ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 4, с. 670–683

УДК 517.958

ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ В УРАВНЕНИЯХ КАНА–ХИЛЛАРДА, КУРАМОТО–СИВАШИНСКОГО И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ[1)]

© 2019 г. А. Н. Куликов[1], Д. А. Куликов[1,*]

([1] 150003 Ярославль, ул. Советская, 14, ЯрГУ, Россия)

*e-mail: anat_kulikov@mail.ru

Поступила в редакцию 08.11.2017 г.
Переработанный вариант 14.11.2018 г.
Принята к публикации 14.11.2018 г.

Рассматривается периодическая краевая задача для нелинейного эволюционного уравнения, которое при конкретизации его коэффициентов приобретает вид таких известных уравнений в математической физике, как уравнение Кана–Хилларда, Курамото–Сивашинского, Кавахары. Изучены три бифуркационные задачи, возникающие при смене устойчивости у пространственно однородных состояний равновесия. Их анализ основан на использовании метода инвариантных многообразий, аппарата нормальных форм для динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий, а также асимптотические методы анализа. Для бифурцирующих решений указаны асимптотические формулы, дан ответ об их устойчивости. Для уравнений Курамото–Сивашинского и Кавахары показано существование двумерного локального аттрактора, все решения на котором неустойчивы в смысле определения Ляпунова. Библ. 31.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, устойчивость, локальные бифуркации, нормальная форма, асимптотические формулы.

DOI: 10.1134/S0044466919040082

ВВЕДЕНИЕ

В работе будет рассмотрено нелинейное уравнение с частными производными

$$\begin{gathered} u_t + \gamma u_{xxxx} + \beta u_{xx} + \alpha u + \gamma_1 u_x + \gamma_2 u_{xxx} + \gamma_3 u_{xxxxx} + \\ + a_2(u^2)_x + b_2(u^2)_{xx} + a_3(u^3)_x + b_3(u^3)_{xx} = 0, \end{gathered} \tag{0.1}$$

где $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, a_2, b_2, a_3, b_3 \in R, \gamma, \alpha$ – неотрицательные постоянные, $u = u(t, x)$.

Уравнение (0.1) при различных вариантах выбора его коэффициентов встречается во многих разделах механики и математической физики. Например, при $\gamma = \beta = \alpha = \gamma_3 = b_2 = b_3 = a_3 = 0$ получаем широко известное уравнение Кортевега-де Вриза. Если $\gamma > 0$, $\alpha \geq 0$, $b_2 = a_3 = b_3 = 0$, то такой вариант уравнения (0.1) принято называть уравнением Курамото–Сивашинского [1]–[3]. В работе [2] соответствующее уравнение было получено при изучении двумерной системы Навье–Стокса в модификации Колмогорова после введения функции тока и ряда дополнительных предположений на параметры задачи. В работах [4]–[8] уравнение (0.1) было рассмотрено в варианте, когда $\alpha = 0$, $\gamma > 0$ $(\gamma = 1)$, $b_2 = a_3 = b_3 = 0$. Такая версия достаточно популярна и носит название – уравнение Кавахары (или Кавахары–Бенни-Лина). Уравнение Кавахары описывает эволюцию длинных волн в гидродинамике.

В приложениях к гидродинамике рассматривалось уравнение (0.1) при $\gamma = 1, \alpha = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Такой вариант уравнения, если $a_2 = a_3 = b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$ известен под названием уравнения Кана–Хилларда [9].

Добавим, что к уравнению (0.1) во многих содержательных случаях может быть сведено уравнение, выведенное в [10] для описания механизма формирования рельефа на поверхности пластинок под воздействием потока ионов, а также при лазерной или электрохимической обра-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 18-01-00672).

ботке [11]. Ряд математических задач для уравнения Бредли–Харпера и уравнений, из него полученных, было рассмотрено в работах [12]–[14].

Во многих из упомянутых работ уравнение (0.1) рассматривают вместе с периодическими краевыми условиями (см., например, [2], [3], [10], [11]). В данной работе уравнение (0.1) рассмотрим вместе с краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{0.2}$$

а также будем считать, что $\gamma = 1$ (если изначально было $\gamma > 0$, то нормировка времени позволяет обеспечить равенство $\gamma = 1$).

Дополним краевую задачу (0.1), (0.2) начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \tag{0.3}$$

Пусть $f(x) \in H_2^s$, где $s = 5$ при $\gamma_3 \neq 0$ и $s = 4$ при $\gamma_3 = 0$. Через H_2^s обозначено пространство Соболева [15], состоящее из 2π периодических функций, у которых обобщенные производные до порядка s включительно интегрируемы с квадратом на отрезке длины периода. При таком выборе $f(x)$ из результатов работ [16], [17] вытекает, что смешанная задача (0.1), (0.2), (0.3) локально корректно разрешима и ее решения в фазовом пространстве (пространстве начальных условий H_2^s) порождают локальный полупоток [18]

$$f(x) \to f_t(x) = u(t, x).$$

Эти замечания дают основание считать, что для исследования краевой задачи можно использовать методы качественной теории дифференциальных уравнений с бесконечномерным фазовым пространством (см., например, [18]).

1. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Изучим вопрос об устойчивости тривиального состояния равновесия краевой задачи (0.1), (0.2) и рассмотрим для этого вспомогательную линейную краевую задачу

$$u_t = Au, \tag{1.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{1.2}$$

Здесь линейный дифференциальный оператор (ЛДО) A определен равенством

$$Av = -v^{(IV)} - \beta v'' - \alpha v - \gamma_1 v' - \gamma_2 v''' - \gamma_3 v^{(V)},$$

где $v = v(x)$ – гладкая 2π периодическая функция. ЛДО A имеет счетное семейство собственных значений (СЗ)

$$\lambda_n = \tau_n + i\sigma_n, \quad \tau_n = -n^4 + \beta n^2 - \alpha, \quad \sigma_n = -\gamma_1 n + \gamma_2 n^3 - \gamma_3 n^5, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Соответствующие собственные функции (СФ) $\exp(inx)$ образуют полную ортогональную систему функций в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Поэтому решения линейной краевой задачи (1.1), (1.2) будут асимптотически устойчивы, если при всех n выполнены неравенства $\tau_n < 0$ (в нашем случае $\lim_{|n|\to\infty} \tau_n = -\infty$) и они неустойчивы, если при некотором k выполнено неравенство $\tau_k > 0$. В свою очередь нулевое решение нелинейной краевой задачи (0.1), (0.2) будет асимптотически (экспоненциально) устойчивым, если при всех n справедливо неравенство $\tau_n < 0$ и оно неустойчиво, если существует такое целое k, что $\tau_k > 0$. Для краевой задачи (0.1), (0.2) реализуется критический случай, если $\tau_n \leq 0$ и при некоторых целых k реализуется равенство $\tau_k = 0$.

Выделим возможные критические случаи в задаче об устойчивости нулевого решения рассматриваемой краевой задачи (0.1), (0.2). Пусть сначала $\alpha > 0$. Тогда из анализа неравенства $n^4 - \beta n^2 + \alpha > 0$ и соответствующего равенства $n^4 - \beta n^2 + \alpha = 0$ при целых n вытекает, что можно выделить два критических случая, если $\alpha \neq 0$.

Первый критический случай. Существует такое натуральное m, что при $n = \pm m$ выполнено равенство $\tau_m = \tau_{-m} = 0$, а для $n \neq \pm m$ неравенство $\tau_n < 0$. Такой вариант реализуется, если $\beta = \beta_1 = m^2 + (m + \delta)^2$, $\alpha = \alpha_1 = m^2(m + \delta)^2$, $\delta \in (-1, 1)$, что вытекает из теоремы Виета. При таком выборе α и β линейная краевая задача (1.1), (1.2) имеет два линейно независимых периодических по t решения

$$q_m = \exp(imx + i\sigma_m t), \quad q_{-m} = \bar{q}_m, \quad \sigma_m = \gamma_2 m^3 - \gamma_1 m - \gamma_3 m^5, \quad \sigma_{-m} = -\sigma_m.$$

Второй критический случай. Существует такое натуральное m, что равенство $\tau_n = 0$ реализуется при $n = \pm m$ и $n = \pm(m+1)$. При остальных $n \neq \pm m$, $n \neq \pm(m+1)$ выполнено неравенство $\tau_n < 0$. Такой вариант критического случая имеет место при $\alpha = \alpha_2 = m^2(m+1)^2$, $\beta = \beta_2 = m^2 + (m+1)^2$. Тогда краевая задача (1.1), (1.2) имеет следующие периодические по t решения:

$$q_m = \exp(imx + i\sigma_m t), \quad q_{-m} = \bar{q}_m, \quad q_{m+1}\exp(i(m+1)x + i\sigma_{m+1}t), \quad q_{-(m+1)} = \bar{q}_{m+1},$$
$$\sigma_m = \gamma_2 m^3 - \gamma_1 m - \gamma_3 m^5, \quad \sigma_{m+1} = \gamma_2(m+1)^3 - \gamma_1(m+1) - \gamma_3(m+1)^5.$$

Особый критический случай при исследовании устойчивости возникает при $\alpha = 0$. Тогда ЛДО A имеет нулевое СЗ ($\lambda_0 = 0$), а соответствующая СФ $e_0(x) = 1$. При $\beta = \beta_3 = 1(\alpha = \alpha_3 = 0)$ ЛДО A имеет СЗ $\lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma$, где $\sigma = \gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3$. Если $n \neq 0, \pm 1$, то выполнено неравенство $\tau_n < 0$.

В следующих разделах работы будут проанализированы бифуркационные задачи, возникающие в случаях, близких к трем отмеченным критическим. Это позволит найти решения, ответвляющиеся от состояния равновесия $u = 0$.

2. БИФУРКАЦИОННАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ, БЛИЗКОМ К КРИТИЧЕСКОМУ, ОДНОЙ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Положим в уравнении (0.1) $\beta = \beta_1 + \nu_1\varepsilon, \alpha = \alpha_1 - \nu_2\varepsilon$, где $\nu_1, \nu_2 \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Краевую задачу (0.1), (0.2) перепишем в следующем виде:

$$u_t = A_1 u + \varepsilon B_1 u + F(u), \tag{2.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{2.2}$$

Здесь

$$A_1 u = -u_{xxxx} - \beta_1 u_{xx} - \alpha_1 u - \gamma_1 u_x - \gamma_2 u_{xxx} - \gamma_3 u_{xxxxx}, \quad B_1 u = \nu_2 u - \nu_1 u_{xx},$$
$$F(u) = F_2(u) + F_3(u), \quad F_2(u) = -a_2(u^2)_x - b_2(u^2)_{xx}, \quad F_3(u) = -a_3(u^3)_x - b_3(u^3)_{xx}.$$

Из предположений п. 1 вытекает, что ЛДО $A(\varepsilon) = A_1 + \varepsilon B_1$ имеет СЗ

$$\lambda_\pm(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon), \quad \sigma(\varepsilon) = \sigma_m, \quad \tau(\varepsilon) = \varepsilon\tau'_m, \quad \tau'_m = \nu_1 m^2 + \nu_2.$$

Этой паре СЗ отвечают СФ $\exp(\pm imx)$. Для остальных СЗ $A(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\operatorname{Re}\lambda_n(\varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0$, γ_0 – достаточно малая положительная постоянная, которая не зависит от ε, если $|\varepsilon|$ достаточно мал.

Все эти свойства позволяют заключить, что для краевой задачи (2.1), (2.2) справедливо утверждение, которое широко известно как бифуркационная теорема Андронова–Хопфа (см., например, [18]). Согласно ей изучение динамики решений с достаточно малыми по норме фазового пространства решений может быть сведено к изучению динамики вспомогательной двумерной системы на двумерном центральном многообразии $M_2(\varepsilon)$ [18]–[20]. Остальные решения с достаточно малыми начальными условиями $u(0, x) = f(x)$ приближаются к $M_2(\varepsilon)$ со скоростью экспоненты. Такую вспомогательную систему принято называть нормальной формой (НФ). При этом она в комплексной форме записи может быть записана в виде одного дифференциального уравнения для вспомогательной комплекснозначной функции $z = z(t)$

$$\dot{z} = \varepsilon[\tau'_m + (l_m + ig_m)|z|^2]z, \tag{2.3}$$

если первая ляпуновская величина $l_m \neq 0$, а также $\varepsilon \neq 0$. Здесь выписана "главная" часть НФ, играющая определяющую роль при исследовании задачи в ситуации общего положения. Недостающие слагаемые имеют порядок $o(\varepsilon)$.

В приложениях к уравнениям с частными производными важен алгоритм построения НФ, т.е. способ вычисления ее коэффициентов. Ниже, в этом разделе, приводится алгоритм такого построения, который может быть проинтерпретирован как модификация широко известного метода Крылова–Боголюбова.

Решения краевой задачи (2.1), (2.2), принадлежащие центральному многообразию $M_2(\varepsilon)$, будем искать в виде

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(t,x,z,\bar{z}) + \varepsilon u_2(t,x,z,\bar{z}) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,x,z,\bar{z}) + O(\varepsilon^2). \tag{2.4}$$

Здесь $z = z(t)$ – решение дифференциального уравнения (2.3). Функция

$$u_1(t,x,z,\bar{z}) = zq_m + \overline{zq}_m, q_m = \exp(imx + i\sigma_m t).$$

Функции u_2, u_3 гладко зависят от своих аргументов. При фиксированных t, z, $\bar{z}$ эти функции, как функции переменного x, принадлежат H_2^s, а по переменной t имеют период $2\pi/\sigma_m$. Наконец,

$$M_k(u_j) = \frac{\sigma_m}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi/\sigma_m}\int\limits_0^{2\pi} u_j q_k dxdt = 0, \quad j = 2,3, \quad k = \pm m, \quad q_{-m} = \bar{q}_m.$$

Класс таких функций обозначим через V.

Подстановка суммы (2.4) в краевую задачу (2.1), (2.2) с последующим приравниванием членов при ε и $\varepsilon^{3/2}$ приводит к неоднородным краевым задачам для определения функций u_2, u_3. Так, для u_2 получаем краевую задачу

$$u_{2t} - A_1u_2 = \Phi_2(t,x,z,\bar{z}), \tag{2.5}$$

$$u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t,x), \tag{2.6}$$

где $\Phi_2(t,x,z,\bar{z}) = -a_2(u_1^2)_x - b_2(u_1^2)_{xx}$. Краевая задача (2.5), (2.6) однозначно разрешима в классе функций из V. При этом

$$u_2(t,x,z,\bar{z}) = \eta_m(zq_m)^2 + \bar{\eta}_m(\overline{zq}_m)^2,$$

где

$$\eta_m = \frac{2(2b_2m - ia_2)}{3m(c_m + 2id_m m)}, \quad c_m = 3m^2 - 2m\delta - \delta^2, \quad d_m = 5\gamma_3m^2 - \gamma_2.$$

Для u_3 получим аналогичную неоднородную краевую задачу

$$u_{3t} - A_1u_3 = \Phi_3(t,x,z,\bar{z}), \tag{2.7}$$

$$u_3(t, x + 2\pi) = u_3(t,x),$$

$$\Phi_3(t,x,z,\bar{z}) - a_3(u_1^3)_x - b_3(u_1^3)_{xx} - 2a_2(u_1u_2)_x - 2b_2(u_1u_2)_{xx} - B_1u_1 - \tag{2.8}$$

$$- (\tau'_m + (l_m + ig_m)|z|^2)zq_m - (\tau'_m + (l_m - ig_m)\,|\,z\,|^2)\bar{z}\bar{q}_m.$$

При выписывании правой части уравнения (2.7) следует учесть, что производная по t от $z = z(t)$ вычисляется в силу уравнения (2.3). Из условий ее разрешимости в классе функций $V(M_m(\Phi_3) = 0)$ находим, что с необходимостью

$$l_m = \frac{4[c_m(2b_2^2m^2 - a_2^2) - 6a_2b_2d_mm^2]}{3(c_m^2 + 4m^2d_m^2)} + 3b_3m^2,$$

$$g_m = -3a_3m - \frac{8md_m(2b_2^2m^2 - a_2^2) + 12ma_2b_2c_m}{3(c_m^2 + 4m^2d_m^2)},$$

а также еще раз подтвердилось, что надкритичность $\tau'_m = \nu_1m^2 + \nu_2$.

Лемма 2.1. *НФ* (2.3) *имеет периодическое решение* P_1

$$z_m(t) = \rho_m\exp(i\varepsilon\omega_m t), \quad \rho_m = \sqrt{-\frac{\tau'_m}{l_m}}, \quad \omega_m - g_m\frac{\tau'_m}{l_m},$$

которое существует, если $\tau'_m l_m < 0$. *Решение* P_1 *устойчиво, если* $l_m < 0 (\tau'_m > 0)$, *и неустойчиво при* $l_m > 0$ $(\tau'_m < 0)$.

Проверка справедливости леммы 2.1 стандартна. Например, существование точного решения проверяется простой подстановкой.

Из леммы 2.1, формулы (2.4) для решений на инвариантном ("центральном") многообразии $M_2(\varepsilon)$ вытекает, что справедлива

Теорема 2.1. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *периодическому решению* P_1 *НФ* (2.3) *соответствует семейство периодических решений* $P(\varphi_m)$ *краевой задачи* (2.1), (2.2)

$$\begin{gathered} u_m(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho_m[\exp(i\varphi_m) + \exp(-i\varphi_m)] + \\ + \varepsilon\rho_m^2[\eta_m \exp(2i\varphi_m) + \overline{\eta}_m \exp(-2i\varphi_m)] + O(\varepsilon^{3/2}), \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\varphi_m = \varphi_m(t, x) = mx + (\sigma_m + \varepsilon\omega_m)t + \varphi_0$, *а* φ_0 — *произвольная действительная постоянная. Каждое из решений* (2.9) *устойчиво, если* $l_m < 0$, *и неустойчиво, если* $l_m > 0$.

В иной терминологии семейство периодических решений в фазовом пространстве H_2^s порождает цикл C_m, который орбитально асимптотически устойчив, если $l_m < 0$ (при $l_m > 0$ неустойчив).

Подчеркнем, что решения $u_m(t, x, \varepsilon)$ имеют структуру бегущей волны $u_m(t, x, \varepsilon) = u_m(\Theta_m, \varepsilon)$, где $\Theta_m = mx + (\sigma_m + \varepsilon\omega_m + o(\varepsilon))t$.

С физической точки зрения, случай, когда цикл C_m устойчив, более содержателен, так как соответствующие решения физически реализуемы. Такая ситуация воспроизводится при рассмотрении одного из вариантов уравнения Курамото—Сивашинского (при $b_2 = a_3 = b_3 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$). При таком выборе коэффициентов

$$l_m = -\frac{4a_2^2}{3(3m^2 - 2m\delta - \delta^2)} < 0 \tag{2.10}$$

вне зависимости от выбора натурального m и $\delta \in (-1, 1)$.

Если рассмотреть обобщенное уравнение Кана—Хиллиарда [9] ($a_2 = b_2 = a_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$), то для него $\sigma_m = \omega_m = 0$. В этом случае получим не семейство периодических решений, а семейство состояний равновесия S_m, порождающих одномерное инвариантное множество. Оно асимптотически устойчиво, если $b_3 < 0$ ($l_m < 0$), и неустойчиво, если $b_3 > 0$ ($l_m > 0$).

Здесь разобран вариант, когда $\alpha > 0$. Традиционный вариант уравнений Кана—Хиллиарда предполагает, что $\alpha = 0$. Его следует рассматривать отдельно.

3. СЛУЧАЙ, БЛИЗКИЙ К КРИТИЧЕСКОМУ, ДВУХ ПАР ЧИСТО МНИМЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Положим в уравнении (0.1)

$$\alpha = \alpha_2 - \nu_2\varepsilon, \quad \beta = \beta_2 + \nu_1\varepsilon, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, а постоянные $\alpha_2, \beta_2 > 0$ были выбраны в разд. 1. Рассмотрим полученную краевую задачу

$$u_t = A_2u + \varepsilon B_2u + F(u), \tag{3.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{3.2}$$

Здесь $A_2u = -u_{xxxx} - \beta_2u_{xx} - \alpha_2u - \gamma_1u_x - \gamma_2u_{xxx} - \gamma_3u_{xxxxx}$, а $B_2 = B_1$ (см. определение B_1 в разд. 2). Нелинейный оператор $F(u)$ был определен также в разд. 2. ЛДО $A(\varepsilon) = A_2 + \varepsilon B_2$ имеет СЗ

$$\lambda_{\pm m}(\varepsilon) = \tau_m(\varepsilon) \pm i\sigma_m(\varepsilon), \quad \lambda_{\pm(m+1)}(\varepsilon) = \tau_{m+1}(\varepsilon) \pm i\sigma_{m+1}(\varepsilon),$$

$$\tau_m(\varepsilon) = \tau'_m\varepsilon, \quad \tau'_m = \nu_1m^2 + \nu_2,$$

$$\tau_{m+1}(\varepsilon) = \tau'_{m+1}\varepsilon, \quad \tau'_{m+1} = \nu_1(m + 1)^2 + \nu_2,$$

$$\sigma_m(\varepsilon) = \sigma_m, \quad \sigma_m = \gamma_2 m^3 - \gamma_1 m - \gamma_3 m^5,$$
$$\sigma_{m+1}(\varepsilon) = \sigma_{m+1}, \quad \sigma_{m+1} = \gamma_2(m+1)^3 - \gamma_1(m+1) - \gamma_3(m+1)^5.$$

Этим СЗ отвечают СФ $\exp(\pm imx), \exp(\pm i(m+1)x)$ соответственно. При остальных n справедливо неравенство $\operatorname{Re}\lambda_n \le -\gamma_0 < 0$, $n \ne \pm m$, $n \ne \pm(m+1)$, γ_0 – положительная постоянная, которая не зависит от ε.

В такой ситуации краевая задача (3.1), (3.2) имеет в окрестности решения четырехмерное гладкое инвариантное (“центральное”) [18]–[20] многообразие $M_4(\varepsilon)$, на котором динамику решений краевой задачи определяют решения вспомогательной системы из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (или системы из двух таких уравнений в комплексной форме записи).

В этом разделе сначала ограничимся изучением ситуации общего положения. Будем считать, что либо $m \ne 1$, либо $\gamma_2 \ne 5\gamma_3$ при $m = 1$. В противном случае, кроме “резонанса” мод, реализуется резонанс собственных частот 1 : 2 в линеаризованной при $\varepsilon = 0$ краевой задачи (3.1), (3.2). Предположение, что $m = 1$ и $\gamma_2 = 5\gamma_3$, приводит к НФ иной структуры.

Решения, принадлежащие $M_4(\varepsilon)$, будем искать в виде, аналогичном сумме (2.4)

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2) + \varepsilon u_2(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2) + O(\varepsilon^2). \tag{3.3}$$

В правой части равенства (3.3) $z_1(t)$, $z_2(t)$ – решения системы дифференциальных уравнений, которую принято называть НФ. Она будет выписана ниже. Кроме того,

$$u_1(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2) = z_1 q_m + \bar z_1 \bar q_m + z_2 q_{m+1} + \bar z_2 \bar q_{m+1},$$
$$q_m = \exp(imx + i\sigma_m t), \quad q_{m+1} = \exp(i(m+1)x + i\sigma_{m+1}t).$$

Наконец, достаточно гладкие функции $u_j(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)$ $(j = 2,3)$, как функции переменного x, принадлежат H_2^s, относительно переменной t являются тригонометрическими полиномами, для них справедливы тождества

$$\int_0^{2\pi} u_j \exp(\pm ikx)dx \equiv 0, \quad k = \pm m, \quad k = \pm(m+1).$$

В нерезонасном случае (считаем, что $\sigma_m : \sigma_{m+1} \ne 1;2;1/2;3;1/3$) главная часть НФ имеет вид

$$\begin{aligned} z_1' &= \varepsilon z_1[\tau_m' + (l_{11} + ig_{11})|z_1|^2 + (l_{12} + ig_{12})|z_2|^2], \\ z_2' &= \varepsilon z_2[\tau_{m+1}' + (l_{21} + ig_{21})|z_1|^2 + (l_{22} + ig_{22})|z_2|^2]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь $\tau_m' = \nu_1 m^2 + \nu_2$, $\tau_{m+1}' = \nu_1(m+1)^2 + \nu_2$. Остальные коэффициенты l_{jk}, $g_{jk} \in \mathbb{R}$ определяются при реализации алгоритма построения НФ.

Подставим сумму (3.3) в краевую задачу (3.1), (3.2) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. В результате получим неоднородные краевые задачи для определения функций u_2, u_3. При их составлении следует учесть, что производные по t функций $z_1(t)$, $z_2(t)$ вычисляются как производные в силу системы дифференциальных уравнений (3.4). В результате получим две следующие задачи:

$$u_{2t} - A_2 u_2 = \Phi_2(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2), \tag{3.5}$$
$$u_2(t,x+2\pi) = u_2(t,x), \tag{3.6}$$
$$u_{3t} - A_3 u_3 = \Phi_3(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2), \tag{3.7}$$
$$u_3(t,x+2\pi) = u_3(t,x). \tag{3.8}$$

Здесь

$$\Phi_2(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2) = -a_2(u_1^2)_x - b_2(u_1^2)_{xx},$$
$$\Phi_3(t,x,z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2) = -a_3(u_1^3)_x - b_3(u_1^3)_{xx} - 2a_2(u_1u_2)_x - 2b_2(u_1u_2)_{xx} +$$

$$+ B_2u_1 - z_1q_m\left[\tau'_m + (l_{11} + ig_{11})\left|z_1^2\right| + (l_{12} + ig_{12})\left|z_2^2\right|\right] -$$
$$- \bar{z}_1\bar{q}_m\left[\tau'_m + (l_{11} - ig_{11})\left|z_1^2\right| + (l_{12} - ig_{12})\left|z_2^2\right|\right] -$$
$$- z_2q_{m+1}\left[\tau'_{m+1} + (l_{21} + ig_{21})\left|z_1^2\right| + (l_{22} + ig_{22})\left|z_2^2\right|\right] -$$
$$- \bar{z}_2\bar{q}_{m+1}\left[\tau'_{m+1} + (l_{21} - ig_{21})\left|z_1^2\right| + (l_{22} - ig_{22})\left|z_2^2\right|\right].$$

Решения краевых задач (3.5), (3.6) и (3.7), (3.8) следует искать в виде тригонометрических многочленов от переменных t и x, которые при всех t ортогональны в смысле скалярного произведения в $L_2(0, 2\pi)$ функциям $\exp(\pm imx), \exp(\pm i(m+1)x)$. Соответствующее решение краевой задачи (3.5), (3.6) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} u_2(t, x, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \eta_1 z_1^2 q_m^2 + \eta_2 z_2^2 q_{m+1}^2 + \eta_3 z_1 z_2 q_m q_{m+1} + \\ + \eta_4 \bar{z}_1 z_2 \bar{q}_m q_{m+1} + \bar{\eta}_1 \bar{z}_1^2 \bar{q}_m^2 + \bar{\eta}_2 \bar{z}_2^2 \bar{q}_{m+1}^2 + \bar{\eta}_3 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{q}_m \bar{q}_{m+1} + \bar{\eta}_4 z_1 \bar{z}_2 q_m \bar{q}_{m+1}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

При этом после подстановки суммы (3.9) в краевую задачу (3.5), (3.6) можно убедиться, что

$$\eta_1 = \frac{2(2b_2m - a_2i)}{3m(c_1 + 2imd_1)}, \quad \eta_2 = \frac{2(2b_2(m+1) - a_2i)}{3(m+1)(c_2 + 2i(m+1)d_2)},$$
$$\eta_3 = \frac{2(2m+1)(b_2(2m+1) - ia_2)}{m(c_3 + id_3)}, \quad \eta_4 = \frac{2(b_2 - ia_2)}{m(c_4 + id_4)}, \quad c_1 = 3m^2 - 2m - 1,$$
$$c_2 = 3m^2 + 8m + 4, \quad c_3 = (m+1)(9m^2 + 9m + 2),$$
$$c_4 = (m^2 - 1)(m + 2), \quad d_1 = 5m^2\gamma_3 - \gamma_2, \quad d_2 = 5(m+1)^2\gamma_3 - \gamma_2,$$
$$d_3 = 5\gamma_3(6m^4 + 15m^3 + 14m^2 + 6m + 1) - 3\gamma_2(2m^2 + 3m + 1),$$
$$d_4 = 3\gamma_2(m+1) - 5\gamma_3(m^3 + 2m^2 + 2m + 1).$$

Коэффициенты НФ (3.4) находим из условий разрешимости краевой задачи (3.7), (3.8) в классе тригонометрических многочленов. Для этого должны обратиться в 0 коэффициенты в правой части уравнения (3.7) при q_m, $\bar{q}_m$, q_{m+1}, $\bar{q}_{m+1}$. Откуда находим, что

$$l_{11} = 3b_3m^2 + \frac{4(c_1(2b_2^2m^2 - a_2^2) - 6a_2b_2d_1m^2)}{3(c_1^2 + 4m^2d_1^2)},$$

$$g_{11} = -3a_3m - \frac{4m(2d_1(2b_2^2m^2 - a_2^2) + 3b_2a_2c_1)}{3(c_1^2 + 4m^2d_1^2)},$$

$$l_{22} = 3b_3(m+1)^2 + \frac{4(c_2(2b_2^2(m+1)^2 - a_2^2) - 6a_2b_2d_2(m+1)^2)}{3(c_2^2 + 4(m+1)^2d_2^2)},$$

$$g_{22} = -3a_3(m+1) - \frac{4(m+1)(2d_2(2b_2^2(m+1)^2 - a_2^2) + 3b_2a_2c_2)}{3(c_2^2 + 4(m+1)^2d_2^2)},$$

$$l_{12} = 6b_3m^2 + \frac{4(2m+1)}{c_3^2 + d_3^2}[c_3(b_2^2m(2m+1) - a_2^2) - (3m+1)a_2b_2d_3] + 4\left[\frac{c_4(b_2^2m + a_2^2) - (m-1)a_2b_2d_4}{c_4^2 + d_4^2}\right],$$

$$g_{12} = -6a_3m - 4(2m+1)\left[\frac{d_3(b_2^2(2m+1)m - a_2^2) + (3m+1)c_3b_2a_2}{c_3^2 + d_3^2}\right] +$$
$$+ 4\frac{d_4(b_2^2m + a_2^2) + (m-1)a_2b_2c_4}{c_4^2 + d_4^2},$$

$$l_{21} = 6(m+1)^2 b_3 + 4\frac{m+1}{m}\left[\frac{c_4(b_2^2(m+1) - a_2^2) - (m+2)d_4a_2b_2}{c_4^2 + d_4^2}\right] +$$
$$+ 4\frac{(m+1)(2m+1)}{m}\left[\frac{c_3(b_2^2(2m+1)(m+1) - a_2^2) - a_2b_2d_3(3m+2)}{c_3^2 + d_3^2}\right],$$
$$g_{21} = -6a_3(m+1) - 4\frac{m+1}{m}\left[\frac{d_4(b_2^2(m+1) - a_2^2) + (m+2)a_2b_2c_4}{c_4^2 + d_4^2}\right] -$$
$$- 4\frac{(m+1)(2m+1)}{m}\left[\frac{d_3(b_2^2(2m+1)(m+1) - a_2^2) + (3m+2)c_3b_2a_2}{c_3^2 + d_3^2}\right].$$

В системе дифференциальных уравнений (3.4) положим

$$z_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2)$$

и для действительных функций $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (НФ)

$$\begin{aligned} \dot\rho_1 &= \varepsilon[\tau'_m + l_{11}\rho_1^2 + l_{12}\rho_2^2]\rho_1, \\ \dot\rho_2 &= \varepsilon[\tau'_{m+1} + l_{21}\rho_1^2 + l_{22}\rho_2^2]\rho_2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \dot\varphi_1 &= \varepsilon[g_{11}\rho_1^2 + g_{12}\rho_2^2], \\ \dot\varphi_2 &= \varepsilon[g_{21}\rho_1^2 + g_{22}\rho_2^2]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

В системе (3.10), (3.11) определяющую роль играет замкнутая подсистема (3.10) для амплитудных переменных ρ_1, ρ_2. Она, безусловно, имеет нулевое состояние равновесия $\rho_1 = \rho_2 = 0$, соответствующее состоянию равновесия $u = 0$ краевой задачи (3.1), (3.2), но может иметь и ненулевые состояния равновесия.

Лемма 3.1. *Система* (3.10) *имеет следующие ненулевые состояния равновесия:*

$$S_1 : \rho_{11} = \sqrt{-\tau'_m/l_{11}}, \quad \rho_{21} = 0, \quad \text{если} \quad \tau'_m l_{11} < 0,$$
$$S_2 : \rho_{12} = 0, \quad \rho_{22} = \sqrt{-\tau'_{m+1}/l_{22}}, \quad \text{если} \quad \tau'_{m+1} l_{22} < 0,$$
$$S_3 : \rho_{13} = \sqrt{\Delta_1/\Delta}, \quad \rho_{23} = \sqrt{\Delta_2/\Delta}, \quad \text{если} \quad \Delta_1\Delta > 0 \ \text{и} \ \Delta_2\Delta > 0.$$

В последних двух формулах

$$\Delta = l_{11}l_{22} - l_{21}l_{12}, \quad \Delta_1 = l_{12}\tau'_{m+1} - l_{22}\tau'_m, \quad \Delta_2 = l_{21}\tau'_m - l_{11}\tau'_{m+1}.$$

Состояние равновесия S_1 асимптотически устойчиво, если $l_{11} < 0$, $\Delta_2 < 0$, и неустойчиво, если хотя бы одна из величин l_{11}, Δ_2 положительна. Состояние равновесия S_2 асимптотически устойчиво, если $l_{22} < 0$, $\Delta_1 < 0$, и неустойчиво, если хотя бы одна из величин l_{22}, Δ_1 – положительна.

Наконец, S_3 асимптотически устойчиво, если

$$\Delta > 0, \quad l_{11}\Delta_1 + l_{22}\Delta_2 < 0.$$

Если $\Delta < 0$ или $l_{11}\Delta_1 + l_{22}\Delta_2 > 0$, то S_3 неустойчиво.

Координаты S_3 находим как решения алгебраической системы

$$l_{11}\rho_1^2 + l_{12}\rho_2^2 = -\tau'_m, \quad l_{21}\rho_1^2 + l_{22}\rho_2^2 = -\tau'_{m+1}.$$

Условия устойчивости указанных состояний равновесия проверяются стандартным образом. Для этого необходимо линеаризовать систему дифференциальных уравнений (3.10) на соответствующем состоянии равновесия.

Из результатов работ [21]–[24] вытекает справедливость утверждения.

Теорема 3.1. *Существует такая положительная постоянная ε_0, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ненулевому состоянию равновесия $S_1(S_2)$ соответствует цикл $L_m(\varepsilon)(L_{m+1}(\varepsilon))$ нелинейной краевой задачи* (3.1), (3.2). *Соответствующий цикл $L_m(\varepsilon)(L_{m+1}(\varepsilon))$ орбитально асимптотически устойчив* (*не-*

устойчив), *если асимптотически устойчиво* (*неустойчиво*) *соответствующее ему состояние равновесия*.

Цикл $L_m(\varepsilon)$ *порожден семейством периодических решений*

$$u_m(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho_{11}(\exp(i\psi_m) + \exp(-i\psi_m)) + \varepsilon\rho_{11}^2[\eta_1\exp(2i\psi_m) + \bar{\eta}_1\exp(-2i\psi_m)] + o(\varepsilon),$$

где $\psi_m = mx + (\sigma_m + \omega_m\varepsilon)t + \psi_0,\ \psi_0 \in R.$

Для периодических решений, порождающих цикл $L_{m+1}(\varepsilon)$, *имеем асимптотические формулы*

$$u_{m+1}(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\rho_{22}(\exp(i\psi_{m+1}) + \exp(-i\psi_{m+1})) + \\ + \varepsilon\rho_{22}^2[\eta_2\exp(2i\psi_{m+1}) + \bar{\eta}_2\exp(-2i\psi_{m+1})] + o(\varepsilon),$$

где $\psi_{m+1} = (m+1)x + (\sigma_{m+1} + \omega_{m+1}\varepsilon)t + \psi_0, \psi_0 \in R.$

При тех же ε *состоянию равновесия* S_3 *соответствует двумерный инвариантный тор* $T_2(\varepsilon)$, *который асимптотически устойчив, если асимптотически устойчиво* S_3. *Тор* $T_2(\varepsilon)$ *седловой, если неустойчиво состояние равновесия* S_3.

Тор заполнен решениями, для каждого из которых справедлива асимптотическая формула

$$u_T(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}[\rho_{13}[\exp(i\psi_3) + \exp(-i\psi_3)] + \rho_{23}[\exp(i\psi_4) + \exp(-i\psi_4)]] + \varepsilon[\rho_{13}^2\eta_1\exp(2i\psi_3) + \\ + \rho_{23}^2\eta_2\exp(2i\psi_4) + \rho_{13}\rho_{23}\eta_3\exp(i\psi_3 + i\psi_4) + \rho_{13}\rho_{23}\eta_4\exp(i\psi_4 - i\psi_3) + \text{к.с.}] + o(\varepsilon).$$

Здесь $\psi_3 = mx + (\sigma_m + \varepsilon\omega_m + o(\varepsilon))t + \psi_{30}$, $\psi_4 = (m+1)x + (\sigma_{m+1} + \varepsilon\omega_{m+1} + o(\varepsilon))t + \psi_{40}, \psi_{30}$, $\psi_{40} \in R$, $\omega_m = g_{11}\rho_{13}^2 + g_{12}\rho_{23}^2$, $\omega_{m+1} = g_{21}\rho_{13}^2 + g_{22}\rho_{23}^2$. *Через к.с. во второй скобке правой части обозначены слагаемые, которые комплексно сопряжены к выписанным в явном виде. Поправки к частотам* σ_m, σ_{m+1} *находим после анализа системы дифференциальных уравнений* (3.11).

Теорема 3.1 сформулирована в ситуации общего положения. Если $\sigma_m = \sigma_{m+1} = \omega_m = \omega_{m+1} = 0$, то семейство решений u_T уже не зависит от t и двумерное инвариантное множество $T_2(\varepsilon)$ заполнено семейством неоднородных состояний равновесия. Состояниям равновесия S_1, S_2 соответствуют одномерные инвариантные многообразия, заполненные неоднородными состояниями равновесия. Последнее можно обнаружить, если рассмотреть уравнение Кана–Хилларда (т.е. уравнение (0.1) при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = a_2 = b_2 = a_3 = 0$, $\alpha > 0$), если $b_3 < 0$.

Иная ситуация имеет место, если уравнение (0.1) рассмотреть при $\gamma_2 = \gamma_3 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $\alpha > 0$. При таком выборе коэффициентов получаем одну из версий уравнения Курамото–Сивашинского (см. [2]). Пусть, кроме того, $\alpha_2 = 36$, $\beta_2 = 13$ ($m = 2$) и $\nu_1 > 4\nu_2 > 0$. Проверка условий теоремы 3.1 показывает, что существуют два цикла $L_2(\varepsilon)$, $L_3(\varepsilon)$ и тор $T_2(\varepsilon)$. При этом устойчив тор, а циклы седловые. Следовательно, с физической точки зрения, реализуются двухчастотные колебания, которые и заполняют двумерный инвариантный тор (в ситуации общего положения).

Пусть теперь $m = 1$, $\gamma_2 = 5\gamma_3$. Следовательно, в рассматриваемой бифуркационной задаче реализуется при $\varepsilon = 0$ резонанс “собственных” частот 1 : 2, т.е. $\sigma_2 = 2\sigma_1$. Отметим, что ниже ограничимся частным случаем бифуркационной задачи. Более общий ее вариант предусматривает, что $\gamma_2 - 5\gamma_3 = \gamma_4\varepsilon$, где $\gamma_4 \in R$, а ε – малый параметр.

В этом случае аппарат теории нормальных форм применяется в иной форме. Решения, принадлежащие $M_4(\varepsilon)$, следует искать в виде (см. [25], [26])

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon u_1(x, z_1\bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + \varepsilon^2 u_2(x, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + o(\varepsilon^2), \tag{3.12}$$

где

$$u_1(t,x,z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2) = z_1q_1 + \bar{z}_1\bar{q}_1 + z_2q_2 + \bar{z}_2\bar{q}_2, \quad z_j = z_j(t), \quad j = 1,2,$$
$$q_1 = \exp(i\sigma t + ix), \quad q_2 = \exp(2i\sigma t + 2ix), \quad \sigma_1 = \sigma = \gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3.$$

Подчеркнем, что $q_2 = q_1^2$, $q_1\bar{q}_1 = 1$, $q_2\bar{q}_2 = 1$. Наконец, комплекснозначные функции $z_1(t)$, $z_2(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (НФ)

$$\dot{z}_1 = \varepsilon\psi_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + o(\varepsilon), \quad \dot{z}_2 = \varepsilon\psi_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + o(\varepsilon). \tag{3.13}$$

Правые части НФ (3.13) будут определены позднее. Подстановка суммы (3.12) в краевую задачу (3.1), (3.2) и выделение членов пропорциональных ε^2 приводит к неоднородной краевой задаче для определения функций $u_2 = u_2(t, x, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)$. В этом случае соответствующая краевая задача имеет вид

$$u_{2t} = A_2u_2 + \varepsilon B_2u_1 - a_2(u_1^2)_x - b_2(u_1^2)_{xx} - \psi_1q_1 - \bar{\psi}_1\bar{q}_1 - \psi_2q_2 - \bar{\psi}_2\bar{q}_2, \tag{3.14}$$

$$u_2(t, x + 2\pi, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = u_2(t, x, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2). \tag{3.15}$$

Из условий ее разрешимости в классе $2\pi/\sigma$ периодических по переменной t функций вытекает, что

$$\psi_1 = \tau_1' z_1 + (l_3 + ig_3)\bar{z}_1 z_2, \quad \psi_2 = \tau_2' z_2 + (l_4 + ig_4)z_1^2.$$

В нашем случае

$$\tau_1' = \nu_1 + \nu_2, \quad \tau_2' = 4\nu_1 + \nu_2, \quad l_3 + ig_3 = 2(b_2 - ia_2), \quad l_4 + ig_4 = 2(2b_2 - ia_2).$$

Далее, включая следующий раздел, ограничимся рассмотрением вариантов уравнения, когда $b_2 = 0$. Если дополнительно $a_3 = 0$, $b_3 = 0$, то получаем одну из версий уравнения Кавахары, а при $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $a_3 = 0$, $b_2 = 0$ получаем одну из версий для уравнения Курамото–Сивашинского. При таких дополнительных предположениях укороченная нормальная форма примет вид ($a_2 \neq 0$)

$$\dot{z}_1 = \varepsilon[\tau_1' z_1 - 2ia_2\bar{z}_1 z_2], \quad \dot{z}_2 = \varepsilon[\tau_2' z_2 - 2ia_2 z_1^2].$$

Замены $z_1 = v_1/(2a_2)$, $z_2 = -v_2/(2a_2)$ сводят последнюю систему дифференциальных уравнений к следующей:

$$\dot{v}_1 = \varepsilon[\tau_1' v_1 + i\bar{v}_1 v_2], \quad \dot{v}_2 = \varepsilon[\tau_2' v_2 + iv_1^2]. \tag{3.16}$$

В системе дифференциальных уравнений (3.16) положим

$$v_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad v_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2), \quad \rho_1, \rho_2 \geq 0, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}.$$

В результате она перепишется в действительной форме:

$$\dot{\rho}_1 = \varepsilon[\tau_1'\rho_1 - \rho_1\rho_2 \sin\psi], \quad \dot{\rho}_2 = \varepsilon[\tau_2'\rho_2 + \rho_1^2 \sin\psi],$$

$$\dot{\varphi}_1 = \varepsilon\rho_2 \sin\psi, \quad \dot{\varphi}_2 = \varepsilon(\rho_1^2/\rho_2)\cos\psi, \quad \psi = \varphi_2 - 2\varphi_1.$$

В свою очередь из последней системы дифференциальных уравнений можно выделить замкнутую подсистему из трех уравнений

$$\dot{\rho}_1 = \varepsilon[\tau_1'\rho_1 - \rho_1\rho_2 \sin\psi], \quad \dot{\rho}_2 = \varepsilon[\tau_2'\rho_2 + \rho_1^2 \sin\psi],$$

$$\dot{\psi} = \varepsilon\left[\frac{\rho_1^2}{\rho_2} - 2\rho_2\right]\cos\psi,$$

которая имеет следующие грубые состояния равновесия:

$$S_1 : \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \rho_1 = \sqrt{-\tau_1'\tau_2'}, \quad \rho_2 = \tau_1',$$

$$S_2 : \psi = \frac{3\pi}{2}, \quad \rho_1 = \sqrt{-\tau_1'\tau_2'}, \quad \rho_2 = -\tau_1'.$$

Состояние равновесия S_1 существует, если $\tau_1' > 0$, $\tau_2' < 0$, а S_2, если $\tau_1' < 0$, $\tau_2' > 0$. При этом первое из них асимптотически устойчиво, а второе неустойчиво.

Пусть в уравнении (0.1) $b_2 = 0$, $\gamma_2 = 5\gamma_3$, $\alpha = \alpha_2 - \nu_2\varepsilon$, $\beta = \beta_2 - \nu_1\varepsilon$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 5$, $a_2 \neq 0$. Из построений и результатов работы [25], [26] вытекает справедливость утверждения.

Теорема 3.2. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *краевая задача* (0.1), (0.2) *имеет предельный цикл, если* $\tau'_1\tau'_2 < 0$. *Это цикл устойчив, если* $\tau'_2 < 0$ *и* $2\tau'_1 + \tau'_2 < 0$. *Для решений, формирующих этот цикл, справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a_2}\sqrt{-\tau'_1\tau'_2}\cos(\sigma t + x + \varphi_0) + \frac{\varepsilon}{a_2}\tau'_1\sin(2\sigma t + 2x + 2\varphi_0) + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_0 \in R.$$

Напомним, что $\tau'_1 = \nu_1 + \nu_2$, $\tau'_2 = 4\nu_1 + \nu_2$.

4. ОСОБЫЙ ВАРИАНТ БИФУРКАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе рассмотрим краевую задачу (0.1), (0.2) при $\alpha = 0$. Будем дополнительно предполагать, что $a_3 = b_3 = b_2 = 0$. При всех этих дополнительных предположениях получаем уравнение, которое принято называть уравнением Кавахары (Кавахары—Бенни—Лина) [4], [5]. Если дополнительно $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, то имеем уравнение Курамото—Сивашинского.

Положим также $\beta = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. В результате получим особый вариант критического случая, когда спектру устойчивости принадлежит $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma_1$, $\sigma_1 = -\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ (см. разд. 1). Перепишем краевую задачу (0.1), (0.2) в форме, аналогичной разд. 2, разд. 3:

$$u_t = A_3u + \varepsilon B_3u - a_2(u)^2_x, \tag{4.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{4.2}$$

где $A_3u = -u_{xxxx} - u_{xx} - \gamma_1u_x - \gamma_2u_{xxx} - \gamma_3u_{xxxxx}$, $B_3u = -u_{xx}$.

Любое решение краевой задачи (4.1), (4.2) можно представить в виде суммы

$$u(t, x) = u_0(t) + v(t, x), \quad u_0(t) = M_0(u) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t, x)dx,$$

$$v(t, x) = \sum_{n\neq 0} u_n(t)\exp(inx), \quad u_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t, x)\exp(-inx)dx.$$

Ясно, что $M_0(v) = 0$. Подчеркнем, что правая часть уравнения (4.1) имеет нулевое пространственное среднее. Поэтому краевая задача (4.1), (4.2) может быть заменена на уравнение

$$\dot{u}_0(t) = 0, \quad u_0(t) = c,$$

где c — произвольная действительная постоянная, и краевая задача для $v(t, x)$

$$v_t = A(c)v + \varepsilon B_3v - a_2(v^2)_x, \tag{4.3}$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M_0(v) = 0, \tag{4.4}$$

где $A(c)v = A_3v - 2a_2cv_x$. Следовательно, ЛДО $A(c)$ имеет СЗ

$$\lambda_{\pm 1}(\varepsilon, c) = \varepsilon \pm i\sigma(c), \quad \sigma(c) = \gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3 - 2a_2c, \quad \sigma(0) = \sigma_1,$$

а для остальных $\lambda_n(\varepsilon, c)$ выполнено неравенство $\operatorname{Re}\lambda_n(\varepsilon, c) \le -\gamma_0 < 0$. Причем γ_0 не зависит от выбора c. Фазовым пространством нелинейной краевой задачи (4.3), (4.4) следует считать пространство $H^s_{2,0} \subset H^s_2$, состоящее из тех функций $f(x) \in H^s_2(u(0, x) = f(x))$, для которых дополнительно выполнено равенство $M_0(f) = 0$.

Для анализа бифуркаций нелинейной краевой задачи (4.3), (4.4) применима методика из разд. 2 данной работы. Напомним, что исследование окрестности краевой задачи (4.3), (4.4) может быть сведено к анализу НФ:

$$\dot{z} = \varepsilon[1 + (l + ig)|z|^2]z. \tag{4.5}$$

В данном случае

$$l = -\frac{4a_2^2}{3(4 + d^2)} < 0, \quad g = \frac{2da_2^2}{3(4 + d^2)}, \quad d = 5\gamma_3 - \gamma_2.$$

Дифференциальное уравнение (4.5) имеет устойчивое периодическое решение

$$z(t) = \rho_0 \exp(i\varepsilon\omega_0 t), \quad \rho_0 = \sqrt{-1/l}, \quad \omega_0 = -g/l,$$

которому соответствует семейство периодических решений, имеющих структуру бегущей волны

$$v_c(t,x,\varepsilon) = 2\rho_0\varepsilon^{1/2}\cos(\psi_c) + O(\varepsilon), \quad \psi_c = x + \sigma(c)t + \alpha,$$

где α – произвольная действительная постоянная. В данном разделе выписан только главный член асимптотики в действительной форме. Понятно, что формулу для $v_c(t,x,\varepsilon)$ можно уточнить, если воспользоваться вычислениями из разд. 2. Периодические решения $v_c(t,x,\varepsilon)$ формируют цикл $L_c(\varepsilon)$ в фазовом пространстве решений вспомогательной краевой задачи (4.3), (4.4). Все ее решения с достаточно малыми по норме начальными условиями и лежащие в некоторой окрестности $L_c(\varepsilon)$ приближаются к нему со скоростью экспоненты, показатель которой $\kappa(\gamma_0) < 0$, но не зависит от выбора c.

Возвратимся теперь к краевой задаче (4.1), (4.2). Она имеет семейство периодических решений

$$u_c(t,x,\varepsilon) = c + 2\rho_0\varepsilon^{1/2}\cos(\psi_c) + O(\varepsilon), \tag{4.6}$$

которое зависит от двух произвольно выбранных параметров c и c_0. Более того, это семейство решений формирует двумерное инвариантное множество Cil(ε) для решений краевой задачи (4.1), (4.2) (локальный аттрактор для ее решений). Это инвариантное множество уместно назвать цилиндром, так как с геометрической точки зрения представляет собой декартово произведение замкнутой траектории $L_c(\varepsilon)$ на прямую.

Подчеркнем, что все решения (4.6) периодические функции переменной t, период которых зависит от выбора c. Действительно,

$$T_c \simeq 2\pi/\sigma(c), \quad \sigma(c) = \gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3 - 2a_2c \quad (a_2 \neq 0).$$

Доказательство того факта, что все решения двупараметрического семейства периодических решений (4.6) неустойчивы в смысле определения Ляпунова в норме фазового пространства решений достаточно стандартно. Выберем два какие-либо решения из этого семейства:

$$u_1 = u(t,x,c_1,\alpha_1) = c_1 + 2\rho_0\varepsilon^{1/2}\cos(x + \sigma(c_1)t + \alpha_1) + o(\varepsilon^{1/2}),$$
$$u_2 = u(t,x,c_2,\alpha_2) = c_2 + 2\rho_0\varepsilon^{1/2}\cos(x + \sigma(c_2)t + \alpha_2) + o(\varepsilon^{1/2}).$$

“Главные” части обоих последних формул обозначим через w_1, w_2, т.е.

$$w_j = w_j(t,x,c_j,\alpha_j) = c_j + 2\rho_0\varepsilon^{1/2}\cos(x + \sigma(c_j)t + \alpha_j), \quad j = 1,2.$$

Тогда следствием тригонометрических преобразований будет равенство

$$|\Delta w_x| = |w_{1x} - w_{2x}| = 4\rho_0\varepsilon^{1/2}|\sin\Theta_1(t)||\cos\Theta_2(t,x)|,$$

где

$$\Theta_1(t) = 0.5[(\sigma(c_1) - \sigma(c_2))t + \Delta_1], \quad \Theta_2(t,x) = x + 0.5[(\sigma(c_1) + \sigma(c_2))t + \Delta_2],$$
$$\Delta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \Delta_2 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\|\Delta w_x\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} (\Delta w_x)^2 dx = 16\pi\rho_0^2\varepsilon\sin^2(\Theta_1(t)).$$

Из этих построений вытекает, что справедливы 3 замечания:

1) $\|\Delta w_x\|_{L_2(0,2\pi)} = 4\pi^{1/2}\rho_0\varepsilon^{1/2}$, если $t = t_k$, где t_k выбирается как решение уравнения

$$0.5[(\sigma(c_1) - \sigma(c_2))t_k] + \Delta_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

где $k \in Z$, т.е. $t_k = \dfrac{\pi + 2\pi k - \Delta_1}{2a_2(c_2 - c_1)}$. Выбор k обеспечивает справедливость неравенство $t_k > 0$. Кроме того, $\lim\limits_{|k|\to\infty} |t_k| = \infty$.

2) Следовательно, имеем

$$\|\Delta w\|_{H_2^s} \geq \|\Delta w_x\|_{L_2(0,2\pi)} \geq 4\pi^{1/2}\rho_0\varepsilon^{1/2},$$

если $s = 4$ или 5, а $t = t_k$.

3) Наконец, при $t = 0$ получаем неравенство $\|\Delta w\|_{H_2^s} \leq \delta$, если $|c_1 - c_2| \leq \delta_1$, $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq \delta_1$. При этом $\delta = \delta(\delta_1) \to 0$, если $\delta_1 \to 0$.

Аналогичные замечания справедливы и для решений u_1, u_2, а не только для их “главных” частей, если ε_0 – достаточно малая положительная постоянная, а $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Похожий результат был получен в [27], где рассматривалась иная краевая задача.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучена периодическая краевая задача для уравнения (0.1), которое при конкретизации коэффициентов включает в себя такие известные уравнения, как Курамото–Сивашинского, Кана–Хилларда, Кавахары. Для краевой задачи (0.1), (0.2) изучены локальные бифуркации при смене устойчивости однородными состояниями равновесия. Отметим, что задача о локальных бифуркациях для краевой задачи типа (0.1), (0.2) рассматривалась, но для некоторых частных случаев, часто при дополнительных условиях на класс решений. В большинстве случаев речь шла об изучении локальных бифуркаций для простейшей редакции уравнения Курамото–Сивашинского вместе с периодическими краевыми условиями и дополнительными предположениями относительно решений такой краевой задачи. Например, четности (нечетности) относительно пространственной переменной x (см., например, [28], [29]). При этом использовалась редукция краевой задачи к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений на основе применения метода Галеркина с небольшим количеством базисных функций (например, четырех). Часто детальный анализ бифуркаций был основан на использовании компьютерного анализа соответствующих бифуркационных задач. Отметим также, что во многих работах используется основополагающая работа [30], где доказана теорема о существовании глобального аттрактора смешанной задачи

$$u_t + \nu u_{xxxx} + u_{xx} + \frac{1}{2}(u_x)^2 = 0,$$
$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R,$$
$$u(t, x + L) = u(t, x), \quad u(t, -x) = u(t, x)$$

или

$$u_t + \nu u_{xxxx} + u_{xx} + (u^2)_x = 0,$$
$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R,$$
$$u(t, x + L) = u(t, x), \quad u(t, -x) = -u(t, x),$$

т.е. периодических краевых задач для базисного варианта уравнения Курамото–Сивашинского, но с дополнительными условиями четности или нечетности решений. В некоторых работах в ситуациях, аналогичных работам [28], [29] для анализа базисного варианта уравнения Курамото–Сивашинского использовался метод Ляпунова–Шмидта (см., например, [31]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984. P. 114–132.
2. *Sivashinsky G.I.* Weak turbulence in periodic flow // Physica D. 1985. V. 17. P. 234–255.
3. Диссипативные солитоны // Под ред. Н. Ахмедиева и А. Анкевича. М.: Физматлит, 2008. Р. 422–425.
4. *Kawahara T., Takaoka M.* Chaotic behaviour of solutions lattice in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system // Physica D. 1989. V. 39. P. 4095–4099.
5. *Xie Yuan-Xi.* New explicit and exact solutions of the Benney-Kawahara-Lin equation// Chinese Physics B. 2009. V. 18. № 10. P. 4094–4099.
6. *Hunter J.K., Scheurle J.* Existence of perturberbed solitary wave solutions to a model equation for water waves // Physica D. 1988. V. 32. P. 253–268.

7. *Porubov A.V.* Exact travelling wave solutions of nonlinear evolution equation of surface waves in a convecting fluid // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. V. 26. P. 797–800.
8. *Порубов А.В.* Локализация нелинейных волн деформации. М.: Физматлит, 2009. С. 26–31.
9. *Cahn J.W., Hilliard J.E.* Free energy of a nonuniform system 1. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. V. 28. P. 258–267.
10. *Bradley R.M., Harper J.M.E.* Theory of ripple topography by ion bombardment // J. Vac. Technol. A. 1988. V. 6. 4. P. 2390–2995.
11. *Emel'yanov V.I.* Kuramoto–Sivashinsky equation of modulation of surface relief of molten layer and formation of surface microstructures under pulsed irradition of solid // Laser Physics. 2011. V. 21. № 1. P. 222–228.
12. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 5. С. 930–945.
13. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского // Вестник МИФИ. 2014. Т. 3. № 4. С. 408–415.
14. *Kulikov A.N., Kulikov D.A.* Inhomogeneous solutions for a modified Kuramoto–Sivashinsky equation // J. of Math. Sci. 2016. V. 219. № 2. P. 173–183.
15. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1950. С. 39–83.
16. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 297–350.
17. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. С. 76–103.
18. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 11–57.
19. *Куликов А.Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль. 1976. С. 114–129.
20. *Куликов А.Н.* Инерциальные многообразия нелинейных автономных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Препринт 85 института. М.: ИПМ АН СССР, 1991. 22 с.
21. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифференц. ур-ния. 2003. Т. 39. № 5. С. 584–601.
22. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях // Дифференц. ур-ния. 2003. Т. 39. № 6. С. 738–753.
23. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004. С. 14–112.
24. *Куликов А.Н.* О бифуркациях рождения инвариантных торов // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль. 1983. С. 112–117.
25. *Kulikov A.N.* Resonance of proper frequencies 1 : 2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate in ultrasonic gas // Тр. международного конгресса ENOC-2008. Saint-Petersburg. 2008. P. 1638–1643.
26. *Куликов А.Н.* Бифуркация малых периодических решений в случае, близком к резонансу 1 : 2 для одного класса нелинейных эволюционных уравнений // Динамические системы. 2012. Т. 2(30). № 3–4. С. 241–258.
27. *Куликов А.Н.* Аттракторы двух краевых задач для модифицированного телеграфного уравнения // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4. № 1. С. 57–68.
28. *Armbruster D., Guckenheimer J., Holmes P.* Kuramoto–Sivashinsky dynamics on the center – unstable manifolds // Siam. J. Appl. Math. V. 49. № 3. P. 676–691.
29. *Kevrekidis I.G., Nicolaenko B., Scovel J.C.* Back in the saddle again: A computer assisted study of the Kuramoto–Sivashinsky equation // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50. P. 760–790.
30. *Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Some global dynamics properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors // Physica D. 1985. V. 16. P. 155–183.
31. *Changpin Li, Zhonghua Y.* Bifurcation of two-dimensional Kuramoto–Sivashinsky equation // Appl. Math. JCU. 1998. V. 13. P. 263–270.