}(u)u, u\right\rangle_j^{1/2} = \\ = \left\langle (A_j(u))', u'\right\rangle_j^{1/2} (p_j - 1)^{1/2} \left\langle A_j(u), u\right\rangle_j^{1/2}, \\ \left|\left\langle A_0 u', u\right\rangle_0\right| \le \left\langle A_0 u', u'\right\rangle_0^{1/2} \left\langle A_0 u, u\right\rangle_0^{1/2}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Здесь мы воспользовались следующим равенством:

$$A'_{jf}(v)v = (p_j - 1)A_j(v), \tag{7.5}$$

вывод которого приведен в лемме 1. Из (7.4), (7.5) вытекает

$$\begin{aligned} \left|\frac{d}{dt}\Phi\right|^2 \le \left|\left|\left\langle A_0 u', u\right\rangle_0\right| + \sum_{j=1}^N \left|\left\langle (A_j(u))', u\right\rangle_j\right|\right|^2 \le \left(\left\langle A_0 u', u'\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \left\langle (A_j(u))', u'\right\rangle_j\right) \times \\ \times \left(\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^N (p_j - 1)\left\langle A_j(u), u\right\rangle_j\right) \le \overline{p}\left(\left\langle A_0 u', u'\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \left\langle (A_j(u_m))', u'_m\right\rangle_j\right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\overline{p}}\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{\overline{p}}\left\langle A_j(u), u\right\rangle_j\right) \le \overline{p}\left(\left\langle A_0 u', u'\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \left\langle (A_j(u))', u'\right\rangle_j\right) \times \\ \times \left(\frac{1}{2}\left\langle A_0 u, u\right\rangle_0 + \sum_{j=1}^N \frac{p_j - 1}{p_j}\left\langle A_j(u), u\right\rangle_j\right) = \overline{p}J(t)\Phi(t), \end{aligned}$$

где $\overline{p} = \max_{j=\overline{1,N}} p_j > 2$.

Лемма доказана.

Приступим к выводу первого энергетического равенства. Действительно, возьмем в равенстве (6.1) $w = u$, тогда с учетом обозначения (7.1) получим *первое энергетическое равенство*:

$$\frac{d\Phi}{dt} + (L_1 u, u)_1 + \int_0^t ds h(t - s)(L_2 u(s), u(t))_2 = (F(u), u)_3, \tag{7.6}$$

здесь мы воспользовались формулой (5.3). Теперь возьмем в равенстве (6.1) $w = u'$ и с учетом обозначения (7.2) получим *второе энергетическое равенство*:

$$J(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(L_1 u, u)_1 + \int_0^t ds h(t - s)(L_2 u(s), u'(t))_2 = -\left\langle DP(u), u'\right\rangle_0 + \frac{1}{q_2 + 2}\frac{d}{dt}(F(u), u)_3,$$

где мы воспользовались следующими равенствами:

$$(F(u), u')_3 = \frac{1}{q_2 + 2}\frac{d}{dt}(F(u), u)_3, \quad (L_1 u, u')_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(L_1 u, u)_1$$

для всех $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_0);V_0)$, которые есть следствия леммы 1. Теперь подставим выражение для $(F(u),u)_3$ из первого энергетического равенства во второе энергетическое равенство. Тогда получим следующее равенство:

$$J(t) = -\frac{q_2}{2(q_2+2)}\frac{d}{dt}(L_1u,u)_1 - \frac{q_2+1}{q_2+2}\int_0^t dsh(t-s)(L_2u(s),u'(t))_2 + \langle DP(u),u'\rangle_0 + \\ + \frac{1}{q_2+2}\Phi'' + \frac{h(0)}{q_2+2}(L_2u,u)_2 + \frac{1}{q_2+2}\int_0^t dsh'(t-s)(L_2u(s),u(t))_2. \tag{7.7}$$

Теперь займемся постепенным оцениванием слагаемых в правой части равенства (7.7). В силу формулы (5.5) при $i=1$ имеет место первая оценка:

$$\left|\frac{q_2}{2(q_2+2)}\frac{d}{dt}(L_1u,u)_1\right| \le \frac{q_2}{(q_2+2)}\left|(L_1u,u')_1\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\langle A_0u',u'\rangle_0 + \\ + \frac{l_1^2}{2\varepsilon}\left(\frac{q_2}{q_2+2}\right)^2\langle A_0u,u\rangle_0 \le \frac{\varepsilon}{2}J(t) + \frac{l_1^2}{\varepsilon}\left(\frac{q_2}{q_2+2}\right)^2\Phi(t). \tag{7.8}$$

Теперь в силу формулы (5.5) при $i=2$ имеет место следующая оценка:

$$\left|\frac{q_2+1}{q_2+2}\int_0^t dsh(t-s)(L_2u(s),u'(t))_2\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\langle A_0u',u'\rangle_0 + \left(\frac{q_2+1}{q_2+2}\right)^2\frac{l_2^2a}{2\varepsilon}\int_0^t ds\left|h(t-s)\right|\langle A_0u(s),u(s)\rangle_0 \le \\ \le \frac{\varepsilon}{2}J(t) + \left(\frac{q_2+1}{q_2+2}\right)^2\frac{l_2^2a}{\varepsilon}\int_0^t ds\left|h(t-s)\right|\Phi(s), \quad a := \int_0^{+\infty}\left|h(t)\right|dt.$$

Теперь в силу формулы (5.4) имеет место следующее неравенство:

$$\left|\langle DP(u),u'\rangle_0\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\langle A_0u',u'\rangle_0 + \frac{c_1^2}{2\varepsilon}\langle A_0u,u\rangle_0^{1+q_3} \le \frac{\varepsilon}{2}J(t) + \frac{c_1^2 2^{q_3}}{\varepsilon}\Phi^{1+q_3}(t).$$

Теперь в силу формулы (5.5) при $i=2$ имеет место следующая оценка:

$$\left|\frac{h(0)}{q_2+2}(L_2u,u)_2\right| \le \frac{l_2\left|h(0)\right|}{q_2+2}\langle A_0u,u\rangle_0 \le \frac{2l_2\left|h(0)\right|}{q_2+2}\Phi(t).$$

Опять в силу формулы (5.5) при $i=2$ имеет место следующая оценка:

$$\left|\frac{1}{q_2+2}\int_0^t dsh'(t-s)(L_2u(s),u(t))_2\right| \le \frac{bl_2}{2(q_2+2)}\langle A_0u,u\rangle_0 + \frac{l_2}{2(q_2+2)}\int_0^t ds\left|h'(t-s)\right|\langle A_0u(s),u(s)\rangle_0 \le \\ \le \frac{bl_2}{q_2+2}\Phi(t) + \frac{l_2}{q_2+2}\int_0^t ds\left|h'(t-s)\right|\Phi(s), \quad b := \int_0^{+\infty}\left|h'(t)\right|dt. \tag{7.9}$$

Таким образом, из оценок (7.8), (7.9) и из равенства (7.7) вытекает следующее неравенство:

$$\left(1-\frac{3}{2}\varepsilon\right)J(t) \le \frac{1}{q_2+2}\Phi'' + \left[\frac{l_1^2}{\varepsilon}\left(\frac{q_2}{q_2+2}\right)^2 + \frac{2l_2\left|h(0)\right|}{q_2+2} + \frac{bl_2}{q_2+2}\right]\Phi(t) + \\ + \frac{c_1^2 2^{q_3}}{\varepsilon}\Phi^{1+q_3}(t) + \int_0^t dsh_\varepsilon(t-s)\Phi(s),$$

где

$$h_\varepsilon(t) = \left(\frac{q_2+1}{q_2+2}\right)^2\frac{l_2^2a}{\varepsilon}\left|h(t)\right| + \frac{l_2}{q_2+2}\left|h'(t)\right|.$$

Потребуем пока, чтобы

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{2}{3}\right),$$

тогда из неравенств (7.3) приходим к искомому интегродифференциальному неравенству:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma_1\Phi^2 + \gamma_3\Phi^{1+\lambda} + \gamma_2\int_0^t ds h_\varepsilon(t-s)\Phi(s)\Phi(t) \geq 0,$$

где

$$\alpha = \frac{q_2+2}{\overline{p}}\left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon\right), \quad \lambda = 1 + q_3,$$

$$\gamma_1 = (q_2+2)\left[\frac{l_1^2}{\varepsilon}\left(\frac{q_2}{q_2+2}\right)^2 + \frac{2l_2|h(0)|}{q_2+2} + \frac{bl_2}{q_2+2}\right],$$

$$\gamma_3 = (q_2+2)\frac{c_1^2 2^{q_3}}{\varepsilon}, \quad \gamma_2 = q_2 + 2.$$

Теперь проверим выполнимость условия

$$\lambda < 2\alpha - 1.$$

Действительно, имеет место следующая цепочка рассуждений:

$$\lambda < 2\alpha - 1 \Rightarrow 2 + q_3 < 2\alpha \Rightarrow \alpha > 1 + q_3/2 \Rightarrow 1 - \frac{3}{2}\varepsilon > \left(1 + \frac{q_3}{2}\right)\frac{\overline{p}}{q_2+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon \in \left(0, \frac{2}{3}\left[1 - \left(1 + \frac{q_3}{2}\right)\frac{\overline{p}}{q_2+2}\right]\right) \Rightarrow q_3 < 2\frac{q_2+2-\overline{p}}{\overline{p}}.$$

Итак, приходим к двум условиям:

$$q_2 + 2 > \overline{p}, \quad q_3 < 2\frac{q_2+2-\overline{p}}{\overline{p}}. \tag{7.10}$$

Таким образом, в силу результата леммы 8 приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть* $u_0 \in V_0$ *и выполнены условия* (7.10), *тогда при выполнении следующих начальных условий*:

$$\Phi'(0) > \left(\frac{\gamma_4}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{2+q_3}\right)^{1/2}, \quad \Phi(0) > 0,$$

существует единственное сильное обобщенное решение класса

$$u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0); V_0),$$

причем $T_0 \in (0, T_1]$ *и имеет место предельное выражение*

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\Phi'(0) = (F(u_0), u_0)_3 - (L_1 u_0, u_0)_1,$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}\langle A_0 u_0, u_0\rangle_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{p_j - 1}{p_j}\langle A_j(u_0), u_0\rangle_j,$$

$$T_1 = \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A},$$

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma_4}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{\delta(1-\alpha)+2\alpha}\right],$$

$$\gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_2 |\chi(0)| \left[\left(\frac{q_2+1}{q_2+2} \right)^2 \frac{l_2^2 a}{\varepsilon} + \frac{l_2}{q_2+2} \right], \quad \delta = 1 + \frac{1+q_3-\alpha}{1-\alpha},$$

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{2}{3} \left[1 - \left(1 + \frac{q_3}{2} \right) \frac{\overline{p}}{q_2+2} \right] \right).$$

Справедлива

Лемма 7. *Имеет место двустороннее неравенство*

$$M_1 \Phi^{1/2}(t) \le \|A(u)\|_0^* \le M_2 \Phi^{1/2} + \sum_{j=1}^n B_j \Phi^{(p_j-1)/p_j}(t),$$

где постоянные M_1, M_2 и B_j больше нуля и не зависят от $u(t)$,

$$A(u) := A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u).$$

Доказательство. Докажем сначала оценку снизу. Действительно, с одной стороны, имеем

$$\langle A(u), u \rangle_0 = \langle A_0 u, u \rangle + \sum_{j=1}^n \langle A_j(u), u \rangle_j \ge \Phi(t). \tag{7.11}$$

С другой стороны, имеем

$$\langle A(u), u \rangle_0 \le \|A(u)\|_0^* \|u\|_0 \le \|A(u)\|_0^* \frac{1}{m_0^{1/2}} \langle A_0 u, u \rangle_0^{1/2} \le \|A(u)\|_0^* \frac{2^{1/2}}{m_0^{1/2}} \Phi^{1/2}(t). \tag{7.12}$$

Из неравенств (7.11) и (7.12) вытекает оценка снизу

$$\|A(u)\|_0^* \ge \left(\frac{m_0}{2} \right)^{1/2} \Phi^{1/2}(t) = M_1 \Phi^{1/2}(t).$$

Докажем теперь оценку сверху. Действительно, согласно определению нормы $\|\cdot\|_0^*$ справедлива следующая цепочка выражений:

$$\|A(u)\|_0^* = \sup_{\|h\|_0 \le 1} |\langle A(u), h \rangle_0| = \sup_{\|h\|_0 \le 1} \left| \langle A_0 u, h \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle A_j(u), h \rangle_j \right| \le \sup_{\|h\|_0 \le 1} \langle A_0 u, u \rangle_0^{1/2} \langle A_0 h, h \rangle_0^{1/2} +$$

$$+ \sup_{\|h\|_0 \le 1} \sum_{j=1}^n \|A_j(u)\|_j^* \|h\|_j \le c_3 \Phi^{1/2}(t) + c_4 \sum_{j=1}^n \|u\|_j^{p_j-1} \le c_3 \Phi^{1/2}(t) + c_5 \sum_{j=1}^n \langle A_j(u), u \rangle^{(p_j-1)/p_j} \le$$

$$\le c_3 \Phi^{1/2}(t) + c_6 \sum_{j=1}^n \Phi^{(p_j-1)/p_j}(t) = M_2 \Phi^{1/2} + \sum_{j=1}^n B_j \Phi^{(p_j-1)/p_j}(t).$$

Лемма доказана.

Замечание 1. В силу результата этой леммы имеем $T_0 < +\infty$ при выполнении условий теоремы 4.

8. ОЦЕНКА СНИЗУ НА ВРЕМЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.2)

Теперь приступим к получению нижней оценки на время $T_0 > 0$ существования решения задачи (1.2).

Напомним, что величина $(L_1 u, u)_1 \ge 0$ для всех $u \in V_0$, поэтому из первого энергетического равенства (7.6) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{d\Phi}{dt} \le -\int_0^t ds h(t-s) (L_2 u(s), u(t))_2 + (F(u), u)_3. \tag{8.1}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|(F(u),u)_3| \le M_F |u|_3^{q_2+2} \le M_F c_1 \|u\|_0^{q_2+2} \le M_F c_1 m_0^{1+q_2/2} \langle A_0 u, u\rangle_0^{1+q_2/2} \le c_2 \Phi^{1+q_2/2}(t). \tag{8.2}$$

Как и в случае с оценкой (7.9) можно получить следующее неравенство:

$$\left|\int_0^t ds h(t-s)(L_2 u(s), u(t))_2\right| \le l_2\Phi(t) + l_2 a\int_0^t ds|h(t-s)|\Phi(s). \tag{8.3}$$

Таким образом, из (8.2) и (8.3) и неравенства (8.1) вытекает оценка:

$$\frac{d\Phi}{dt} \le l_2\Phi(t) + l_2 h_0\int_0^t ds\Phi(s) + c_2\Phi^{1+q_2/2}(t). \tag{8.4}$$

Теперь воспользуемся арифметическим неравенством Гёльдера:

$$r\Phi \le r^{(2+q_2)/q_2}\frac{q_2}{q_2+2} + \frac{2}{2+q_2}\Phi^{1+q_2/2}.$$

Тогда из (8.4) после интегрирования по времени $t \in [0,T]$, получим неравенство вида

$$\Phi(t) \le c_4(T) + c_5(T)\int_0^t ds\Phi^{1+q_2/2}(s),$$

из которого в силу леммы Гронуолла–Беллмана–Бихари (см. [29]) получим неравенство

$$\Phi(t) \le \frac{c_3(T)}{\left[1 - \frac{q_2}{2}c_4^{q_2/2}(T)c_5(T)t\right]^{2/q_2}},$$

откуда в свою очередь вытекает, что при выполнении условия

$$t \in [0, T_2), \quad \frac{q_2}{2}c_4^{q_2/2}(T_2)c_5(T_2)T_2 = 1$$

имеет место оценка

$$\Phi(t) \le c_6(T_2) < +\infty \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T_2].$$

Следовательно, приходим к неравенству

$$T_0 \ge T_2.$$

9. ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ (1.2) ПРИ $q_2 + 2 \le \bar{p}$

Теперь мы приступим к получению одного достаточного условия глобального во времени существования сильного обобщенного решения задачи (1.2), которое, как мы увидим, близко к необходимому. Действительно, пусть выполнено следующее условие:

$$\bar{p} \ge q_2 + 2,$$

причем предположим, что существует такое $j \in \overline{1,n}$, что $V_j \subset W_3$ и $p_j = \bar{p}$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |(F(u),u)_3| &\le M_F |u|_3^{q_2+2} \le M_F c_j \|u\|_j^{q_2+2} = \frac{M_F c_j}{m_j^{(q_2+2)/p_j}}\left(m_j\|u\|_j^{p_j}\right)^{(q_2+2)/p_j} \le \\ &\le \frac{M_F c_j}{m_j^{(q_2+2)/p_j}}\langle A_j(u), u\rangle_j^{(q_2+2)/p_j} \le m\Phi^{(q_2+2)/p_j}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Теперь в силу оценки (8.3) и неравенства (9.1) приходим к следующему неравенству:

$$\frac{d\Phi}{dt} \le m\Phi^{(q_2+2)/p_j} + l_2\Phi(t) + l_2 h_0\int_0^t ds\Phi(s).$$

Здесь нужно рассмотреть два случая: (I) $q_2 + 2 = \overline{p}$ и (II) $q_2 + 2 < \overline{p}$. В первом случае мы приходим к следующему неравенству:

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq (l_2 + m)\Phi(t) + l_2 h_0 \int_0^t ds\Phi(s).$$

Рассмотрим теперь более сложный второй случай. Здесь можно воспользоваться арифметическим неравенством Гёльдера. Действительно, положим

$$\beta = \frac{\overline{p}}{q_2 + 2} > 1,$$

поэтому имеет место неравенство

$$r\Phi^{1/\beta} \leq \frac{\beta - 1}{\beta} r^{\beta/(\beta-1)} + \frac{1}{\beta}\Phi.$$

И в результате и во втором случае мы приходим к неравенству вида

$$\frac{d\Phi}{dt} \leq r_1 + r_2\Phi(t) + r_3 \int_0^t ds\Phi(s), \quad r_1, r_2, r_3 \geq 0. \tag{9.2}$$

Теперь докажем, что решение дифференциального неравенства (9.2) существует глобально во времени. С этой целью проинтегрируем обе части неравенства (9.2) по времени $t \in [0, T]$, тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\Phi(t) \leq r_1 t + r_2 \int_0^t ds\Phi(s) + \int_0^t ds(t - s)\Phi(s) \leq r_1 T + [r_2 + Tr_3] \int_0^t ds\Phi(s).$$

Теперь воспользуемся леммой Гронуолла—Беллмана (см. [29]) и получим следующую оценку:

$$\Phi(t) \leq (\Phi_0 + r_1 T)\exp\{[r_2 + Tr_3]t\} \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T].$$

Отсюда, из теоремы 3 и леммы 7 вытекает, что в данном случае $T_0 = +\infty$. Таким образом, нами доказана

Теорема 5. *Пусть $u_0 \in V_0$ и выполнено неравенство*

$$\overline{p} \geq q_2 + 2, \quad \overline{p} = \max_{j=\overline{1,n}} p_j,$$

причем найдется такое $m \in \overline{1,n}$, что $\overline{p} = p_m$ и имеет место непрерывное вложение $V_m \subset W_3$, тогда существует единственное сильное обобщенное решение задачи (1.2) *класса*

$$u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, +\infty); V_0).$$

10. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим теперь следующее интегродифференциальное неравенство:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma_1\Phi^2 + \gamma_3\Phi^{1+\lambda} + \gamma_2 \int_0^t dsh(t - s)\Phi(s)\Phi(t) \geq 0, \tag{10.1}$$

где $\alpha > 1$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda \geq 0$. Предположим, что найдется такая функция

$$\chi(t) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1_+),$$

что имеют место следующие неравенства:

$$|h(t)| \leq \chi'(t) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1_+, \tag{10.2}$$

причем

$$\chi(t) \leq 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0. \tag{10.3}$$

С учетом неравенства (10.2) мы получим следующую цепочку соотношений:

$$\int_0^t ds h(t-s)\Phi(s) \le \int_0^t ds|h(t-s)|\Phi(s) \le \int_0^t ds\chi'(t-s)\Phi(s) = -\int_0^t d\chi(t-s)\Phi(s) =$$

$$= -\chi(t-s)\,\Phi(s)\Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t ds\chi(t-s)\Phi'(s) = -\chi(0)\Phi(t) + \chi(t)\Phi(0) + \int_0^t ds\chi(t-s)\Phi'(s).$$

Отсюда получим следующее неравенство:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \gamma_4\Phi^2 + \gamma_3\Phi^{1+\lambda} \ge 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,t_1], \quad t_1 \in (0,T], \tag{10.4}$$

где

$$\gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_2|\chi(0)|,$$

причем в предположении $\Phi'(0) > 0$ имеет место неравенство

$$\Phi'(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,t_1].$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$\Phi(0) > 0.$$

Из неравенства (10.4) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \alpha\frac{(\Phi')^2}{\Phi^{1+\alpha}} + \gamma_4\Phi^{1-\alpha} + \gamma_3\Phi^{\lambda-\alpha} \ge 0 \Rightarrow \left[\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha}\right]' + \gamma_4\Phi^{1-\alpha} + \gamma_3\Phi^{\lambda-\alpha} \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})'' + \gamma_4\Phi^{1-\alpha} + \gamma_3\Phi^{\lambda-\alpha} \ge 0 \Rightarrow Z(t) = \Phi^{1-\alpha}, \tag{10.5}$$

$$-\frac{1}{\alpha-1}Z'' + \gamma_4 Z + \gamma_3 Z^{(\lambda-\alpha)/(1-\alpha)} \ge 0 \Rightarrow Z'' \le (\alpha-1)\gamma_4 Z + (\alpha-1)\gamma_3 Z^{(\lambda-\alpha)/(1-\alpha)}.$$

Заметим, что

$$Z' = (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi' \le 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,t_1].$$

Поэтому умножим обе части итогового неравенства из цепочки неравенств (10.5) и получим следующее неравенство:

$$Z'Z'' \ge (\alpha-1)\gamma_4 ZZ' + (\alpha-1)\gamma_3 Z'Z^{(\lambda-\alpha)/(1-\alpha)}.$$

Откуда приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Z')^2 \ge \frac{(\alpha-1)\gamma_4}{2}\frac{d}{dt}Z^2 + \frac{(\alpha-1)\gamma_3}{\delta}\frac{d}{dt}Z^\delta, \tag{10.6}$$

где

$$\delta = 1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}.$$

Теперь потребуем выполнения условия $\delta > 0$. Займемся арифметикой:

$$\delta > 0 \Rightarrow 1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha} > 0 \Rightarrow \frac{1+\lambda-2\alpha}{1-\alpha} > 0 \Rightarrow \frac{2\alpha-1-\lambda}{\alpha-1} > 0 \Rightarrow \lambda < 2\alpha-1.$$

Итак, потребуем выполнения следующего условия:

$$\lambda < 2\alpha - 1. \tag{10.7}$$

При выполнении условия (10.7) продолжим рассмотрение неравенства (10.6). Проинтегрируем его по $t \in [0,t_1]$ и получим, что

$$(Z')^2 \ge (\alpha-1)\gamma_4 Z^2 + \frac{2(\alpha-1)\gamma_3}{\delta}Z^\delta + A^2, \tag{10.8}$$

где

$$A^2 = (Z'(0))^2 - (\alpha-1)\gamma_4(Z(0))^2 - \frac{2(\alpha-1)\gamma_3}{\delta}(Z(0))^\delta, \quad \delta = 1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha}.$$

Потребуем теперь выполнения условия $A^2 > 0$. Займемся арифметикой:

$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)(\Phi'(0))^2 - (\alpha-1)\gamma_4(\Phi(0))^{2-2\alpha} - \frac{2(\alpha-1)\gamma_3}{\delta}(\Phi(0))^{\delta-\delta\alpha} =$$
$$= (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma_4}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{\delta(1-\alpha)+2\alpha}\right]. \quad (10.9)$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\delta(1-\alpha) + 2\alpha = 1 - \alpha + \lambda - \alpha - 2\alpha = 1 + \lambda.$$

С учетом этой цепочки приходим из (10.9) к эквивалентному условию $A^2 > 0$:

$$\Phi'(0) > \left(\frac{\gamma_4}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}\right)^{1/2}. \quad (10.10)$$

При выполнении последнего условия (10.10) из неравенства (10.8) получим, что

$$(Z')^2 \geq A^2 \Rightarrow |Z'| \geq A \Rightarrow -Z' \geq A \Rightarrow Z' \leq -A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1-\alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi' \leq -A \Rightarrow \Phi' \geq \frac{A}{\alpha-1}\Phi^{\alpha}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1], \quad (10.11)$$

поскольку

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1].$$

Таким образом, рассуждая дальше как и ранее, получаем, что

$$\Phi'(t) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T],$$

но тогда имеет место цепочка неравенств, вытекающая из (10.11):

$$Z(t) \leq Z(0) - At \Rightarrow \Phi^{1-\alpha}(t) \leq \Phi_0^{1-\alpha} - At \Rightarrow \Phi^{\alpha-1}(t) \geq \frac{1}{\Phi_0^{1-\alpha} - At} \Rightarrow \Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi_0^{1-\alpha} - At]^{1/(\alpha-1)}},$$

из которого имеем, что $T < +\infty$. Действительно, найдется такой момент времени

$$T_0 \in [0, T_1], \quad T_1 = \frac{\Phi_0^{1-\alpha}}{A},$$

что верно

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty.$$

Таким образом, справедлива

Лемма 8. *Пусть неотрицательная функция* $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T])$ *при некотором* $T > 0$ *удовлетворяет интегродифференциальному неравенству* (10.1), *при указанных условиях* (10.2), (10.3) *на функцию* $h(t)$ *и выполнены начальные условия*

$$\Phi'(0) > \left(\frac{\gamma_4}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}\right)^{1/2}, \quad \Phi(0) > 0,$$

а также условие

$$0 \leq \lambda < 2\alpha - 1,$$

тогда $T < +\infty$. *Более того, найдется такой момент времени*

$$T_0 \leq T_1, \quad T_1 = \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A},$$

что

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty,$$

где

$$\alpha > 1, \quad \gamma_3 \geq 0, \quad \gamma_4 = \gamma_1 + \gamma_2|\chi(0)|, \quad \gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_2 \geq 0, \quad \delta = 1 + \frac{\lambda-\alpha}{1-\alpha},$$
$$A^2 = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)\left[(\Phi'(0))^2 - \frac{\gamma_4}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{\delta(1-\alpha)+2\alpha}\right] > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Levine H.A.* Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Ration. Mech. and Analys. 1974. V. 192. P. 1–21.
2. *Levine H.A.* Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 51. P. 371–386.
3. *Straughan B.* Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1075. V. 48. № 2. P. 381–390.
4. *Калантаров В.К., Ладыженская О.А.* О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 69. № 10. С. 77–102.
5. *Levine H.A., Serrin J.* Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation // Arch. Rational Mech. Anal. 1997. V. 137. № 4. P. 341–361.
6. *Levine H.A., Park S.R., Serrin J.* Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type // J. Differential Equations. 1998. V. 142. № 1. P. 212–229.
7. *Pucci P., Serrin J.* Some new results on global nonexistence for abstract evolution with positive initial energy // Topol. Methods Nonlinear Analys. 1997. V. 10. № 2. P. 241–247.
8. *Pucci P., Serrin J.*Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy // J. Differential Equations. 1998. V. 150. № 1. P. 203–214.
9. *Levine H.A., Todorova G.* Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy in four space-time dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129. № 3. P. 793–805.
10. *Корпусов М.О.* Разрушение решений обобщенного уравнения Клейна–Гордона с сильной диссипацией // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77. № 2. С. 109–138.
11. *Корпусов М.О.* О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений с положительной энергией в теории поля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 3. С. 447–458.
12. *Bilgin B.A., Kalantarov V.K.* Non-existence of global solutions to nonlinear wave equations with positive initial energy // Commun. Pure Appl. Anal. 2018. V. 17. № 3. P. 987–999.
13. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms // J. Differential Equations. 1994. V. 109. P. 295–308.
14. *Messaoudi S.A.* Blow up and global existence in a nonlinear viscoelastic wave equation // Math. Nachr. 2003. V. 260. P. 58–66.
15. *Messaoudi S.A.* Blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 320. № 2. P. 902–915.
16. *Корпусов М.О.* О разрушении решений класса сильно нелинейных уравнений типа Соболева // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68. № 4. С. 151–204.
17. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 69. № 4. С. 89–128.
18. *Корпусов М.О., Панин А.А.* О разрушении решения абстрактной задачи Коши для формально гиперболического уравнения с двойной нелинейностью // Известия РАН. Серия математическая. 2014. Т. 78. № 5. С. 91–142.
19. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., 2011.
20. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
21. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
22. *Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г.* Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Том 8. М.: Наука, 1992.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Том 10. М.: Физматлит, 2001.
25. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* О разрушении решения системы уравнений Осколкова // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 4. С. 83–108.
26. *Панин А.А.* О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 884–903.
27. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Ижевск: РХД, 2011.
28. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
29. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.