ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 4, с. 579–586

УДК 519.65

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

© 2019 г. В. Г. Магомедова[1,], А.-Р. К. Рамазанов[1,2,]***

([1] 367000 Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а, Дагестанский государственный ун-т, Россия;

[2] 367032 Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45, Дагестанский научный центр РАН, Россия)

**e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru*

***e-mail: vazipat@rambler.ru*

Поступила в редакцию 08.10.18 г.
Переработанный вариант 12.12.2018 г.
Принята к публикации 12.12.2018 г.

Для дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке функций получены оценки совместного равномерного приближения самих функций и их производных до второго порядка посредством интерполяционных рациональных сплайн-функций и их соответствующих производных. Эти оценки применены при построении приближенных дважды гладких решений краевых задач и начальной задачи Коши для некоторых линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Библ. 9.

Ключевые слова: рациональные сплайн-функции, интерполяционные сплайн-функции, приближенное решение дифференциальных уравнений.

DOI: 10.1134/S0044466919040112

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшие свойства полиномиальных сплайнов и некоторых их обобщений и различные приложения сплайнов достаточно глубоко исследованы (см., например, [1]–[5]).

В [6], [7] построены гладкие сплайн-функции на базе трехточечных рациональных интерполянтов, которые (в отличие от классических сплайнов) сами и их производные первого и второго порядков обладают, по терминологии Ю.Н. Субботина (см. [8]), свойством безусловной сходимости на соответствующем классе $C^r[a,b]$ непрерывно дифференцируемых r раз ($r = 0, 1, 2$) на отрезке $[a,b]$ функций. Изучены также (см. [9]) некоторые их аппроксимативные, формосохраняющие свойства.

Ниже для произвольной функции из $C^2[a,b]$ и ее производных первого и второго порядков получены оценки скорости совместной равномерной сходимости подобных сплайн-функций по трехточечным рациональным интерполянтам и их соответствующих производных.

Эти оценки позволяют применить такие рациональные сплайн-функции для приближенного решения краевых задач и начальной задачи Коши для некоторых дифференциальных уравнений второго порядка. При этом решение представляет собой дважды гладкую на рассматриваемом отрезке функцию, что бывает важно и на практике, когда требуется интерполяция на массивных сетках узлов с “малыми” диаметрами.

Следует также отметить, что структура применяемых рациональных сплайн-функций позволяет получить сравнительно более простые алгоритмы поиска решения.

1. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

Чтобы исследовать вопрос об оценке скорости совместной сходимости рациональных сплайн-функций и их производных до второго порядка, возьмем произвольную сетку узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ $(N \ge 2)$ и положим

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \quad \Delta_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\} \quad (i = 2, 3, \ldots, N-1),$$

$$\Delta_1 = \max\{h_1, h_2\}, \quad \Delta_N = \max\{h_{N-1}, h_N\}, \quad \|\Delta\| = \max\{h_i \mid i = 1, 2, \ldots, N\},$$

$$\rho_\Delta = \max\{h_i h_j^{-1} \,|\, |i-j| = 1, 1 \le i, j \le N\}.$$

При произвольном $\lambda \ge 1$ возьмем также набор чисел $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ таких, что при $i = 1, 2, \ldots, N-1$ имеем

$$g_i = \begin{cases} x_{i+1} + \lambda h_{i+1} & \text{при} \quad h_{i+1} \le h_i, \\ x_{i-1} - \lambda h_i & \text{при} \quad h_{i+1} > h_i. \end{cases}$$

Теперь для определенной на сетке Δ функции $f(x)$ при $i = 1, 2, \ldots, N-1$ рассмотрим рациональные функции вида

$$R_i(x) = R_i(x, f) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i}, \tag{1.1}$$

удовлетворяющие условиям $R_i(x_j) = f(x_j)$ $(j = i-1, i, i+1)$.

Используя разделенные разности, получим

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - \delta_i (x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + \delta_i (x_i - g_i), \\ \gamma_i &= \delta_i (x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i); \end{aligned} \tag{1.2}$$

здесь и ниже $\delta_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ – разделенная разность второго порядка.

Будем считать также, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$, и для данных сетки узлов Δ, набора полюсов $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ и функции $f(x)$ определим на отрезке $[a, b]$ сплайн-функцию $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$, для которой при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ выполняется равенство

$$\begin{gathered} R_{N,2}(x) = R_i(x) A_{i,2}(x) + R_{i-1}(x) B_{i,2}(x), \\ A_{i,2}(x) = \frac{(x - x_{i-1})^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2}, \quad B_{i,2}(x) = \frac{(x - x_i)^2}{(x - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Можно показать (см. [6]), что $R_{N,2} \in C^2[a, b]$. При этом

$$\left|A'_{i,2}(x)\right| = \left|B'_{i,2}(x)\right| \le \frac{2}{x_i - x_{i-1}} \quad (x \in [x_{i-1}, x_i]). \tag{1.4}$$

Ниже для непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций $\varphi(x)$ будем придерживаться также обозначений

$$\|\varphi\|_{[\alpha,\beta]} = \max\{|\varphi(x)| : x \in [\alpha, \beta]\},$$

$$\omega(h, \varphi) = \sup\{|\varphi(x + t) - \varphi(x)| : 0 \le t \le h;\ x, x + t \in [\alpha, \beta]\}.$$

В принятых выше обозначениях имеет место

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in C^2[a, b]$ *и для произвольных* $\lambda \ge 1$ *и сетки узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ $(N \ge 2)$ *выбраны полюсы* $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ *и определены рациональные интерполянты* $R_i(x) = R_i(x, f)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$.

Тогда для сплайн-функции $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, f, \Delta, g)$ *при* $x \in [a, b]$ *выполняются неравенства*

$$|f(x) - R_{N,2}(x)| \le \left(2\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{1}{4\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}\right)\|\Delta\|^2, \tag{1.5}$$

$$\left|f'(x) - R'_{N,2}(x)\right| \le \left(5\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{8}{\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}\right)\|\Delta\|, \tag{1.6}$$

$$\left|f''(x) - R''_{N,2}(x)\right| \le 26\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{49}{\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}. \qquad (1.7)$$

Заметим, что если в условиях теоремы 1 взять, например, $\lambda = \frac{b-a}{\|\Delta\|}\rho_\Delta$, то при $r = 0, 1, 2$ получим соотношение

$$\left\|f^{(r)} - R^{(r)}_{N,2}\right\|_{[a,b]} = \overline{\overline{o}}(\|\Delta\|^{2-r}) \quad (\|\Delta\| \to 0).$$

Доказательство теоремы 1. Неравенство (1.7) получено в [7], поэтому докажем (1.5) и (1.6).

Для оценки $f(x) - R_i(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ преобразуем $R_i(x)$ из (1.1) к виду

$$R_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + A_i\frac{x - x_i}{x - g_i}, \qquad (1.8)$$

в котором, используя (1.2), получаем

$$A_i = \gamma_i\frac{1}{g_i - x_i} = -\delta_i(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \quad a_i = \alpha_i - A_i = f(x_i), \qquad (1.9)$$

а коэффициент b_i выразим двояко равенствами

$$b_i = f(x_{i-1}, x_i) + \delta_i(x_{i+1} - g_i), \qquad (1.10)$$

$$b_i = f(x_i, x_{i+1}) + \delta_i(x_{i-1} - g_i). \qquad (1.11)$$

Пусть сначала $h_{i+1} \le h_i$. Тогда $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ и из (1.8)–(1.10) при $x \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ и $x \ne x_i$ получим

$$f(x) - R_i(x) = [f(x) - f(x_i)] - f(x_{i-1}, x_i)(x - x_i) - \delta_i(x_{i+1} - g_i)(x - x_i) + \delta_i(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i)\times$$

$$\times\frac{x - x_i}{x - g_i} = [f(x_i, x) - f(x_{i-1}, x_i)](x - x_i) - \delta_i\frac{x_{i+1} - g_i}{x - g_i}(x - x_i)(x - g_i - x_{i-1} + g_i) =$$

$$= f(x_{i-1}, x_i, x)(x - x_{i-1})(x - x_i) - \delta_i\frac{x_{i+1} - g_i}{x - g_i}(x - x_{i-1})(x - x_i) =$$

$$= [f(x_{i-1}, x_i, x) - \delta_i](x - x_{i-1})(x - x_i) + \delta_i(x - x_{i-1})(x - x_i)\left(1 - \frac{x_{i+1} - g_i}{x - g_i}\right) =$$

$$= [f(x_{i-1}, x_i, x) - \delta_i](x - x_{i-1})(x - x_i) + \delta_i(x - x_{i-1})(x - x_i)\frac{x - x_{i+1}}{x - g_i}.$$

В силу $f \in C^2[a,b]$ найдутся точки $t_1, t_2 \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ такие, что

$$|f(x) - R_i(x)| \le |f''(t_2) - f''(t_1)|h_i^2 + \frac{1}{2}|f''(t_1)|\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\rho_\Delta h_i^2 \le$$

$$\le \omega(x_{i+1} - x_{i-1}, f'')h_i^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\lambda}\rho_\Delta\|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}h_i^2.$$

Пусть теперь $h_{i+1} > h_i$, $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ и $x \in (x_{i-1}, x_{i+1})$, $x \ne x_i$. Тогда из равенств (1.8), (1.9) и (1.11) аналогично получим

$$|f(x) - R_i(x)| \le \omega(x_{i+1} - x_{i-1}, f'')h_{i+1}^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\lambda}\rho_\Delta\|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}h_{i+1}^2.$$

Поэтому для $i = 1, 2, \ldots, N-1$ при всех $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ (для узлов – очевидно) имеем

$$|f(x) - R_i(x)| \le \left(\omega(x_{i+1} - x_{i-1}, f'') + \frac{1}{4\lambda}\rho_\Delta\|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}\right)\max\{h_i^2, h_{i+1}^2\}.$$

Отсюда и из равенства (1.3) вытекает, что при $x \in [a,b]$ и любом $\lambda \ge 1$ справедливо неравенство

$$|f(x) - R_{N,2}(x)| \le \left(\omega(2\|\Delta\|, f'') + \frac{1}{4\lambda}\rho_\Delta\|f''\|_{[a,b]}\right)\|\Delta\|^2,$$

откуда получим (1.5).

Для оценки разности $f(x) - R'_{N,2}(x)$ в случае $f \in C^2[a,b]$ считаем, как и выше, что рациональные функции $R_i(x) = R_i(x, f)$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ определены для $f(x)$ и сетки узлов Δ через равенства (1.1) и (1.2).

Тогда, как показано в [7] (лемма 1), для $i = 1, 2, \ldots, N-1$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ выполняется неравенство

$$\left| f''(x) - R_i''(x) \right| \le 2\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{5}{\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}. \tag{1.12}$$

По построению функции $R_i(x)$ для $i = 1, 2, \ldots, N-1$ имеем $f(x_j) - R_i(x_j) = 0$ при $j = i-1, i, i+1$, а значит, по теореме Ролля о среднем найдутся точки $\tau_1 \in (x_{i-1}, x_i)$ и $\tau_2 \in (x_i, x_{i+1})$, для которых $f'(\tau_j) - R_i'(\tau_j) = 0$ $(j = 1, 2)$.

Пусть теперь $\tau = \tau_1$, если $x \in [x_{i-1}, x_i]$, и $\tau = \tau_2$, если $x \in (x_i, x_{i+1}]$. Тогда между точками τ и x найдутся точки c_1 и c_2 такие, что при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ имеем

$$f'(x) - R_i'(x) = f'(x) - f'(\tau) + R_i'(\tau) - R_i'(x) = f''(c_1)(x-\tau) + R_i''(c_2)(\tau - x) =$$
$$= (f''(c_1) - f''(c_2))(x-\tau) + (f''(c_2) - R_i''(c_2))(x-\tau).$$

Здесь учтем, что $|c_1 - c_2| \le |x - \tau| \le \|\Delta\|$. Тогда отсюда и из (1.12) при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ и $\lambda \ge 1$ получим

$$\left| f'(x) - R_i'(x) \right| \le 3\omega(\|\Delta\|, f'')\|\Delta\| + \frac{5}{\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}\|\Delta\|. \tag{1.13}$$

Далее, из равенства (1.3) (с учетом выбора $R_0(x) \equiv R_1(x)$ и $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$) при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ получим

$$f'(x) - R_{N,2}'(x) = (R_i(x) - R_{i-1}(x))\,B_{i,2}'(x) + (f'(x) - R_i'(x))A_{i,2}(x) + (f'(x) - R_{i-1}'(x))B_{i,2}(x).$$

Для одновременной оценки двух последних слагаемых правой части воспользуемся неравенством (1.13). Величину $\left|B_{i,2}'(x)\right|$ оценим по неравенству (1.4). Что касается разности $R_i(x) - R_{i-1}(x)$, то, используя равенства (1.8)–(1.10) для $R_i(x)$ и равенства (1.8), (1.9), (1.11) для $R_{i-1}(x)$, и лемму 2 из [7], находим, что

$$R_i(x) = f(x_i) + f(x_{i-1}, x_i)(x - x_i) + \delta_i \frac{(x_{i-1} - x)(x_i - x)(x_{i+1} - g_i)}{x - g_i},$$

$$R_{i-1}(x) = f(x_{i-1}) + f(x_{i-1}, x_i)(x - x_{i-1}) + \delta_{i-1} \frac{(x_{i-2} - g_{i-1})(x_{i-1} - x)(x_i - x)}{x - g_{i-1}}$$

и при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ выполняется неравенство

$$|R_i(x) - R_{i-1}(x)| \le \frac{1}{4}h_i^2\left(3\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{11}{2\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}\right).$$

Значит, отсюда и из неравенств (1.4), (1.13) при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и любом $\lambda \ge 1$ имеем

$$\left| f'(x) - R_{N,2}'(x) \right| \le \frac{1}{2}h_i\left(3\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{11}{2\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}\right) + 3\omega(\|\Delta\|, f'')\|\Delta\| + \frac{5}{\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}\|\Delta\| \le$$
$$\le \left(\frac{9}{2}\omega(\|\Delta\|, f'') + \frac{31}{4\lambda}\rho_\Delta \|f''\|_{[a,b]}\right)\|\Delta\|,$$

откуда следует (1.6).

Теорема 1 доказана.

2. ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хорошо известны (см., например, [1]–[3], [5]) успешные применения полиномиальных сплайнов и других сплайн-функций для приближенного решения различного вида дифференциальных уравнений.

Предлагаемый ниже метод поиска приближенного гладкого решения данной краевой задачи или задачи Коши в виде сплайн-функции, построенного на основе трехточечных рациональных интерполянтов, часто приводит к простым по реализации алгоритмам.

Суть метода в краткой форме можно показать на примере краевой задачи о нахождении приближенного решения класса $C^2[a,b]$ уравнения

$$y'' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.1}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{2.2}$$

Как будет видно, предлагаемая схема численного решения применима к общим линейным дифференциальным уравнениям второго порядка (с отличным от нуля старшим коэффициентом).

Будем предполагать, что $f(x)$ и $q(x)$ непрерывны и $q(x) < 0$ на отрезке $[a,b]$ и задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение $y(x)$ класса $C^2[a,b]$.

На отрезке $[a,b]$ введем (снова для краткости) равномерную сетку узлов $\Delta: x_i = a + ih$, $h = (b-a)/N$, $i = 0,1,\dots,N$ $(N \ge 2)$, и для произвольного $\lambda \ge 1$ возьмем набор полюсов $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ с $g_i = x_{i+1} + \lambda h$, $i = 1,2,\dots,N-1$.

Приближенное решение задачи (2.1), (2.2) будем искать в виде сплайн-функции $R_{N,2}(x) = R_{N,2}(x, y(x), \Delta, g)$, построенной на базе рациональных функций $R_i(x) = R_i(x, y(x))$, задаваемых равенствами типа (1.1)–(1.3).

Дело в том, что из равенства

$$R''_{N,2}(x) + q(x)R_{N,2}(x) - f(x) = (R''_{N,2}(x) - y''(x)) + q(x)(R_{N,2}(x) - y(x)) \quad (x \in [a,b])$$

в силу аппроксимационной теоремы 1 и непрерывности $q(x)$ и $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ вытекает равномерная сходимость на $[a,b]$ к нулю левой части этого равенства при $h \to 0$ и, например, при $\lambda = (b-a)/h$.

При этом сравнительная простота получаемых алгоритмов поиска сплайн-функции $R_{N,2}(x)$ связана с ее конструкцией, из которой, в частности, вытекают равенства (см. [6])

$$R^{(r)}_{N,2}(x_i) = R^{(r)}_i(x_i) \quad (i = 1,2,\dots,N-1; \quad r = 0,1,2);$$

$R_{N,2}(x) = R_1(x)$ при $x \in [x_0, x_1]$, $R_{N,2}(x) = R_{N-1}(x)$ при $x \in [x_{N-1}, x_N]$.

Значит, при $i = 1,\dots,N-1$ получим

$$R''_{N,2}(x_i) = R''_i(x_i) = 2y(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})\frac{(x_{i-1}-g_i)(x_i-g_i)(x_{i+1}-g_i)}{(x_i-g_i)^3} =$$

$$= (y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))\frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2 h^2},$$

$$R_{N,2}(x_i) = R_i(x_i) = y(x_i);$$

$$R_{N,2}(x_0) = R_1(x_0) = y(x_0), \quad R_{N,2}(x_N) = R_{N-1}(x_N) = y(x_N).$$

Сами интерполянты $R_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,N-1)$, из которых по равенству вида (1.3) строится искомая сплайн-функция $R_{N,2}(x)$, связаны по формулам вида (1.2) со значениями $y(x_{i-1})$, $y(x_i)$, $y(x_{i+1})$ равенствами

$$R_i(x) = u_i + v_i(x - x_i) + w_i\frac{1}{x - x_{i+1} - \lambda h},$$

$$u_i = -\left(\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda\right)y(x_{i+1}) + (\lambda^2 + 2\lambda + 1)y(x_i) - \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda\right)y(x_{i-1}),$$

$$v_i = \frac{1}{2h}\left(-\lambda y(x_{i+1}) + 2(\lambda+1)y(x_i) - (\lambda+2)y(x_{i-1})\right),$$

$$w_i = -(\lambda+2)(\lambda+1)\lambda h\left(\frac{1}{2}y(x_{i+1}) - y(x_i) + \frac{1}{2}y(x_{i-1})\right);$$

$$R_0(x) = R_1(x), \quad R_N(x) = R_{N-1}(x).$$

Для нахождения неизвестных $y_j = y(x_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ приближенно заменим задачу (2.1), (2.2) на задачу

$$R''_{N,2}(x) + q(x)R_{N,2}(x) = f(x), \quad x \in [a, b],$$

$$R_{N,2}(a) = A, \quad R_{N,2}(b) = B,$$

которая при переходе к узлам $x = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ приводит к равенствам

$$R''_i(x_i) + q(x_i)R_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$R_{N,2}(a) = R_1(a) = y_0 = A, \quad R_{N,2}(b) = R_{N-1}(b) = y_N = B.$$

Отсюда, если для краткости обозначить

$$d = d(\lambda, h) = \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2 h^2}, \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, N),$$

получим для неизвестных y_i $(i = 0, 1, \ldots, N)$ систему линейных алгебраических уравнений

$$d\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$y_0 = A, \quad y_N = B.$$

Последнюю систему при $y_0 = A$, $y_N = B$ можно записать в виде системы с трехдиагональной матрицей (с доминирующей главной диагональю)

$$\left(\frac{q_1}{d} - 2\right)y_1 + y_2 = \frac{f_1}{d} - A,$$

$$y_{i-1} + \left(\frac{q_i}{d} - 2\right)y_i + y_{i+1} = \frac{f_i}{d}, \quad i = 2, 3, \ldots, N-2, \tag{2.3}$$

$$y_{N-2} + \left(\frac{q_{N-1}}{d} - 2\right)y_{N-1} = \frac{f_{N-1}}{d} - B.$$

Ясно, что она однозначно разрешима при любом $\lambda \geq 1$ и натуральном $N \geq 3$ (предполагается $q(x) < 0$ при $x \in [a, b)$).

Если вместо краевых условий (2.2) задаются краевые условия общего вида

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = A, \quad b_0 y(b) + b_1 y'(b) = B, \tag{2.4}$$

то полученные выше уравнения

$$y_{i-1} + \left(\frac{q_i}{d} - 2\right)y_i + y_{i+1} = \frac{f_i}{d} \tag{2.5}$$

при $i = 1, 2, \ldots, N-1$ остаются в силе. К ним присоединим еще два уравнения, которые получаются из краевых условий (2.4) с учетом равенств $R_{N,2}(x) = R_1(x)$ при $x \in [x_0, x_1]$ и $R_{N,2}(x) = R_{N-1}(x)$ при $x \in [x_{N-1}, x_N]$, а также из равенств $y'(a) = R'_{N,2}(a) = R'_1(a)$ и $y'(b) = R'_{N,2}(b) = R'_{N-1}(b)$.

Из краевых условий (2.4) получим соответственно уравнения

$$\left(a_0 - \frac{3\lambda+4}{2(\lambda+2)h}a_1\right)y_0 + \frac{2\lambda+2}{(\lambda+2)h}a_1 y_1 - \frac{\lambda}{2(\lambda+2)h}a_1 y_2 = A, \tag{2.6}$$

$$\frac{\lambda+2}{2\lambda h}b_1 y_{N-2} - \frac{2\lambda+2}{\lambda h}b_1 y_{N-1} + \left(b_0 + \frac{3\lambda+2}{2\lambda h}\right)y_N = B. \tag{2.7}$$

Если теперь к уравнениям (2.5) с $i = 1, 2, \ldots, N-1$ в качестве первого и последнего уравнений присоединить соответственно (2.6) и (2.7), то получим систему $(N+1)$ линейных уравнений с $(N+1)$ неизвестными $y_0, y_1, \ldots, y_N$. Она также легко сводится к системе с трехдиагональной матрицей.

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (2.1) с начальными условиями

$$y(a) = A_0, \quad y'(a) = A_1. \tag{2.8}$$

Из этих условий по аналогии с (2.6) получим

$$y(a) = R_{N,2}(a) = R_1(a) = y_0 = A_0,$$

$$y'(a) = R'_{N,2}(a) = R'_1(a) = -\frac{3\lambda + 4}{2(\lambda + 2)h} y_0 + \frac{2\lambda + 2}{(\lambda + 2)h} y_1 - \frac{\lambda}{2(\lambda + 2)h} y_2 = A_1.$$

Из последнего равенства и уравнения (2.5) при $i = 1$ с учетом известного значения $y_0 = A_0$ составим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными y_1 и y_2.

Получим

$$\begin{gathered} 4h(\lambda + 1)y_1 - \lambda y_2 = 2h(\lambda + 2)A_1 + (3\lambda + 4)A_0, \\ \left(\frac{q_1}{d} - 2\right) y_1 + y_2 = \frac{f_1}{d} - A_0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

В случае существования решения (y_1, y_2) системы (2.9), что легко проверяется, остальные неизвестные можно находить, используя следующие равенства, вытекающие из (2.5):

$$y_{i+1} = \frac{f_i}{d} - y_{i-1} - \left(\frac{q_i}{d} - 2\right) y_i \quad (i = 2, 3, \ldots, N - 1).$$

Можно показать (ср., например, с [1], 2.7 и [2], гл. VI, § 4), что решения получаемых систем линейных алгебраических уравнений относительно $y_0, y_1, \ldots, y_N$ определяют рациональные сплайн-функции $R_{N,2}(x)$, равномерно сходящиеся на отрезке $[a, b]$ к решению $y(x)$ соответствующей краевой или начальной задачи, если для матриц этих систем существуют обратные матрицы, нормы которых равномерно ограничены.

Действительно, рассмотрим, например, случай краевой задачи (2.1), (2.2).

Пусть $y_0 = A$, $y_N = B$, $(y_1, y_2, \ldots, y_{N-1})$ – решение системы (2.3) и пусть $R_{N,2}(x)$ – рациональная сплайн-функция вида (1.3), составленная по узлам $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, и соответствующим значениям y_i, $i = 0, 1, \ldots, N$. Тогда выполняются равенства

$$\begin{gathered} R''_{N,2}(x_i) + q(x_i) R_{N,2}(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N - 1; \\ R_{N,2}(a) = A, \quad R_{N,2}(b) = B. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Считаем, что существует единственное решение $y(x)$ задачи (2.1), (2.2) класса $C^2_{[a,b]}$ и $R_{N,2}(x, y)$ означает рациональную сплайн-функцию вида (1.3) для функции $y(x)$ и узлов x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$. Если при $x \in [a, b]$ обозначим

$$G(x) = R''_{N,2}(x, y) + q(x) R_{N,2}(x, y) - f(x),$$

то с использованием (2.1) и (2.10) при $x \in [a, b]$ и при $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ соответственно получим

$$G(x) = R''_{N,2}(x, y) - y''(x) + q(x)\left[R_{N,2}(x, y) - y(x)\right], \tag{2.11}$$

$$G(x_i) = R''_{N,2}(x_i, y) + q_i R_{N,2}(x_i, y) - [R''_{N,2}(x_i) + q_i R_{N,2}(x_i)]. \tag{2.12}$$

Из (2.11), применив теорему 1 с $\lambda = \frac{b - a}{\|\Delta\|} \rho_\Delta = \frac{b - a}{h}$ к функции $y(x)$, имеем

$$G_{\max} = \max_{a \le x \le b} |G(x)| \le M(h, q)\left(\omega(h, y'') + \frac{2h}{b - a} \|y''\|_{[a,b]}\right), \tag{2.13}$$

где $M(h, q) = 26 + 2\|q\|_{[a,b]} h^2$.

Из (2.12), выразив сплайн-функции $R_{N,2}(x, y)$ и $R_{N,2}(x)$ через соответствующие значения $y(x_j)$ и y_j и учитывая $y(x_0) = y_0 = A$, $y(x_N) = y_N = B$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно разностей $z_j = y(x_j) - y_j$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ следующего вида:

$$(q_1/d - 2) z_1 + z_2 = G(x_1)/d,$$

$$z_{i-1} + (q_i/d - 2)z_i + z_{i+1} = G(x_i)/d, \quad i = 2,3,\ldots,N-2, \tag{2.14}$$
$$z_{N-2} + (q_{N-1}/d - 2)\,z_{N-1} = G(x_{N-1})/d.$$

Матрица системы (2.14) имеет диагональное преобладание величины $\delta = q_{\min}/d$, где $q_{\min} = \min\{|q(x)| : x \in [a,b]\} > 0$. Поэтому при $i = 1,2,\ldots,N-1$ получим

$$|z_i| \le G_{\max}\frac{1}{q_{\min}}. \tag{2.15}$$

Пусть теперь $R_i(x)$ и $R_i(x,y)$ ($i = 0,1,\ldots,N$) означают рациональные интерполянты вида (1.1) соответственно для значений y_j ($j = 0,1,\ldots,N$) и для значений $y(x_j)$ ($i = 0,1,\ldots,N$) решения $y(x)$ задачи (2.1), (2.2) в узлах сетки. Тогда по построению $R_0(x) = R_1(x)$, $R_N(x) = R_{N-1}(x)$, $R_0(x,y) = R_1(x,y)$, $R_N(x,y) = R_{N-1}(x,y)$, а при $i = 1,2,\ldots,N-1$ и $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ выполняется равенство

$$R_i(x,y) - R_i(x) = z_i + (z_i - z_{i-1})\frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}}\left[1 - \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})}{(x - g_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}\right] +$$
$$+ (z_{i+1} - z_i)\frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x - g_i)}.$$

Из этого равенства при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 1,2,\ldots,N-1$) имеем

$$|R_i(x,y) - R_i(x)| \le |z_{i-1}| + 3|z_i| + |z_{i+1}|.$$

Отсюда при $x \in [x_{i-1}, x_i]$, ($i = 1,2,\ldots,N$) и из равенства

$$R_{N,2}(x,y) - R_{N,2}(x) = \left(R_i(x,y) - R_i(x)\right)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \left(R_{i-1}(x,y) - R_{i-1}(x)\right)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$$

получим

$$|R_{N,2}(x,y) - R_{N,2}(x)| \le \max\{|z_{i-1}| + 3|z_i| + |z_{i+1}| : i = 1,2,\ldots,N-1\}. \tag{2.16}$$

Наконец, при $x \in [a,b]$ имеем

$$|y(x) - R_{N,2}(x)| \le |y(x) - R_{N,2}(x,y)| + |R_{N,2}(x,y) - R_{N,2}(x)|.$$

Если для оценки первого слагаемого правой части воспользоваться теоремой 1, а для оценки ее второго слагаемого неравенствами (2.16), (2.15) и (2.13), то при $x \in [a,b]$ получим неравенство

$$|y(x) - R_{N,2}(x)| \le \left(5M(h,q)\frac{1}{q_{\min}} + 2h^2\right)\left(\omega(h,y'') + \frac{2h}{b-a}\|y''\|_{[a,b]}\right).$$

Отсюда, в частности, следует равномерная сходимость на отрезке $[a,b]$ сплайн-функций $R_{N,2}(x)$ к решению $y(x)$ задачи (2.1), (2.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
2. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
3. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
4. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
5. *де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
6. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Матем. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 4. С. 592–603.
7. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные матем. изв. 2017. Вып. 7. С. 16–28.
8. *Субботин Ю.Н.* Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. матем. 1997. Т. 3. Вып. 4. С. 1043–1058.
9. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций // Тр. матем. и мех. УрО РАН. 2017. Т. 23. № 3. С. 224–233.