

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕ-ВОЛНЫ НА СЛОЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ¹⁾

© 2019 г. В. Ю. Курсеева¹, Ю. Г. Смирнов¹, Е. Ю. Смолькин^{1,*}

(¹ 440026 Пенза, ул. Красная, 40, ПГУ, Россия)

*e-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

Поступила в редакцию 23.08.2018 г.

Переработанный вариант 14.11.2018 г.

Принята к публикации 14.11.2018 г.

Рассмотрена задача дифракции электромагнитной поляризованной волны на слое, заполненном нелинейной средой. Слой расположен между двумя полупространствами, диэлектрические проницаемости которых постоянны. Рассмотрены два широко используемых типа нелинейностей: нелинейность с насыщением и нелинейность Керра. В статье доказано, что результаты о разрешимости задач в указанных случаях и качественно различаются: в случае нелинейности с насыщением существуют условия, при которых задача дифракции имеет единственное решение, а в случае нелинейности Керра задача дифракции всегда имеет бесконечное множество решений. Разработаны аналитические и численные методы решения. Приводятся численные результаты. Библ. 16. Фиг. 5.

Ключевые слова: электромагнитные поляризованные волны, нелинейность Керра, нелинейность с насыщением, уравнения Максвелла.

DOI: 10.1134/S0044466919040094

1. ВВЕДЕНИЕ

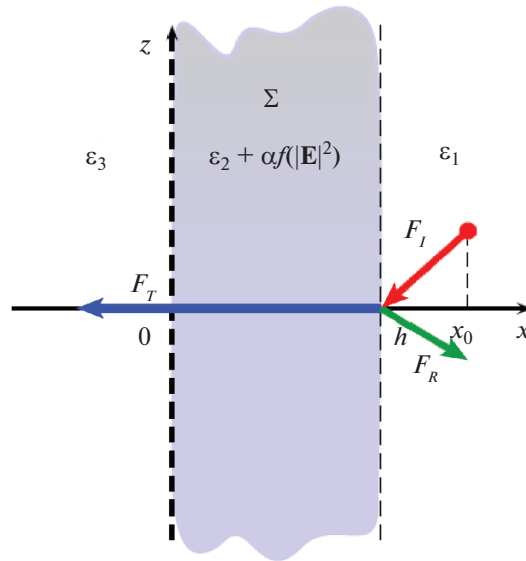
Задачи дифракции в нелинейных средах изучаются в течение нескольких десятилетий [1]–[5]. В последнее время был разработан математический аппарат для исследования таких задач [6]–[11]. В данной статье будут рассмотрены некоторые новые свойства задач дифракции на нелинейном слое: задача дифракции ТЕ-волны на открытом слое, заполненном нелинейной диэлектрической средой. Выбрано два типа нелинейности [12]: нелинейность с насыщением и нелинейность Керра. Керровская нелинейность более распространена, однако, такая нелинейность зависит от интенсивности поля и неограниченно возрастает при возрастании интенсивности. Нелинейность с насыщением этим свойством не обладает. Она используется для описания механизмов воздействия сильного электромагнитного поля на диэлектрическую проницаемость среды. Нелинейность с насыщением также зависит от интенсивности поля, но ограничена при возрастании интенсивности.

Сначала рассмотрена нелинейность с насыщением. Для этого случая получены аналитические результаты о разрешимости задачи дифракции. А именно, условия, при которых задача имеет единственное решение. Доказательство единственности решения основано на применении метода возмущений [6]–[8]. Отметим, что численные расчеты показывают, что при некоторых условиях имеет место неединственность решения задачи дифракции. Что, вообще говоря, не согласуется с физическими свойствами исследуемой задачи.

Далее в работе рассмотрена задача дифракции ТЕ-волны на открытом слое, заполненном диэлектрической средой с керровской нелинейностью. В этом случае задача дифракции всегда имеет неединственное решение. Дано математическое обоснование данного факта. Для доказательства использован метод интегральных дисперсионных уравнений [9]–[11]. Неединственность решения показывает, что, с физической точки зрения, предпочтительно рассматривать нелинейность с насыщением, так как результат в случае нелинейности с насыщением соответствует физическим свойствам явления.

Также приведены численные результаты, иллюстрирующие теоретические выводы.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание 1.894.2017/4.6).



Фиг. 1. Геометрия задачи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Sigma = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ ($h > 0$) – слой в \mathbb{R}^3 . Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$, где

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x > h, \\ \varepsilon_2 + \tilde{\alpha}f(|\mathbf{E}|^2), & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_3, & x < 0, \end{cases}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tilde{\alpha} > 0$ – вещественные постоянные, $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$, $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} \geq \varepsilon_0$.

В пространстве в точке $x = x_0 > h$ расположен источник $\tilde{\mathbf{j}}^{\text{ст}} = \mathbf{j}^{\text{ст}} e^{-i\omega t}$, где ω – круговая частота, $\mathbf{j}^{\text{ст}} = \mathbf{e}_y iAe^{i\gamma z} \delta(x - x_0)$, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, A – известная вещественная амплитуда источника, x_0 – известная вещественная постоянная, характеризующая положение источника (см. фиг. 1).

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$ на слое Σ . Поле (\mathbf{E}, \mathbf{H}) должно удовлетворять уравнениям Максвелла в полупространстве $x > h$ вида

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega\mu_0\mathbf{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

в слое Σ и в полупространстве $x < 0$ вида

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega\mu_0\mathbf{H}. \end{aligned} \tag{2}$$

Комплексные амплитуды [13] монохроматической ТЕ-волны (\mathbf{E}, \mathbf{H}) имеют вид

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^\top, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^\top. \tag{3}$$

Решение ищем в виде

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}, \tag{4}$$

где γ – известная вещественная постоянная, E_y, H_x, H_z – неизвестные функции.

Задача дифракции: требуется найти поле (\mathbf{E}, \mathbf{H}) , удовлетворяющее (3), (4), уравнениям Максвелла (1) в полупространстве $x > h$, (2) в слое Σ и в полупространстве $x < 0$, условиям непрерывности касательных компонент

$$[E_y]_{x=0} = 0, \quad [H_z]_{x=0} = 0, \quad [E_y]_{x=h} = 0, \quad [H_z]_{x=h} = 0 \quad (5)$$

и экспоненциально затухающее при $|x| \rightarrow \infty$ в полупространствах $x < 0$ и $x > h$.

Подставляя комплексные амплитуды (3) с компонентами (4) в уравнения Максвелла (1), получаем

$$\begin{aligned} i\gamma H_x - H'_z &= -i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 E_y + iA\delta(x - x_0), \\ i\gamma E_y &= -i\omega\mu_0 H_x, \\ E'_y &= i\omega\mu_0 H_z, \end{aligned} \quad (6)$$

где $(\cdot)' \equiv \partial_x$. Из системы (6), получаем

$$H_x = -\frac{\gamma}{\omega\mu_0} E_y, \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0} E'_y. \quad (7)$$

Используя (7), находим

$$E''_y + (k_0^2\varepsilon_1 - \gamma^2)E_y = A\omega\mu_0\delta(x - x_0), \quad x \geq h, \quad (8)$$

где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$.

Учитывая условия на бесконечности, получаем решение уравнения (8) в виде

$$E_y(x) = F_R e^{-\kappa_1(x-h)} - \frac{A\omega\mu_0 e^{-\kappa_1|x-x_0|}}{2\kappa_1}, \quad x \geq h,$$

где $\kappa_1^2 = \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_1 > 0$. Таким образом, касательная составляющая электрического поля и ее производная в точке $x = h$ будут иметь вид

$$E_y(h) = F_R - F_I, \quad E'_y(h) = -\kappa_1(F_R + F_I), \quad (9)$$

где F_R – амплитуда отраженного поля, $F_I = A\omega\mu_0(2\kappa_1)^{-1}e^{-\kappa_1(x_0-h)}$ – амплитуда падающего поля в точке $x = h$. Заметим, что F_I является известной величиной, поскольку все параметры, входящие в определение F_I , известны.

Подставляя комплексные амплитуды с компонентами (4) уравнения Максвелла (2), получаем

$$\begin{aligned} i\gamma H_x - H'_z &= -i\omega\varepsilon E_y, \\ i\gamma E_y &= -i\omega\mu_0 H_x, \\ E'_y &= i\omega\mu_0 H_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Из системы (10) получаем выражения для H_x и H_z вида (7).

Используя (7), находим

$$E''_y - \gamma^2 E_y = -\omega^2\mu_0\varepsilon E_y. \quad (11)$$

В полупространстве $x \leq 0$ уравнение (11) будет иметь вид

$$E''_y = \kappa_3^2 E_y, \quad (12)$$

где $\kappa_3^2 = \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_3 > 0$.

Учитывая условия на бесконечности, получаем решение уравнения (12) в виде

$$E_y(x) = F_T e^{\kappa_3 x}.$$

Таким образом, касательная составляющая электрического поля и ее производная в точке $x = 0$ будут иметь вид

$$E_y(0) = F_T, \quad E'_y(0) = \kappa_3 F_T, \quad (13)$$

где F_T – амплитуда прошедшего поля.

Сформулируем задачу дифракции для вещественной функции $u := E_y$, в слое Σ уравнение (11) можно представить в виде

$$u'' + \kappa_2^2 u = -\alpha f(u^2)u, \quad (14)$$

где $\kappa_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2 - \gamma^2$, $\alpha = k_0^2 \tilde{\alpha}$.

Так как касательные компоненты E_y , H_y непрерывны на границах $x = 0$, $x = h$, функция $u(x)$ будет удовлетворять условиям сопряжения

$$[u]_{|x=0} = 0, [u']_{|x=0} = 0, [u]_{|x=h} = 0, [u']_{|x=h} = 0, \quad (15)$$

где $[v]_{|x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} v(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} v(x)$. Следовательно, для функции $u(x)$ будут справедливы следующие граничные условия:

$$u(0) = F_T, \quad u'(0) = \kappa_3 F_T, \quad (16)$$

$$u(h) = F_R - F_I, \quad u'(h) = -\kappa_1(F_R + F_I). \quad (17)$$

Задача P. Найти (вещественную) функцию $u(x) \in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty)$, которая в полупространстве $x < 0$ определяется формулой

$$u(x) = F_T e^{\kappa_3 x}, \quad (18)$$

в полупространстве $x > h$ – формулой

$$u(x) = F_R e^{-\kappa_1(x-h)} - F_I e^{-\kappa_1(|x-x_0|+(h-x_0))}, \quad (19)$$

а в слое $0 < x < h$ является решением уравнения (14) и удовлетворяет условиям сопряжения (15), F_I – известная вещественная величина, F_T и F_R – неизвестные вещественные величины.

После нахождения функции $u(x)$ можно определить амплитуды отраженного F_R и прошедшего F_T полей при заданном значении амплитуды падающего поля F_I из (18), (19).

Вопрос о единственности (или неединственности) решения задачи P будет рассмотрен в разд. 3, 4.

Утверждение 1. Функция $u(x)$ является решением задачи P тогда и только тогда, когда E_y удовлетворяет условиям исходной задачи дифракции.

Доказательство. Легко проверить, что если функция $u(x)$ – решение задачи P, то E_y , а также H_x , H_z в соответствии с (7), в полупространстве $x > h$ являются решением системы (1), а в слое Σ и в полупространстве $x < 0$ являются решением системы (2). Обратное следует из вывода уравнений (14), (18), (19).

Таким образом, задача дифракции эквивалентно сводится к задаче P.

Замечание 1. Если функция u является решением задачи P, то функция $-u$ так же является решением этой задачи. Поэтому для определенности (единственности решения) будем считать, что $F_T > 0$.

3. НЕЛИНЕЙНОСТЬ С НАСЫЩЕНИЕМ

Рассмотрим случай нелинейности с насыщением, когда $f(u^2) = \frac{u^2}{1 + \beta u^2}$. Задачу P с такой не-

линейностью будем обозначать через P_s . Докажем, что в случае нелинейности с насыщением при некотором условии задача дифракции имеет единственное решение.

Перепишем уравнение (14) в виде

$$Lu = -\frac{\alpha u^3}{1 + \beta u^2},$$

где

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2^2.$$

Построим функцию Грина для краевой задачи

$$\begin{aligned} LG &= -\delta(x-s), \\ G|_{x=0} &= G|_{x=h} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Она будет иметь вид

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{\cos(\kappa_2 x) \cos(\kappa_2(s-h))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\cos(\kappa_2(x-h)) \cos(\kappa_2 s)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (21)$$

Используя вторую формулу Грина, получаем

$$\int_0^h (GLu - uLG) dx = (u'(x)G(x, s) - u(x)G'(x, s))|_0^h.$$

Отсюда, а также из (9), (13) и (20), находим

$$u(s) = \alpha \int_0^h G(x, s) \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx - \kappa_1(F_R + F_I)G(h, s) - \kappa_3 F_T G(0, s). \quad (22)$$

Исключим F_R и F_T из представления (22) функции u .

Пусть $s = h$, тогда из последней формулы получаем

$$F_R = \frac{D_I F_I}{D_R} - \frac{\kappa_3 G(0, h) F_T}{D_R} + \alpha \int_0^h \frac{G(x, h)}{D_R} \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx, \quad (23)$$

где

$$D_R = 1 + \kappa_1 G(h, h),$$

$$D_I = 1 - \kappa_1 G(h, h).$$

Пусть $s = 0$, тогда из формулы (22) получаем

$$F_T = -\frac{\kappa_1 G(h, 0)(F_R + F_I)}{D_T} + \alpha \int_0^h \frac{G(x, 0)}{D_T} \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx, \quad (24)$$

где

$$D_T = 1 + \kappa_3 G(0, 0).$$

Используя формулы (23) и (24), получаем следующие выражения:

$$F_T = -\frac{\kappa_1(D_I + D_R)G(0, h)F_I}{D_T D_{TR} D_R} + \alpha \int_0^h \frac{D_R G(x, 0) - \kappa_1 G(0, h)G(x, h)}{D_T D_{TR} D_R} \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx, \quad (25)$$

$$F_R = \frac{(D_I D_T + \kappa_1 \kappa_3 G^2(0, h))F_I}{D_T D_{TR} D_R} + \alpha \int_0^h \frac{D_T G(x, h) - \kappa_3 G(0, h)G(x, 0)}{D_T D_{TR} D_R} \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx, \quad (26)$$

где

$$D_{TR} = 1 - \frac{\kappa_1 \kappa_3 G^2(0, h)}{D_T D_R}.$$

Подставляя (25), (26) в уравнение (22), получаем

$$u(s) = \alpha \int_0^h Q_1(x, s) \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx + q_2(s), \tag{27}$$

где

$$Q_1(x, s) = G(x, s) - \frac{\kappa_1 G(h, s)G(x, h)}{D_{TR} D_R} - \frac{\kappa_3 G(0, s)G(x, 0)}{D_T D_{TR}} + \frac{\kappa_1 \kappa_3 G(0, h)(G(h, s)G(x, 0) + G(0, s)G(x, h))}{D_T D_{TR} D_R},$$

$$q_2(s) = \frac{\kappa_1 \kappa_3 (D_I + D_R)G(0, h)G(0, s)F_I}{D_T D_{TR} D_R} - \frac{\kappa_1 G(h, s)(D_I D_T + \kappa_1 \kappa_3 G^2(0, h) + D_T D_{TR} D_R)F_I}{D_T D_{TR} D_R}$$

в (27) функция u уже не зависит явно от F_R и F_T .

Утверждение 2. Пусть заданы $\alpha > 0, \beta > 0, h > 0, F_I$. Функция $u(x)$ является решением уравнения (27) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям задачи P_s .

Доказательство. Выше было получено, что если функция $u(x)$ удовлетворяет условиям задачи P_s , то она является решением уравнения (27). Обратной проверкой нетрудно убедиться в том, что $u(s)$ (определенное по формуле (27)) удовлетворяет всем условиям задачи P_s .

Для уравнения (27) справедливо следующее

Утверждение 3. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$ и $q = \frac{3\alpha}{2\beta} M < 1$, где

$$M = \max_{0 \leq s \leq h} \int_0^h |Q_1(x, s)| dx.$$

Тогда уравнение (27) имеет единственное решение $u \in C[0, h]$.

Доказательство. Легко проверить следующую оценку:

$$\left| \frac{u_1^3}{1 + \beta u_1^2} - \frac{u_2^3}{1 + \beta u_2^2} \right| \leq \frac{3}{2\beta} |u_1 - u_2|. \tag{28}$$

Перепишем уравнение (27) в операторной форме:

$$u = \alpha Q_1 u + q_2; \quad Q_1 : C[0, h] \rightarrow C[0, h]. \tag{29}$$

В соответствии с (28) получаем

$$|\alpha Q_1 u_1 - \alpha Q_1 u_2| \leq \frac{3\alpha}{2\beta} \max_{0 \leq s \leq h} |u_1 - u_2| \int_0^h |Q_1(x, s)| dx$$

и, следовательно,

$$\|\alpha Q_1 u_1 - \alpha Q_1 u_2\| \leq \frac{3\alpha}{2\beta} M \|u_1 - u_2\|,$$

где $M = \max_{0 \leq s \leq h} \int_0^h |Q_1(x, s)| dx$ и $\|u\| = \max_{0 \leq s \leq h} |u|$. Тогда для $q = \frac{3\alpha}{2\beta} M < 1$ отображение Q_1 является сжатием. Выберем значение $r > 0$ из условия $\|q_2\| \leq (1 - q)r$. В соответствии со следствием 2 (см. [14]) сжатие Q_1 действует из шара $B_r(0)$ в тот же шар в $C[0, h]$, где $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| < r\}$. Таким образом, уравнение (29) имеет единственное решение $u \in B_r(0) \subset C[0, h]$. Так как r может быть выбрано сколь угодно большим, утверждение выполняется.

Из утверждений 1, 2, 3 получаем следующую

Теорема 1 (О единственности). Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\frac{3\alpha}{2\beta} M < 1$, где

$$M = \max_{0 \leq s \leq h} \int_0^h |Q_1(x, s)| dx.$$

Тогда задача дифракции (а также задача P_s) имеет единственное решение в случае нелинейности с насыщением.

4. КЕРРОВСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

Рассмотрим случай нелинейности Керра, когда $f(u^2) = u^2$. Задачу P с такой нелинейностью будем обозначать через P_k . Докажем, что в случае нелинейности Керра при некотором условии задача дифракции имеет бесконечное число решений.

Для анализа задачи дифракции будем использовать метод интегральных дисперсионных уравнений [11].

Первый интеграл уравнения (14) будет иметь вид

$$u'^2 = -\kappa_2^2 u^2 - \frac{1}{2} \alpha u^4 + C. \quad (30)$$

Используя граничные условия (16), (17), получаем систему

$$\begin{aligned} C &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) F_T^2 + \frac{1}{2} \alpha F_T^4, \\ C &= \kappa_1^2 (F_R + F_I)^2 + \kappa_2^2 (F_R - F_I)^2 + \frac{1}{2} \alpha (F_R - F_I)^4. \end{aligned} \quad (31)$$

Из системы (31) можно найти выражение F_T^2 через F_R и F_I :

$$F_T^2 = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + 2\alpha C}}{\alpha},$$

где

$$C = \kappa_1^2 (F_R + F_I)^2 + \kappa_2^2 (F_R - F_I)^2 + \frac{1}{2} \alpha (F_R - F_I)^4 > 0. \quad (32)$$

Учитывая замечание 1, получаем

$$F_T = \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + 2\alpha C}}{\alpha}}, \quad (33)$$

где C выражается формулой (32).

Введем новые переменные

$$\tau(x) := u^2(x), \quad \eta(x) := \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad (34)$$

Уравнение (14) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \tau' &= 2\tau\eta, \\ \eta' &= -(\eta^2 + \kappa_2^2 + \alpha\tau). \end{aligned} \quad (35)$$

Первый интеграл (30) принимает вид

$$\frac{1}{2} \alpha \tau^2 + (\eta^2 + \kappa_2^2) \tau = C. \quad (36)$$

Разрешая (36) относительно τ , учитывая, что $\tau \geq 0$, и подставляя результат во второе уравнение системы (35), получаем

$$\eta' = -\sqrt{(\eta^2 + \kappa_2^2)^2 + 2\alpha C}, \quad (37)$$

где подкоренное выражение, очевидно, положительно для всех вещественных η и γ , $\alpha C > 0$.

Используя условия сопряжения на границах $x = 0, x = h$, получаем

$$\eta(0) = \kappa_3 > 0, \quad \eta(h) = -\kappa_1 \frac{F_R + F_I}{F_R - F_I}. \tag{38}$$

Так как $\eta' < 0$, функция η монотонно убывает при $x \in [0, h]$. Однако нельзя исключить из рассмотрения случай, когда η имеет разрывы. В общем случае, функция $u(x)$ имеет нули при $x \in (0, h)$. Это означает, как видно из (34), что η имеет разрывы. Допустим, что имеется n точек разрыва $x_1, \dots, x_n \in (0, h)$. Если $n = 0$, то функция η непрерывна на отрезке $x \in [0, h]$, а функция $u(x)$ не обращается в 0 на этом же отрезке. Очевидно, что $u'(x_i) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n}$. Отсюда, принимая во внимание формулу (37), получаем, что

$$\eta(x_i - 0) = -\infty, \quad \eta(x_i + 0) = +\infty, \quad i = \overline{1, n}. \tag{39}$$

Введем обозначение

$$w := \frac{1}{\sqrt{(s^2 + \kappa_2^2)^2 + 2\alpha C}}, \tag{40}$$

где $w \equiv w(s; C)$.

Используя метод интегральных дисперсионных уравнений [11], находим

$$\int_{-\kappa_1 \frac{F_R + F_I}{F_R - F_I}}^{\kappa_3} wds + n \int_{-\infty}^{+\infty} wds = h, \tag{41}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Замечание 2. Если $\eta(h) \geq \eta(0)$, то $n = 1, 2, 3 \dots$

Таким образом, получили уравнение (41) такое, что пара F_I, F_R удовлетворяет данному уравнению, только если она удовлетворяет условиям задачи P_k .

В дальнейшем нам понадобится (см. [15])

Утверждение 4. *Задача Коши для уравнения (14) с начальными условиями (16), где $F_T > 0$ и $\kappa_3 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \epsilon_3} > 0$ – постоянные, имеет единственное решение $u \equiv u(x; \gamma)$, определенное глобально на $[0, h]$. Это решение непрерывно зависит от γ при всех $\gamma^2 > k_0^2 \epsilon_3$.*

Имеет место следующее

Утверждение 5. *Пусть $\alpha > 0, h > 0$ и F_I известны. Пара F_I, F_R удовлетворяет уравнению (41) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям задачи P_k .*

Доказательство. Выше было доказано, что если пара F_I, F_R удовлетворяет условиям задачи P_k , то она удовлетворяет уравнению (41) для некоторого γ . Теперь докажем обратное.

Пусть для заданных значений параметров пара $F_I, F_R := \tilde{F}_R$ удовлетворяет уравнению (41).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (14) с начальными условиями

$$u(0) = \tilde{F}_T, \quad u'(0) = \kappa_3 \tilde{F}_T,$$

где \tilde{F}_T определяется в соответствии с формулами (33), (32). Решение такой задачи $u(x)$, определенное при $x \in [0, h]$, существует и единственно (см. утверждение 4). На этом этапе требовать выполнения условия

$\frac{u'(h)}{u(h)} = -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$ мы не можем. Используя найденное решение u , построим по формулам (34) функции τ и η . Ясно, что $\tau(0) = \tilde{F}_T^2, \eta(0) = \kappa_3$.

Пусть $\eta(h) = p < -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$. Используя построенные τ и η , получаем соотношение

$$\int_p^{\kappa_3} wds + n \int_{-\infty}^{+\infty} wds = h,$$

аналогичное уравнению (41).

Последнее соотношение перепишем в виде

$$\int_p^{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}} w ds + \int_{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}}^{\kappa_3} w ds + n \int_{-\infty}^{+\infty} w ds = h. \tag{42}$$

В уравнении (41) и в соотношении (42) подынтегральные выражения совпадают. Вычтем из (42) уравнение (41) при $F_R = \tilde{F}_R$, получим

$$\int_p^{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}} w ds = 0. \tag{43}$$

В силу очевидной оценки (см. (40))

$$\int_p^{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}} w ds > 0$$

получаем, что (43) выполняется только если $p = -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$.

Отсюда получаем, что условие $\eta(h) = p < -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$ неверно. Аналогично можно показать, что неверно и условие $\eta(h) = p > -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$. По этой причине остается единственная возможность

$$p = -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}.$$

Следовательно, пара F_I, \tilde{F}_R удовлетворяет условиям задачи P_k .

Утверждение 6. Пусть $\alpha > 0$ и F_I известны. Если $h \leq h_{\min}$

$$h_{\min} = \begin{cases} \frac{\pi}{\tilde{\theta}}, & \gamma^2 < \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2, \\ -\frac{1}{\tilde{\theta}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C_0}}{(|\kappa_2| + \tilde{\theta})^2} + \frac{2}{\tilde{\theta}_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{|\kappa_2|}{\tilde{\theta}_1} \right), & \gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon, \quad \sqrt{2\alpha C_0} > \tilde{\kappa}_2^2, \\ -\frac{1}{\tilde{\theta}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C_0}}{(|\kappa_2| + \tilde{\theta})^2} - \frac{1}{\tilde{\theta}_2} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C_0}}{(|\kappa_2| + \tilde{\theta}_2)^2}, & \gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon, \quad \sqrt{2\alpha C_0} \leq \tilde{\kappa}_2^2, \end{cases} \tag{44}$$

где

$$\tilde{\theta} = \sqrt{|\kappa_2|^2 + \sqrt{2\alpha C_0}}, \quad \tilde{\theta}_1 = \sqrt{-|\kappa_2|^2 + \sqrt{2\alpha C_0}}, \quad \tilde{\theta}_2 = \sqrt{|\kappa_2|^2 - \sqrt{2\alpha C_0}} \quad \text{и} \quad C_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) F_I^2 + \frac{1}{2} \alpha F_I^4,$$

то для любого целого $n \geq 0$ найдется $F_R^{(n)}$ такое, что пара $F_R^{(n)}$ и F_I будет удовлетворять уравнению (41).

Доказательство. Имеем следующие оценки:

$$nT \leq \int_{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}}^{\kappa_3} w ds + n \int_{-\infty}^{+\infty} w ds \leq (n+1)T,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $T = \int_{-\infty}^{+\infty} w ds$. Теперь необходимо оценить T . Легко проверяемые неравенства

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{a+b},$$

($a > 0, b > 0$) дают

$$T^* \leq T \leq \sqrt{2}T^*,$$

где $T^* = \int_{-\infty}^{+\infty} (|s^2 + \kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C})^{-1} ds$. Интеграл T^* ниже вычисляется явно.

При $\gamma^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$ величина $s^2 + \kappa_2^2 > 0$ и, следовательно, имеем

$$T^* = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + \kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha C}} = \frac{\pi}{\sqrt{|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}}.$$

Теперь пусть $\gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$. Обозначим $\sqrt{\gamma^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_2}$ через $\tilde{\kappa}_2$, тогда получим

$$\begin{aligned} T^* &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + \kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}} = 2 \int_0^{\tilde{\kappa}_2} \frac{ds}{-s^2 - \kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha C}} + 2 \int_{\tilde{\kappa}_2}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha C}} = \\ &= 2 \int_0^{\tilde{\kappa}_2} \frac{ds}{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha C} - s^2} + 2 \int_{\tilde{\kappa}_2}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2} \equiv 2I_1 + 2I_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что в I_1 знаменатель всегда положителен. Действительно, максимальное значение $s = \tilde{\kappa}_2$. Подстановка этого значения в знаменатель дает $\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2 = \sqrt{2\alpha C} > 0$.

Вычисляя I_1 , получаем

$$I_1 = \int_0^{\tilde{\kappa}_2} \frac{ds}{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha C} - s^2} = -\frac{1}{\sqrt{|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|\kappa_2| + \sqrt{|\kappa_2^2| - \sqrt{2\alpha C}})^2}.$$

В знаменателе интеграла I_2 возможны два случая. В первом случае имеем $\sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2 \leq 0$, то есть $\sqrt{2\alpha C} \leq \tilde{\kappa}_2^2$, тогда

$$I_2 = \int_{\tilde{\kappa}_2}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\tilde{\kappa}_2 - \sqrt{2\alpha C})} = -\frac{1}{\sqrt{|\kappa_2^2| - \sqrt{2\alpha C}}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|\kappa_2| + \sqrt{|\kappa_2^2| - \sqrt{2\alpha C}})^2}.$$

Во втором случае имеем $\sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2 > 0$, откуда получаем, что $\sqrt{2\alpha C} > \tilde{\kappa}_2^2$. Тогда верно следующее:

$$I_2 = \int_{\tilde{\kappa}_2}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2} = \frac{2}{\sqrt{-|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{|\kappa_2|}{\sqrt{-|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}} \right).$$

Объединяя результаты, окончательно получаем

$$T^* = \begin{cases} \frac{\pi}{\theta}, & \gamma^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon_2, \\ -\frac{1}{\theta} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|\kappa_2| + \theta)^2} + \frac{2}{\theta_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{|\kappa_2|}{\theta_1} \right), & \gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \epsilon, \quad \sqrt{2\alpha C} > \tilde{\kappa}_2^2, \\ -\frac{1}{\theta} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|\kappa_2| + \theta)^2} - \frac{1}{\theta_2} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|\kappa_2| + \theta_2)^2}, & \gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \epsilon, \quad \sqrt{2\alpha C} \leq \tilde{\kappa}_2^2, \end{cases}$$

где

$$\theta = \sqrt{|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}, \quad \theta_1 = \sqrt{-|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}} \quad \text{и} \quad \theta_2 = \sqrt{|\kappa_2^2| - \sqrt{2\alpha C}}.$$

Величина интеграла T^* зависит от значения C , которое определено системой (31). Введем следующую замену: $2\alpha C = 2\alpha\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + 2\alpha\kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \alpha^2(F_R - F_I)^4$.

Используя следующие разложения:

$$(1+x)^q = 1 + qx + O(x^2), \quad \ln(1+x) = x + O(x^2), \quad \operatorname{arctg}(x) = x + O(x^3),$$

которые справедливы при $|x| \rightarrow 0$, где q – любое вещественное число, отличное от 0, получаем

$$T^* = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}F_R} + O(F_R^{-2}).$$

Из последней формулы ясно, что $\lim_{F_R \rightarrow \infty} T^* = 0$. Это означает, что для любого целого $n \geq 0$ и для $h \leq T^*|_{F_R=0}$ уравнение (41) будет иметь, по крайней мере, одно решение F_R^n .

Далее удобнее исключить C из уравнения (40). Это можно сделать, используя уравнение (32):

$$w = \frac{1}{\sqrt{(s^2 + \kappa_2^2)^2 + 2\alpha(\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + \kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \frac{1}{2}\alpha(F_R - F_I)^4)}},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Найдем значение T^* при $F_R = 0$. При $\gamma^2 < \omega^2\mu_0\varepsilon_2$ получаем

$$T^* = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}}.$$

Если $\gamma^2 \geq \omega^2\mu_0\varepsilon$, $\sqrt{2\alpha C} > \tilde{\kappa}_2^2$, то верно следующее:

$$T^* = \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}{\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4} - \tilde{\kappa}_2^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\kappa}_2}{\sqrt{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4} - \tilde{\kappa}_2^2}} \right).$$

Если $\gamma^2 \geq \omega^2\mu_0\varepsilon$, $\sqrt{2\alpha C} \leq \tilde{\kappa}_2^2$, то имеем

$$T^* = \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}{\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}\right)^2} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 - \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}{\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 - \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2F_I^4}}\right)^2}.$$

Сформулируем основные результаты этого раздела.

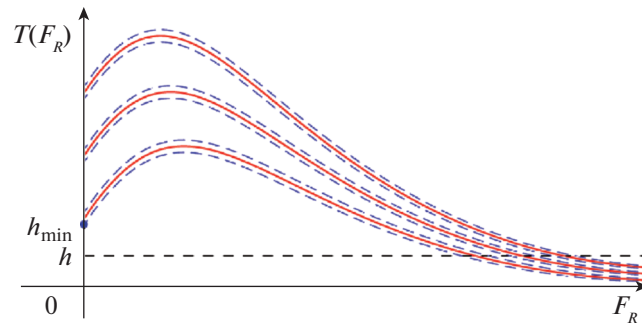
Утверждение 7. Пусть $\alpha > 0$, h и F_I известны и выполняется (44). Задача P_k имеет бесконечное число решений.

Доказательство. Для некоторого целого $n \geq 0$ найдется значение $F_R^{(n)}$ такое, что оно будет удовлетворять уравнению (41).

Каждая пара $F_R^{(n)}$ и F_I определяет значение $F_T^{(n)}$ в соответствии с формулами (33), (32). Из утверждения 4 (см. [15]) следует, что задача Коши для дифференциального уравнения (14) с начальными условиями

$$u(0) = F_T^{(n)}, \quad u'(0) = \kappa_3 F_T^{(n)},$$

имеет единственное решение.



Фиг. 2. Геометрический смысл утверждения 6. Сплошные кривые соответствуют левой части уравнения (41) при $n = 0, 1, 2$. Пунктирные кривые соответствуют полученным оценкам на левую часть уравнения (41). Горизонтальная пунктирная прямая соответствует правой части уравнения (41).

Докажем, что $F_R^{(n)} \neq F_R^{(m)}$ при $n \neq m$. Предположим противное, пусть $F_R^{(n)} = F_R^{(m)}$ при $n \neq m$. Рассмотрим следующую разность:

$$\int_{-\kappa_1 \frac{F_R^{(n)} + F_I}{F_R^{(n)} - F_I}}^{\kappa_3} w ds + n \int_{-\infty}^{+\infty} w ds - \int_{-\kappa_1 \frac{F_R^{(m)} + F_I}{F_R^{(m)} - F_I}}^{\kappa_3} w ds - m \int_{-\infty}^{+\infty} w ds = 0.$$

Из последнего получаем равенство

$$(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} w ds = 0.$$

Так как $w > 0$, то $n = m$.

Из утверждений 1, 5, 7 получаем, что справедлива

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$, h и F_I известны и выполняется (44). Тогда задача дифракции имеет бесконечное число решений в случае нелинейности Керра.

Замечание 3. Если условие $h \leq h_{\min}$ не выполняется, то найдется такое n^* , что задача дифракции (и соответственно задача P_k) будет иметь бесконечное множество решений для всех $n \geq n^*$.

5. ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

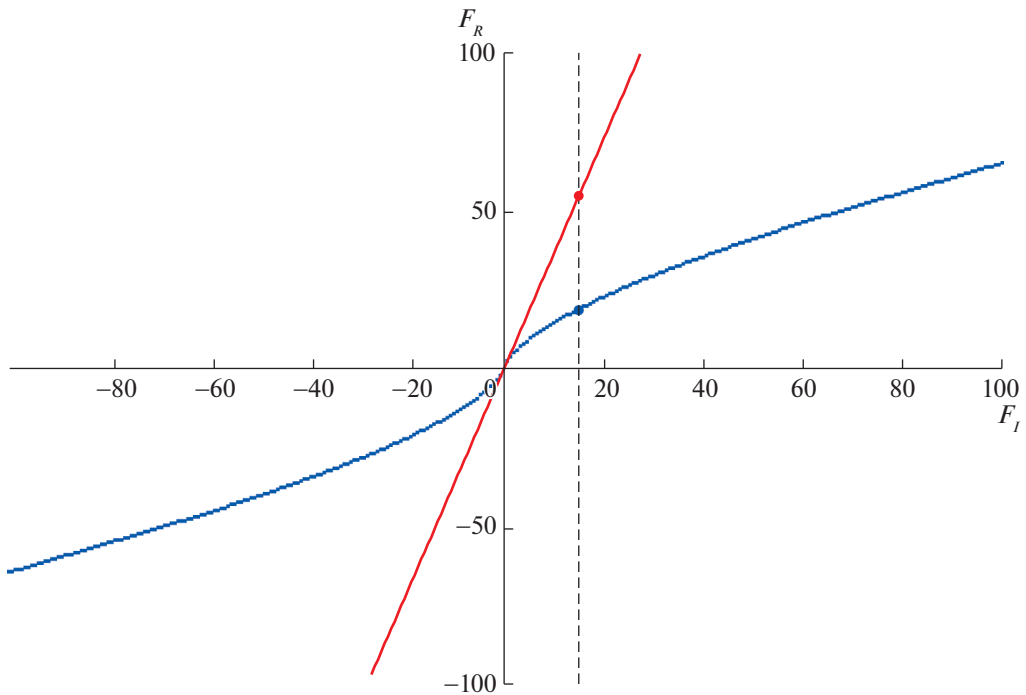
Для численного решения задачи P предложен метод, основанный на решении вспомогательной задачи Коши [16], что позволяет, в частности, определить и построить зависимость амплитуды отраженного поля F_R от амплитуды падающего поля F_I .

При построении использовались следующие параметры: $h = 3$ мм, $x_0 = 4$ мм, $\omega = 1$ ГГц, $\mu_0 = 1$, $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3$, $\epsilon_3 = 1$, $\alpha = 0.01$ В⁻².

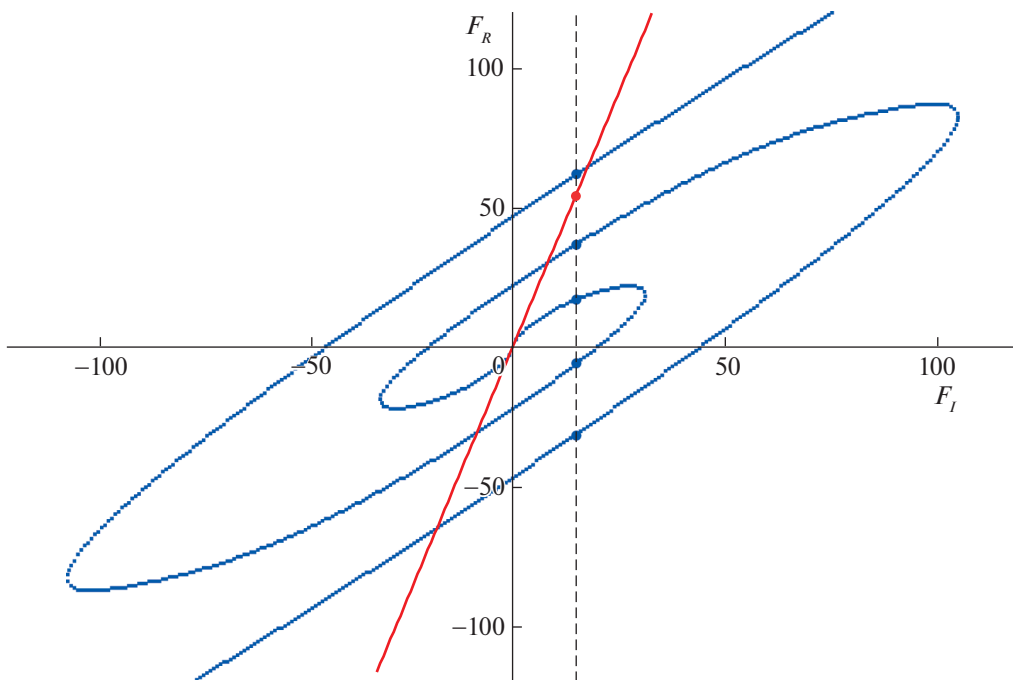
Графики построены для двух широко используемых типов нелинейностей. Кроме того, представлено сравнение нелинейного и линейного случаев для каждого типа нелинейности.

На фиг. 3–5 построена зависимость амплитуды отраженного поля F_R от амплитуды падающего поля F_I . Наклонная линия на фиг. 3–5 соответствует линейному случаю, кривые – нелинейным. Вертикальная пунктирная прямая соответствует $F_I = 15$. Точки пересечения пунктирной прямой с кривыми соответствуют амплитудам отраженного поля в нелинейных случаях, а пересечение пунктирной прямой с наклонной линией соответствует амплитуде отраженного поля в линейном случае.

На фиг. 3, 4 представлены случаи нелинейности с насыщением вида $f(u^2) = \frac{u^2}{1 + \beta u^2}$. Для фиг. 3 значение $\beta = 0.005$ В⁻² и условие теоремы 1 на коэффициенты нелинейности α и β выполняется.

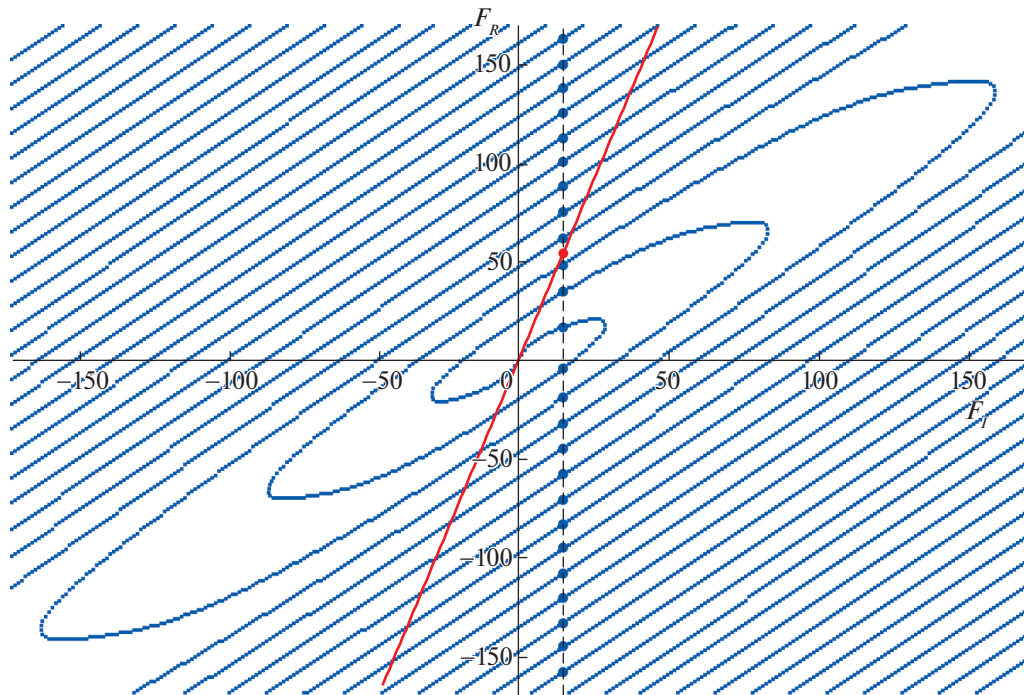


Фиг. 3. График зависимости амплитуды отраженного поля от амплитуды падающего поля для случая нелинейности с насыщением.



Фиг. 4. График зависимости амплитуды отраженного поля от амплитуды падающего поля для случая нелинейности с насыщением.

На фиг. 3 видно, что каждому фиксированному значению F_I соответствует единственное значение F_R . Для фиг. 4 значение $\beta = 0.0005 \text{ В}^{-2}$ и условие теоремы 1 на коэффициенты нелинейности α и β не выполняется. В данном случае на фиг. 4 видно, что фиксированному значению $F_I = 15$ соответствует несколько значений F_R , некоторые из них можно видеть на фиг. 4.



Фиг. 5. График зависимости амплитуды отраженного поля от амплитуды падающего поля для случая нелинейности Керра.

На фиг. 5 представлен случай нелинейности Керра вида $f(|\mathbf{u}|^2) = |\mathbf{u}|^2$. Видно, что фиксированному значению $F_I = 15$ соответствует множество значений F_R (вообще говоря, бесконечное по теореме 2), часть из них можно видеть на фиг. 5.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована задача дифракции поляризованной электромагнитной волны на нелинейном слое. Проведено качественное сравнение разрешимости задач дифракции в случаях нелинейности с насыщением и нелинейности Керра. Доказана единственность решений в задаче дифракции электромагнитной ТЕ-волны на слое, заполненной средой с нелинейностью с насыщением. А также доказано бесконечное множество решений в задаче дифракции электромагнитной ТЕ-волны на нелинейном слое в случае нелинейности Керра.

Из вышесказанного можно сделать вывод о том, что для анализа задач дифракции на нелинейном слое с сильными полями предпочтительно использовать модель нелинейности с насыщением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trutschel U., Lederer F., Langbein U.* Transmission and reflection of transverse-magnetic-polarized optical fields at stratified nonlinear media // *Phys. Rev. B.* 1989. V. 40. № 12. P. 8275.
2. *Schürmann H.W., Schmoldt R.Z.* On the theory of reflectivity and transmissivity of a lossless nonlinear dielectric slab // *Physik B.* 1993. V. 92. P. 179.
3. *Balourdos P.S., Frantzeskakis D.J., Tsilis M.C., Tigelis I.G.* Reflectivity of a nonlinear discontinuity in optical waveguides // *Pure Appl. Opt.* 1998. V. 7. № 1. P. 1.
4. *Mao H., Zang T., Sun J., Pan T., Xu G.* Nonlinear Goos–Hänchen shifts of reflected light from inhomogeneous Kerr-like slabs // *Phys. Lett. A.* 2013. V. 377. P. 1503.
5. *Khardikov V., Mladyonov P., Prosvirnin S., Tuz V.* *Electromagnetic Wave Diffraction by Periodic Planar Metamaterials with Nonlinear Constituents* // Springer Series in Optical Sciences. 2016. V. 199. P. 81.
6. *Смирнов Ю.Г., Куприянова С.Н.* Распространение электромагнитных волн в цилиндрических волноводах, заполненных нелинейной средой // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2004. Т. 44. № 10. С. 1850.

7. *Smirnov Yu.G., Schürmann H.W., Shestopalov Yu.V.* Integral equation approach for the propagation of TE-waves in a nonlinear dielectric cylindrical waveguide // *J. Nonlinear Math. Phys.* 2004. V. 11. № 2. P. 256.
8. *Schürmann H.W., Smirnov Yu., Shestopalov Y.* Propagation of TE waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71. № 1. P. 016614.
9. *Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.* Расчет постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // *Радиотехн. и электроника.* 2008. Т. 53. № 8. С. 934.
10. *Smirnov Yu.G., Valovik D.V.* Nonlinear effects of electromagnetic TM wave propagation in anisotropic layer with Kerr nonlinearity // *Advances in Math. Phys.* 2012. V. 2012. P. 1.
11. *Smirnov Yu.G., Valovik D.V.* Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity // *Phys. Rev. A.* 2015. V. 91. № 1. P. 013840.
12. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. М.: Физматлит, 2003.
13. *Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P.* Cylindrical Nonlinear Waveguides // *Soviet Physics JETP.* 1972. V. 35. P. 44.
14. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. С. 381–382.
15. *Kurseeva V.Yu., Valovik D.V.* Theory of nonlinear guided electromagnetic waves in a plane two-layered dielectric waveguide // *Math. Problems in Eng.* 2017. V. 2017. P. 1.
16. *Smolkin E., Shestopalov Y., Snegur M.* Diffraction of TM polarized electromagnetic waves by a nonlinear inhomogeneous metal-dielectric waveguide // *Proc. of the 2017 19th Internat. Conference on Electromagnetics in Advanced Appl., ICEAA 2017 8065508.* P. 1288.