

УДК 517.958

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ С РАЗРЫВНЫМ ИСТОЧНИКОМ¹⁾

© 2019 г. Н. Т. Левашова¹, Н. Н. Нефедов^{1,*}, А. О. Орлов¹

(¹ 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия)

*e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 19.09.2018 г.

Переработанный вариант 14.11.2018 г.

Принята к публикации 14.11.2018 г.

Рассматривается двумерное уравнение реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками, доказываются существование, локальная единственность и асимптотическая устойчивость его стационарного решения, обладающего большим градиентом на границе раздела сред. Настоящая работа является развитием работ авторов, связанных с существованием и устойчивостью решений с внутренними переходными слоями краевых задач с разрывными слагаемыми на многомерные задачи. Доказательство существования и устойчивости решения в работе основано на методе верхних и нижних решений. Методы исследования, предложенные в настоящей работе, можно обобщить на уравнения произвольной размерности по пространственным переменным, а также на более сложные задачи, например, на задачи для систем уравнений. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для разработки численных алгоритмов решения жестких задач с разрывными коэффициентами. Библ. 27.

Ключевые слова: задача реакция-диффузия, внутренние слои, асимптотика решения, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, принцип сравнения.

DOI: 10.1134/S0044466919040100

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается двумерное уравнение реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками, доказываются существование, локальная единственность и асимптотическая устойчивость его стационарного решения, обладающего большим градиентом на границе раздела сред. Области, в которых решения обладают большими градиентами, называются внутренними переходными слоями. Как правило, ширина переходного слоя много меньше ширины рассматриваемой области, что связано с малой диффузией или интенсивными источниками, в связи с чем при постановке задачи возникает необходимость учитывать наличие малого параметра, равного отношению ширины переходного слоя к ширине рассматриваемой области. Ранее в работе [1] было построено асимптотическое приближение решения двумерной стационарной задачи реакция-диффузия по малому параметру и доказано его существование. С этой целью использовался метод дифференциальных неравенств. В настоящей работе было продолжено исследование этого решения и доказаны его локальная единственность и асимптотическая устойчивость.

Задачи для уравнений реакция-диффузия с разрывными слагаемыми часто возникают при моделировании биофизических процессов, связанных с распространением автоволновых фронтов в средах с барьерами [2], [3], а также явлений на границах разделов сред [4], [5]. Во многих случаях из физического смысла описываемого явления вытекает требование существования стационарного решения модельной задачи, претерпевающего резкие изменения на границах барьеров (разделов сред). В связи с этим созданию адекватных моделей должно предшествовать исследование соответствующих задач на наличие устойчивых стационарных решений. Также стоит отметить трудности, возникающие при численном моделировании задач с разрывными коэффициентами и большими градиентами решений, связанные с выбором сеток и начальных прибли-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-11-00042).

жений, которые также могут быть преодолены при помощи аналитических методов исследования таких задач [6]–[9].

Доказательство существования и устойчивости решений в работе основано на методе верхних и нижних решений. Обоснование этого метода для задач с разрывными коэффициентами можно найти в работах [10]–[13]. Ранее авторами были исследованы устойчивые решения с внутренними переходными слоями одномерных задач с разрывными коэффициентами [14], в работе [15] рассмотрена двумерная периодическая параболическая задача с периодически изменяющейся во времени границей раздела сред. Алгоритм построения асимптотических приближений решений задач с внутренними переходными слоями на границах разделов, помимо указанных работ, приведен также в [16]–[18], однако, в этих работах существование решения доказывается методом сращивания [19], [20], который не позволяет получать условия устойчивости решений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} &= f(v, x, y, \varepsilon), (x, y) \in D, \quad t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} &= u^0(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \\ v(x, y, \varepsilon, 0) &= v_{\text{init}}(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь D — односвязная область на плоскости (x, y) с гладкой границей ∂D , ε — малый параметр, лежащий в интервале $(0; \varepsilon_0]$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к кривой ∂D .

Пусть C_0 — простая гладкая замкнутая кривая, целиком лежащая в области D , заданная в параметрическом виде с помощью гладких функций $x = \hat{x}(\theta)$, $y = \hat{y}(\theta)$, где $\theta \in [0, N]$. Кривая C_0 делит область на две части: $D^{(-)}$, ограниченную кривой C_0 , и $D^{(+)}$, ограниченную кривыми C_0 и ∂D .

Пусть выполнено

Условие 1. Функция $f(u, x, y, \varepsilon)$ определена на множестве $\bar{\Omega} := (u, x, y, \varepsilon) \in I_u \times \bar{D} \times (0; \varepsilon_0]$ и терпееват разрыв I рода на поверхности

$$S(u, x, y) : \{u \in I_u; (x, y) \in C_0\}:$$

$$f(u, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, x, y, \varepsilon), & u \in I_u, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, \\ f^{(+)}(u, x, y, \varepsilon), & u \in I_u, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(+)}, \end{cases}$$

где $f^{(-)}(u, x, y, \varepsilon) \in C^3(I_u \times \bar{D}^{(-)} \times (0; \varepsilon_0])$, $f^{(+)}(u, x, y, \varepsilon) \in C^3(I_u \times \bar{D}^{(+)} \times (0; \varepsilon_0])$ и $f^{(-)}(u, x, y, \varepsilon) \neq f^{(+)}(u, x, y, \varepsilon)$, $(x, y) \in C_0$, $u \in I_u$.

Определим области $D_T := (x, y, t) \in D \times (0; T]$, $D_T^{(-)} := (x, y, t) \in D^{(-)} \times (0; T]$, $D_T^{(+)} := (x, y, t) \in D^{(+)} \times (0; T]$.

Определение 1. Функция $v_\varepsilon(x, y, t) \in C^{1,0}(\bar{D}_T) \cap C^{1,1}(D_T) \cap C^{2,1}(D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)})$ называется решением задачи (1), если она удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей $D_T^{(\mp)}$, а также условию в начальный момент времени и граничному условию.

Очевидно, что стационарное решение этой задачи является решением следующей задачи для стационарного уравнения реакция-диффузия, которое исследовалось в [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta u &= f(u, x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} &= u^0(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \end{aligned} \quad (2)$$

решение которой определено аналогично решению задачи (1).

Определение 2. Функция $u_\varepsilon(x, y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D^{(-)} \cup D^{(+)})$ называется решением задачи (2), если она удовлетворяет уравнению при $(x, y) \in D^{(-)} \cup D^{(+)}$ и граничным условиям задачи (2).

Потребуем также выполнения следующих условий.

Условие 2. Пусть уравнения $f^{(\mp)}(u, x, y, 0) = 0$ имеют решения $\varphi^{(\mp)}(x, y)$ в областях $\bar{D}^{(\mp)}$. Пусть на кривой C_0 выполняется неравенство $\varphi^{(-)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)) < \varphi^{(+)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta))$, $\theta \in [0, N]$.

Условие 3. Пусть также выполнены неравенства

$$f_u^{(-)}(\varphi^{(-)}(x, y), x, y, 0) > 0, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, \quad f_u^{(+)}(\varphi^{(+)}(x, y), x, y, 0) > 0, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(+)}.$$

Отметим, что условие 3 обеспечивает локальную единственность (изолированность) корней вырожденных уравнений $f^{(\mp)}(u, x, y, 0) = 0$.

Будем исследовать вопрос о существовании у задачи (2) гладкого решения, близкого вне некоторой окрестности кривой C_0 к поверхности $u = \varphi^{(-)}(x, y)$ в области $D^{(-)}$ и к поверхности $u = \varphi^{(+)}(x, y)$ в области $D^{(+)}$, и резко изменяющегося от значений $\varphi^{(-)}$ до значений $\varphi^{(+)}$ в окрестности кривой C_0 . Рассмотрим так называемые присоединенные уравнения, которые далее используются для описания переходного слоя в нулевом приближении:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = f^{(-)}(\tilde{u}, \theta, 0), \quad \xi < 0; \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = f^{(+)}(\tilde{u}, \theta, 0), \quad \xi > 0, \quad (3)$$

где использованы обозначения $f^{(\mp)}(\tilde{u}, \theta, 0) = f^{(\mp)}(\tilde{u}, \hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta), 0)$.

Каждое из присоединенных уравнений (3) эквивалентно присоединенной системе

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \Phi; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = f^{(\mp)}(\tilde{u}, \theta, 0).$$

В силу условий 2 и 3 каждая из точек $(\varphi^{(\mp)}(\theta), 0)$ при каждом значении параметра $\theta \in [0, N]$ является точкой покоя типа седла соответствующей присоединенной системы на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$.

Потребуем также выполнения следующего условия.

Условие 4. Пусть

$$\int_{\varphi^{(-)}(\theta)}^p f^{(-)}(u, \theta, 0) du > 0, \quad \text{при} \quad \varphi^{(-)}(\theta) < p \leq \varphi^{(+)}(\theta),$$

$$\int_{\varphi^{(+)}(\theta)}^p f^{(+)}(u, \theta, 0) du > 0, \quad \text{при} \quad \varphi^{(-)}(\theta) \leq p < \varphi^{(+)}(\theta).$$

При выполнении условий 2–4 на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \Phi)$ существуют сепаратрисы $\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}, \theta)$, входящие соответственно в седла $(\varphi^{(\mp)}(\theta), 0)$ при $\xi \rightarrow \mp\infty$. Выражения для этих сепаратрис имеют следующий вид:

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{u}, \theta) = \left(2 \int_{\varphi^{(\mp)}(\theta)}^{\tilde{u}} f^{(\mp)}(u, \theta, 0) du \right)^{1/2}.$$

Введем функцию (определена в силу условия 4)

$$H(\tilde{u}, \theta) := \Phi^{(-)}(\tilde{u}, \theta) - \Phi^{(+)}(\tilde{u}, \theta) = \left(2 \int_{\varphi^{(-)}(\theta)}^{\tilde{u}} f^{(-)}(u, \theta, 0) du \right)^{1/2} - \left(2 \int_{\varphi^{(+)}(\theta)}^{\tilde{u}} f^{(+)}(u, \theta, 0) du \right)^{1/2}.$$

Потребуем выполнения еще одного условия.

Условие 5. Пусть уравнение $H(\tilde{u}, \theta) = 0$ имеет решение $p_0(\theta) \in (\varphi^{(-)}(\theta); \varphi^{(+)}(\theta))$, для которого выполняется неравенство $f^{(-)}(p_0(\theta), \theta, 0) - f^{(+)}(p_0(\theta), \theta, 0) > 0$, $\theta \in [0, N]$.

Несложно получить, что из неравенства $f^{(-)}(p_0(\theta), \theta, 0) - f^{(+)}(p_0(\theta), \theta, 0) > 0$ условия 5 следует неравенство

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{u}}(p_0(\theta), \theta) > 0. \quad (4)$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Следуя алгоритму, приведенному в [1], можно построить асимптотическое приближение решения задачи (2) произвольного порядка. Для этого следует рассмотреть отдельно задачи в каждой из областей $D^{(-)}$ и $D^{(+)}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta U^{(-)} &= f^{(-)}(U, x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in D^{(-)}, \\ U^{(-)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)) &= p(\theta, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta U^{(+)} &= f^{(+)}(U, x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in D, \\ U^{(+)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)) &= p(\theta, \varepsilon), \quad \left. \frac{\partial U^{(+)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial D} = u^0(x, y), \quad (x, y) \in \partial D. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $p(\theta, \varepsilon)$ — неизвестная функция, играющая роль параметра. Эта функция определяется из условий сшивания на этой кривой производных по нормали $\mathbf{n}_0$ к кривой C_0 асимптотик решений $U_n^{(-)}$ и $U_n^{(+)}$ задач (5) и (6):

$$\left. \frac{\partial U_n^{(-)}}{\partial \mathbf{n}_0} \right|_{C_0} = \left. \frac{\partial U_n^{(+)}}{\partial \mathbf{n}_0} \right|_{C_0}. \quad (7)$$

В нашем случае для доказательства устойчивости решения достаточно построить асимптотические представления решений $U_2^{(\mp)}(x, y, \varepsilon)$ второго порядка соответственно задач (5) и (6). Эти функции являются суммой регулярной и погранслойной частей:

$$\begin{aligned} U_2^{(-)}(x, y, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(-)}(x, y) + Q_i^{(-)}(\xi, \theta)), \\ U_2^{(+)}(x, y, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(+)}(x, y) + Q_i^{(+)}(\xi, \theta) + R_i(\eta, l)), \end{aligned}$$

где $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y)$, $i = 0, 1, 2$ — регулярная часть разложения, функции $Q_i^{(\mp)}(\xi, \theta)$ описывают поведение решения в окрестности кривой C_0 . Для построения этих функций в окрестности кривой C_0 стандартным способом (см., например, [21]) перейдем к локальным координатам (r, θ) согласно равенствам

$$x = \hat{x}(\theta) - r \sin \alpha, \quad y = \hat{y}(\theta) + r \cos \alpha. \quad (8)$$

Здесь $\alpha(\theta)$ — угол между внутренней нормалью к кривой C_0 и осью y ,

$$\sin \alpha = \frac{\hat{y}_\theta}{\sqrt{(\hat{y}_\theta)^2 + (\hat{x}_\theta)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\hat{x}_\theta}{\sqrt{(\hat{y}_\theta)^2 + (\hat{x}_\theta)^2}};$$

величина $|r|$ — расстояние от точки $M(x, y)$ из окрестности кривой C_0 до этой кривой вдоль нормали к ней. Будем считать, что $r < 0$, если $M \in D^{(-)}$; $r > 0$, если $M \in D^{(+)}$; $r = 0$, если $M \in C_0$. Введем также растянутую переменную $\xi = r/\varepsilon$.

Пограничные функции $R_i(\eta, l)$ описывают поведение решения вблизи границы ∂D , в окрестности которой также вводится криволинейная система координат (r_l, l) [21], где r_l — расстояние

от кривой ∂D до точки в окрестности этой кривой вдоль внутренней нормали к ней, $\eta = \frac{l}{\varepsilon}$ — растянутая переменная, l — параметр кривой.

Неизвестная функция $p(\theta, \varepsilon)$ ищется в виде разложения по степеням малого параметра: $p(\theta, \varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$, коэффициенты которого определяются из условия сшивания производных асимптотик (7) в соответствующих порядках.

Уравнения для функции регулярной части получаются стандартным образом [21] путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в разложении Тейлора по параметру ε равенств

$$f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)} + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)} + \dots, x, y, \varepsilon) - \varepsilon^2 \Delta(\bar{u}_0^{(\mp)} + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)} + \dots) = 0.$$

В нулевом порядке, согласно условию 2, получим $\bar{u}_0^{(\mp)}(x, y) = \varphi^{(\mp)}(x, y)$. Остальные функции регулярной части определяются из линейных алгебраических уравнений.

В переменных (ξ, θ) оператор $\varepsilon^2 \Delta$ принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \varepsilon \frac{\alpha_\theta}{\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \varepsilon \xi \alpha_\theta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{1}{\left(\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \varepsilon \xi \alpha_\theta\right)^2} \times \\ & \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \varepsilon \xi \alpha_\theta} \left(\frac{\hat{x}_\theta \hat{x}_{\theta\theta} + \hat{y}_\theta \hat{y}_{\theta\theta}}{\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2}} - \varepsilon \xi \alpha_{\theta\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \sum_{i=1} \varepsilon^i L_i, \end{aligned}$$

где L_i — операторы дифференцирования первого или второго порядков по переменной θ или первого порядка по переменной ξ .

Уравнения для функции переходного слоя получаются путем объединения коэффициентов при одинаковых степенях ε в разложении Тейлора равенств

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)} + \dots) + \sum_{i=1} \varepsilon^i L_i (Q_0^{(\mp)} + \varepsilon Q_1^{(\mp)} + \dots) = f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x(\xi, \theta), y(\xi, \theta)) + Q_0^{(\mp)} + \\ & + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x(\xi, \theta), y(\xi, \theta)) + \varepsilon Q_1^{(\mp)} + \dots, x(\xi, \theta), y(\xi, \theta), \varepsilon) - \\ & - f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x(\xi, \theta), y(\xi, \theta)) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x(\xi, \theta), y(\xi, \theta)) + \dots, x(\xi, \theta), y(\xi, \theta), \varepsilon), \end{aligned} \quad (9)$$

где $x(\xi, \theta)$, $y(\xi, \theta)$ даются равенствами (8) при $r = \varepsilon \xi$. Условия при $\xi = 0$ для этих задач получаются из равенств

$$\bar{u}_0^{(\mp)}(x(\xi, \theta), y(\xi, \theta)) + Q_0^{(\mp)}(0, \theta) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x(\xi, \theta), y(\xi, \theta)) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}(0, \theta) + \dots = p_0(\theta) + \varepsilon p_1(\theta) + \dots$$

Кроме того, для этих функций должно выполняться условие убывания на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}(\mp\infty, \theta) = 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

С помощью замен $\tilde{u}(\xi, \theta) = \bar{u}_0^{(\mp)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)) + Q_0^{(\mp)}(\xi, \theta)$ при $\xi \leq 0$ для функций с верхним индексом “—” или $\xi \geq 0$ для функций с верхним индексом “+”, уравнения для функций переходного слоя нулевого порядка сводятся к присоединенным уравнениям (3), разрешимым в силу условий 2–4. Функции переходного слоя более высоких порядков определяются из краевых задач для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Имеют место оценки:

$$|Q_i^{(\mp)}(\xi, \theta)| < C \exp(-\kappa|\xi|), \quad i = 0, 1, \dots,$$

где C , κ — положительные константы, не зависящие от ε .

Пограничные функции $R_i(\eta, l)$, $i = 0, 1, \dots$, описывающие решение вблизи границы ∂D определяются стандартным образом [21]. В частности, уравнения для этих функций получаются тем же способом, что и для функций переходного слоя из равенств, аналогичных (9), записанных через локальные координаты (η, l) . Эти функции служат для устранения невязок, вносимых регуляр-

ной частью в краевое условие задачи (2). В случае граничных условий Неймана задачи (2) получаем $R_0(\eta, l) \equiv 0$.

Из условия сшивания производных (7) следует равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, \theta) + \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial r}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)) + \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, \theta) + \dots = \\ = \varepsilon^{-1} \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, \theta) + \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial r}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)) + \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, \theta) + \dots \end{aligned}$$

Производные $\partial \varphi^{(\mp)} / \partial r$ в этом равенстве следует понимать как частные производные по переменной r функций $\varphi^{(\mp)}(x(r, \theta), y(r, \theta))$ где $x(r, \theta), y(r, \theta)$ — преобразования (8).

В порядке ε^{-1} из условия сшивания следует уравнение для определения функции $p_0(\theta) : H(p_0, \theta) = 0$, разрешимое в силу условия 5. Функции $p_i(\theta), i = 1, 2$, определяются как решения уравнений вида $(\partial H / \partial \tilde{u})(p_0, \theta) \cdot p_i = G_i(\theta)$, где $G_i(\theta)$ — известные функции. Существование величин p_i обеспечивается неравенством (4).

Асимптотическим приближением первого порядка решения задачи (2) будем называть функцию

$$U_1(x, y, \varepsilon) = \begin{cases} U_1^{(-)}(x, y, \varepsilon) := \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(-)}(x, y) + Q_i^{(-)}(\xi, \theta)), & (x, y) \in \bar{D}^{(-)}; \\ U_1^{(+)}(x, y, \varepsilon) := \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(+)}(x, y) + Q_i^{(+)}(\xi, \theta) + R_i(\eta, l)), & (x, y) \in \bar{D}^{(+)}. \end{cases}$$

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Доказательство существования решения задачи (2) было проведено в [1] при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств [22], [23]. Суть метода состоит в построении пары непрерывных функций $\beta(x, y, \varepsilon), \alpha(x, y, \varepsilon)$, называемых соответственно верхним и нижним решениями задачи (2), для которых справедливы неравенства

- 1) $\alpha(x, y, \varepsilon) \leq \beta(x, y, \varepsilon), (x, y) \in \bar{D}$;
- 2) $\varepsilon^2 \Delta \beta - f(\beta, x, y, \varepsilon) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \Delta \alpha - f(\alpha, x, y, \varepsilon), (x, y) \in (D \setminus C_0)$,
- 3) $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{n}}(x, y, \varepsilon) \geq u^0(x, y) \geq \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{n}}(x, y, \varepsilon), (x, y) \in \partial D$.

Согласно теоремам сравнения, доказанным в работах [10], [11], из существования верхнего и нижнего решений следует существование решения задачи (2), заключенного между этими верхним и нижним решениями:

$$\alpha(x, y, \varepsilon) \leq u_\varepsilon(x, y) \leq \beta(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}. \quad (10)$$

Отметим, что доказательство теорем сравнения в [10], [11] проведено в предположении гладкости верхнего и нижнего решений. В нашем случае этот результат можно обобщить, аналогично тому, как это сделано в [14], используя верхние и нижние решения, не гладкие вдоль кривой C_0 , если потребовать выполнения следующего условия на скачок нормальных производных на этой кривой:

- 4) $\frac{\partial \beta}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), \varepsilon) \geq \frac{\partial \beta}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), \varepsilon),$
 $\frac{\partial \alpha}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), \varepsilon) \leq \frac{\partial \alpha}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), \varepsilon),$

где $x(r, \theta), y(r, \theta)$ даются выражениями (8).

Доказательство аналогичной теоремы для одномерного случая с использованием верхнего и нижнего решений, не гладких в единственной точке, приведено в [14]. Обобщение на двумерный

случай можно сделать по аналогии с [14], воспользовавшись первой формулой Грина вместо интегрирования по частям.

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств верхнее и нижнее решения задачи (2) строятся отдельно в каждой из областей $\bar{D}^{(-)}$ и $\bar{D}^{(+)}$ как модификации асимптотических представлений. Мы будем использовать асимптотическое представление $U_1^{(\mp)}(x, y, \varepsilon)$ первого порядка и обозначать соответствующие верхние и нижние решения нижним индексом 1:

$$\begin{aligned} \beta_1(x, y, \varepsilon) &= \begin{cases} \beta_1^{(-)}(x, y, \varepsilon) = U_1^{(-)}(x, y, \varepsilon) + \varepsilon(\mu + q^{(-)}(\xi, \theta)), & (x, y) \in \bar{D}^{(-)}; \\ \beta_1^{(+)}(x, y, \varepsilon) = U_1^{(+)}(x, y, \varepsilon) + \varepsilon(\mu + q^{(+)}(\xi, \theta) + \varepsilon R e^{-\gamma \eta}), & (x, y) \in \bar{D}^{(+)}; \end{cases} \\ \alpha_1(x, y, \varepsilon) &= \begin{cases} \alpha_1^{(-)}(x, y, \varepsilon) = U_1^{(-)}(x, y, \varepsilon) - \varepsilon(\mu + q^{(-)}(\xi, \theta)), & (x, y) \in \bar{D}^{(-)}; \\ \alpha_1^{(+)}(x, y, \varepsilon) = U_1^{(+)}(x, y, \varepsilon) - \varepsilon(\mu + q^{(+)}(\xi, \theta) + \varepsilon R e^{-\gamma \eta}), & (x, y) \in \bar{D}^{(+)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь μ , R и γ – положительные константы, которые подбираются таким образом, чтобы выполнялись неравенства 1)–3) (слагаемое $\varepsilon R e^{-\gamma \eta}$ вводится для выполнения неравенства 3), см., например, [23]), функции $q^{(\mp)}(\xi, \theta)$ вводятся для устранения невязок порядка $O(\varepsilon)$, возникающих в неравенстве 2) в окрестности кривой C_0 в результате добавления к асимптотическому разложению величины μ .

Функции $q^{(-)}(\xi, \theta)$ и $q^{(+)}(\xi, \theta)$, определенные соответственно при $\xi \leq 0$ и $\xi \geq 0$, определяются как решения краевых задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi, \theta) q^{(\mp)} - (\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi, \theta) - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\theta)) \cdot \mu + d \cdot e^{-\gamma |\xi|} &= 0, \\ q^{(\mp)}(0, \theta) + \mu &= \delta; \quad q^{(\mp)}(\mp\infty, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi, \theta) &:= \tilde{f}_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)) + Q_0^{(\mp)}(\xi, \theta), \hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta), 0), \\ \tilde{f}_u^{(\mp)}(\theta) &:= \tilde{f}_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta)), \hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta), 0). \end{aligned}$$

Величина δ в краевых условиях (14) положительная и подбирается таким образом, чтобы выполнялись неравенства 4). Возможность выбора положительного значения δ определяется неравенством (4).

В работе [1] доказано, что при достаточно малых ε функции (11) являются верхним и нижним решениями задачи (2), тем самым справедлива следующая теорема существования.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–5. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует функция $u_\varepsilon(x, y)$ – решение задачи (2), для которого функция $U_1(x, y, \varepsilon)$ является равномерным асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^2)$, то есть для всех $(x, y) \in \bar{D}$ выполняется неравенство

$$|u_\varepsilon(x, y) - U_1(x, y, \varepsilon)| \leq C \varepsilon^2,$$

где C – положительная константа, не зависящая от ε .

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Докажем существование и единственность решения задачи (1) для любой начальной функции, лежащей в интервале

$$\alpha_1(x, y, \varepsilon) \leq v_{\text{init}}(x, y, \varepsilon) \leq \beta_1(x, y, \varepsilon). \quad (13)$$

Для этого также используем метод дифференциальных неравенств, требующий построения верхнего и нижнего решений задачи (1).

Определение 3. Непрерывные функции $\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon)$ называются соответственно верхним и нижним решениями задачи (1), если для них выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & \hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in \bar{D}_T; \\ 2^0 \quad & \varepsilon^2 \Delta \hat{\beta} - \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial t} - f(\hat{\beta}, x, y, t, \varepsilon) \leq 0 \leq \varepsilon^2 \Delta \hat{\alpha} - \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} - f(\hat{\alpha}, x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in D_T^{(\mp)}; \\ 3^0 \quad & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \mathbf{n}}(x, y, t, \varepsilon) \leq u^0(x, y) \leq \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \mathbf{n}}(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y, t) \in \partial D \times [0, T]; \\ 4^0 \quad & \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) \geq \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon), \quad \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) \leq \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial r}(x(+0, \theta), \\ & y(+0, \theta), t, \varepsilon), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Используя метод доказательства, приведенный в [24], можно получить следующий результат: для любой начальной функции, для которой справедливы неравенства

$$\hat{\alpha}(x, y, 0, \varepsilon) \leq v_{\text{init}}(x, y, \varepsilon) \leq \hat{\beta}(x, y, 0, \varepsilon), \quad (14)$$

решение $v_\varepsilon(x, y, t)$ задачи (1), существует, единственно и в каждый момент времени заключено между верхним и нижним решениями:

$$\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) \leq v_\varepsilon(x, y, t) \leq \hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon). \quad (15)$$

Стоит отметить, что доказательство аналогичного утверждения в [24] проводится на основании принципа максимума для функций из класса $C^{1,1}(D_T)$. Для верхнего и нижнего решений, удовлетворяющих неравенствам 4^0 , доказательство можно провести, используя следующую лемму.

Лемма. Пусть для функции $z(x, y, t, \varepsilon) \in C(\bar{D}_T) \cap C^{2,1}(D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)})$ при некотором $\bar{c} > 0$ выполняются условия:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta z - \frac{\partial z}{\partial t} - \bar{c}z &\leq 0, \quad (x, y, t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}, \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) &\geq \frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}(x, y, t, \varepsilon) \geq 0, \quad (x, y, t) \in \partial D \times [0, T]. \quad (17)$$

Тогда $z(x, y, t, \varepsilon) \geq 0, (x, y, t) \in \bar{D}_T$.

Доказательство. Предположим, что функция $z(x, y, t, \varepsilon)$ достигает отрицательного минимума в точке $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \in D_T$. В силу неравенства (17) это не может быть точка границы ∂D . Если точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ — внутренняя точка D_T , не лежащая на кривой C_0 , утверждение леммы следует из классического принципа максимума для параболических уравнений [25], [26].

Если минимум функции $z(x, y, t, \varepsilon)$ достигается в точке $(\hat{x}(\tilde{\theta}), \hat{y}(\tilde{\theta})) \in C_0$, то в этой точке выполняются неравенства $\frac{\partial z}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) \leq 0, \frac{\partial z}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon) \geq 0$. Если хотя бы одно из этих неравенств строгое, то они противоречат неравенствам (16).

Если $\frac{\partial z}{\partial r}(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) = \frac{\partial z}{\partial r}(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon) = 0$, то из этого равенства следует $\nabla z(x(-0, \theta), y(-0, \theta), t, \varepsilon) = \nabla z(x(+0, \theta), y(+0, \theta), t, \varepsilon) = 0$, тогда к противоречию можно прийти, используя схему доказательства принципа максимума, приведенную в [27] для функций из класса C^1 .

Итак, функция $z(x, y, t, \varepsilon)$ не может достигать отрицательного минимума в $\bar{D}_T$, откуда следует утверждение леммы.

Единственность решения задачи (1) может быть доказана по аналогии с [25].

Не сложно проверить (аналогичные вычисления можно найти в [15]), что условия 1^0-4^0 выполняются, если выбрать функции $\hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon)$ и $\hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(x, y, t, \varepsilon) &= \begin{cases} \hat{\beta}^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x, y) + (\beta_1^{(-)}(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y))e^{-\varepsilon\lambda t}, & (x, y, t) \in D_T^{(-)}, \\ \hat{\beta}^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x, y) + (\beta_1^{(+)}(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y))e^{-\varepsilon\lambda t}, & (x, y, t) \in D_T^{(+)}, \end{cases} \\ \hat{\alpha}(x, y, t, \varepsilon) &= \begin{cases} \hat{\alpha}^{(-)}(x, y, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x, y) + (\alpha_1^{(-)}(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y))e^{-\varepsilon\lambda t}, & (x, y, t) \in D_T^{(-)}, \\ \hat{\alpha}^{(+)}(x, y, t, \varepsilon) = u_\varepsilon(x, y) + (\alpha_1^{(+)}(x, y, \varepsilon) - u_\varepsilon(x, y))e^{-\varepsilon\lambda t}, & (x, y, t) \in D_T^{(+)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

где $\beta_1^{(\mp)}(x, y, \varepsilon)$, $\alpha_1^{(\mp)}(x, y, \varepsilon)$ — функции из (11), λ — положительная постоянная.

Таким образом, существование и единственность решения задачи (1) для любой начальной функции, удовлетворяющей неравенствам (13) и, следовательно, (14) следует из того, что существуют верхнее и нижнее решения (18).

Из вида (18) верхнего и нижнего решений параболической задачи, а также из неравенств (15) и (10) следует предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v_\varepsilon(x, y, t) - u_\varepsilon(x, y)| = 0.$$

Из этого равенства и единственности решения $v_\varepsilon(x, y, t)$ следует локальная единственность стационарного решения $u_\varepsilon(x, y)$ — решения задачи (2) из промежутка (10) и его асимптотическая устойчивость.

Тем самым доказана следующая

Теорема 2. При выполнении условий 1–5 при достаточно малых ε стационарное решение $u_\varepsilon(x, y)$ задачи (1) локально единственно как решение задачи (2) и асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_1(x, y, \varepsilon); \beta_1(x, y, \varepsilon)]$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа является развитием на новый класс задач цикла работ [1], [14]–[18], связанных с существованием и устойчивостью решений с внутренними переходными слоями краевых задач с разрывными слагаемыми. Методы исследования, предложенные в настоящей работе, можно обобщить на более сложные классы задач, в том числе прикладные задачи, связанные с моделями биофизики или перколяции. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для разработки численных алгоритмов решения жестких задач с разрывными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левашова Н.Т., Неведов Н.Н., Орлов А.О. Стационарное уравнение реакции–диффузии с разрывным реактивным членом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 5. С. 854–866.
2. Сидорова А.Э., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. и др. Автоволновая самоорганизация в неоднородных природно-антропогенных экосистемах // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2016. № 6. С. 39–45.
3. Левашова Н.Т., Мельникова А.А., Лукьяненко Д.В. и др. Моделирование урбоэкосистем как процессов самоорганизации // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 11. С. 40–52.
4. Левашова Н.Т., Николаева О.А., Пашкин А.Д. Моделирование распределения температуры на границе раздела вода–воздух с использованием теории контрастных структур // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2015. № 5. С. 12–16.
5. Orlov A., Levashova N., Burbaev T. The use of asymptotic methods for modelling of the carriers wave functions in the si/sige heterostructures with quantum-confined layers // J. Physics: Conference Series. 2015. V. 586. P. 012003.
6. Lukyanenko D., Nefedov N., Nikulin E., Volkov V. Use of asymptotics for new dynamic adapted mesh construction for periodic solutions with an interior layer of reaction-diffusion-advection equations // Lecture Notes in Computer Science. 2017. 10187. P. 107–118.

7. *Melnikova A., Levashova N., Lukyanenko D.* Front dynamics in an activator-inhibitor system of equations // *Lecture Notes in Computer Science*. 2017. 10187. P. 492–499.
8. *Volkov V., Lukyanenko D., Nefedov N.* Asymptotic-numerical method for the location and dynamics of internal layers in singular perturbed parabolic problems // *Lecture Notes in Computer Science*. 2017. 10187. P. 721–729.
9. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Solving of the coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed reaction-diffusion-advection equation with the final time data // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. V. 4. P. 233–247.
10. *Похожаев С.И.* Об уравнениях вида $\Delta u = (x, u, Du)$ // *Матем. сб.* 1980. Т. 113. № 2. С. 324–338.
11. *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // *Изв. вузов. Матем.* 1998. № 11. С. 69–76.
12. *De Coster C., Obersnel F., Omari P.A.* A qualitative analysis via lower and upper solutions of first order periodic evolutionary equations with lack of uniqueness // *Handbook of differential equations: ordinary differential equations*. 2006. V. 3. P. 203–339.
13. *Carl S., Le V.K., Motreanu D.* Nonsmooth Variational Problems and their Inequalities. Comparison Principles and Applications. New York, USA: Springer, 2007.
14. *Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., Orlov A.O., Panin A.A.* The solution with internal transition layer of the reaction-diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2018. P. 1–15. <https://doi.org/10.1002/mma.5134>
15. *Орлов А.О., Неведов Н.Н., Левашова Н.Т.* Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками // *Дифференц. ур-ния*. 2018. Т. 54. № 5. С. 673–690.
16. *Левашова Н.Т., Николаева О.А.* Асимптотическое исследование решения уравнения теплопроводности вблизи границы раздела двух сред // *Моделирование и анализ информационных систем*. 2017. Т. 24. № 3. С. 339–352.
17. *Фэй П.Я., Ни М.К., Левашова Н.Т., Николаева О.А.* Внутренние слои для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с разрывной правой частью // *Дифференц. ур-ния*. 2017. Т. 53. № 12. С. 1616–1626.
18. *Неведов Н.Н., Ни М.К.* Внутренние слои в одномерном уравнении реакция–диффузия с разрывным реактивным членом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 12. С. 2042–2048.
19. *Ильин А.М.* Исследование сингулярно возмущенных краевых задач методом согласования асимптотических разложений // *Дифференц. ур-ния*. 1985. Т. 21. № 10. С. 1760–1766.
20. *Васильева А.Б.* Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1995. Т. 35. № 4. С. 520–531.
21. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Наука, 1990.
22. *Неведов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // *Дифференц. ур-ния*. 1995. Т. 31. № 7. С. 1142–1149.
23. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Неведов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // *Тр. Матем. Ин-та им. В.А. Стеклова*. 2010. Т. 268. С. 268–283.
24. *Павленко В.Н., Ульянова О.В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями // *Дифференц. ур-ния*. 2002. Т. 38. № 4. С. 499–504.
25. *Pao C.V.* // *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. New York: Plenum Press, 1992. 777 p.
26. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Наука, 1968. 428 с.
27. *Dong G.* // *Nonlinear Partial Differential Equations of Second Order*. Providence, Rhode Island, 2008.