

УДК 519.634

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ¹⁾

© 2019 г. Р. В. Намм^{1,2,*}, Г. И. Цой^{1,**}

¹⁾ 680000 Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65, ВЦ ДВО РАН, Россия;

²⁾ 680035 Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136, Гос. ун-т, Россия)

*e-mail: rnamm@yandex.ru

**e-mail: tsoy.dv@mail.ru

Поступила в редакцию 24.11.2017 г.
Переработанный вариант 14.11.2018 г.
Принята к публикации 14.11.2018 г.

Рассматривается решение задачи о равновесии упругого тела, содержащего жесткое включение. На одном из участков границы включения и упругого тела имеется трещина отслоения. На берегах трещины задаются условия взаимного непроникания берегов друг в друга. Приводится метод решения, основанный на возможности рассмотрения задачи с жестким включением в качестве предельной для семейства задач с трещиной. Также предлагается численный метод решения задачи, который основан на модифицированной схеме двойственности и алгоритме Удзавы. Приводятся результаты численного счета с помощью МКЭ. Библ. 16. Фиг. 3. Табл. 1.

Ключевые слова: условие непроникания, жесткое включение, трещина, схема двойственности, модифицированный функционал Лагранжа, обобщенный метод Ньютона.

DOI: 10.1134/S0044466919040136

ВВЕДЕНИЕ

В связи с широким применением композиционных материалов в инженерной практике, исследования краевых задач равновесия упругих тел, содержащих жесткие включения, являются важной актуальной проблемой.

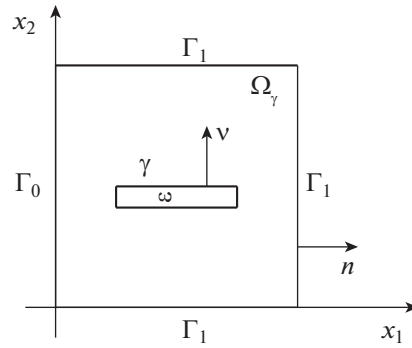
В результате эксплуатации композита включения могут отслаиваться от упругого тела, тем самым образуя трещины. Классические постановки задачи теории упругости с трещиной предполагают, как правило, что напряжение на берегах трещины равно нулю [1]. Но равенство нулю напряжений на берегах трещины не исключает возможность проникновения берегов трещины друг в друга, что является неестественным с точки зрения механики. В последнее время в работах по теории трещин рассматриваются модели с нелинейными краевыми условиями на берегах трещины [2]–[4]. Отметим также работы [5], [6], в которых рассматриваются методы решения задачи с трещиной и задачи с тонким жестким включением. Указанные краевые условия записываются в виде неравенств и обеспечивают взаимное непроникновение берегов трещины. Такие модели более предпочтительны в сравнении с их классическими аналогами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о равновесии упругого тела, содержащего жесткое включение, на границе которого расположена трещина. Предполагаем, что на берегах трещины заданы краевые условия взаимного непроникания берегов.

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с достаточно регулярной границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\omega \subset \Omega$ – подобласть с достаточно регулярной границей Σ такая, что $\bar{\omega} \cap \Gamma = \emptyset$ (см. фиг. 1). Предпо-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00682 А).



Фиг. 1. Упругое тело с отслоившимся жестким включением.

жим, что Σ состоит из двух частей γ и $\Sigma \setminus \gamma$, $\text{meas}(\Sigma \setminus \gamma) > 0$, где γ — гладкая линия, без самопересечений.

Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор внешней нормали к Σ . Подобласть ω будет соответствовать жесткому включению, а линия γ — трещине, расположенной на поверхности этого включения. Область $\Omega \setminus \bar{\omega}$ соответствует упругой части тела.

Термин “жесткое включение” означает, что перемещения точек подобласти ω являются элементами пространства $R(\omega)$ инфинитезимальных жестких перемещений, которое определяется следующим образом:

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) : \rho(x) = Bx + C, x \in \omega\},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2); \quad b, c^1, c^2 \text{ — произвольные постоянные.}$$

Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$.

Для вектора перемещений $v = (v_1, v_2)$ определим тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2,$$

и тензор напряжений, связанный с ним по линейному закону Гука

$$\sigma_{ij}(v) = c_{ijkl} \varepsilon_{km}(v),$$

где $c_{ijkl} = c_{jikm} = c_{kmi j}$, $i, j, k, m = 1, 2$, и по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, где Γ_0, Γ_1 — непустые открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ . Кроме того, пусть заданы вектор функции $f = (f_1, f_2)$ и $p = (p_1, p_2)$ объемных и поверхностных сил соответственно.

Краевая постановка задачи о равновесии упругого тела, содержащего жесткое включение ω и трещину γ , формулируется следующим образом. В области Ω_γ требуется найти функцию $u = (u_1, u_2)$, $u = \rho_0$ на ω , $\rho_0 \in R(\omega)$ такую, что

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= f_i & \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{km} & \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ u &= 0 & \text{на } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij} n_j &= p_i & \text{на } \Gamma_1, \quad i = 1, 2, \\ (u - \rho_0) \nu &\geq 0 & \text{на } \gamma^+, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\nu(u) &\leq 0, \quad \sigma_\tau(u) = 0 \quad \text{на } \gamma^+, \\ \sigma_\nu \cdot (u - \rho_0)\nu &= 0 \quad \text{на } \gamma^+, \\ -\int_{\Sigma} \sigma_\nu \cdot \rho d\Gamma &= \int_{\omega} f \rho d\Omega \quad \forall \rho \in R(\omega).\end{aligned}$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ – вектор единичной внешней нормали к Γ , γ^+ – положительный берег трещины γ , $\sigma_\nu(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_j$, $\sigma_\tau(u) = \sigma(u) - \sigma_\nu \cdot \nu$, где $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \sigma_2(u))$, $\sigma_i(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_j$, $i = 1, 2$. Последнее интегральное равенство соответствует условию равновесия на жестком включении.

Приведем вариационную постановку задачи (1.1). Введем пространство

$$H_{\Gamma_0}^{1,\omega} = \{v = (v_1, v_2) \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 : v = \rho \text{ на } \omega; \rho \in R(\omega); v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

и определим множество допустимых перемещений

$$K_\omega = \{v \in H_{\Gamma_0}^{1,\omega} : (v - \rho)\nu \geq 0 \text{ на } \gamma^+\}.$$

Вариационная постановка задачи о равновесии упругого тела, содержащего жесткое включение ω и трещину γ имеет вид (см. [2])

$$J(v) \rightarrow \min, \quad v \in K_\omega, \quad (1.2)$$

в которой выпуклый функционал потенциальной энергии $J(v)$ имеет вид

$$\begin{aligned}J(v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma, \\ f &\in [L_2(\Omega_\gamma)]^2, \quad p \in [L_2(\Gamma_1)]^2.\end{aligned}$$

При условии, что тензор модулей упругости $C = \{c_{ijkl}\}$ обладает свойством положительной определенности и $c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$, задача (1.2) имеет решение u , которое одновременно удовлетворяет вариационному неравенству

$$u \in K_\omega : \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v - u) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i (v_i - u_i) d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i (v_i - u_i) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K_\omega.$$

Нетрудно показать, что решение u единственное.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Предлагаемый метод решения основан на том, что задачу о равновесии упругого тела, содержащего жесткое включение, на границе которого расположена трещина, оказывается, можно рассматривать как предельную для семейства задач о равновесии упругих тел с трещиной, сформулированных в области Ω_γ [2]. Для упругих пластин данный метод изучен в [7]–[9]. Это означает, что можно построить семейство задач с положительным параметром λ таких, что для любого фиксированного $\lambda > 0$ задача описывает равновесие упругого тела, занимающего область Ω_γ с трещиной γ . При этом, при $\lambda \rightarrow 0$ мы получим жесткое включение ω , так что каждая точка $x \in \omega$ имеет перемещение $\rho_0(x)$, $\rho_0 \in R(\omega)$ [2, с. 81]. Дадим необходимое пояснение к сказанному.

Введем тензор $C^\lambda = \{c_{ijkl}^\lambda\}$, $i, j, k, l = 1, 2$:

$$c_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} c_{ijkl} & \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ \lambda^{-1} c_{ijkl} & \text{в } \omega \end{cases}$$

и рассмотрим следующее семейство задач. В области Ω_γ найти функции $u^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}$, $i, j = 1, 2$ такие, что

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_{ij}^\lambda}{\partial x_j} &= f_i \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{ij}^\lambda &= c_{ijk}^\lambda \varepsilon_{km}(u^\lambda) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \\ u^\lambda &= 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij}^\lambda n_j &= p_i \quad \text{на } \Gamma_1, \quad i = 1, 2, \\ [u^\lambda]_\nu &\geq 0, \quad [\sigma_\nu^\lambda] = 0, \quad \sigma_\nu^\lambda \times [u^\lambda]_\nu = 0, \quad \text{на } \gamma, \\ \sigma_\nu^\lambda &\leq 0, \quad \sigma_\tau^\lambda = 0 \quad \text{на } \gamma^\pm. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $[v] = v^+ - v^-$ – скачок функции v на γ , где знаки \pm соответствуют положительному и отрицательному берегам γ^\pm по отношению к нормали ν .

Введем множество допустимых перемещений

$$K = \{v \in W : -[v]_\nu \leq 0 \text{ на } \gamma\},$$

где

$$W = \{v = (v_1, v_2) \in [H^1(\Omega_\gamma)]^2 : v = 0 \text{ на } \Gamma_0\}.$$

Вариационная постановка задачи (2.1) имеет вид

$$J^\lambda(v) \rightarrow \min, \quad v \in K,$$

где

$$J^\lambda(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma.$$

Решение u^λ задачи (2.2) удовлетворяет вариационному неравенству

$$u^\lambda \in K : \int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(u^\lambda) \varepsilon_{ij}(v - u^\lambda) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i (v_i - u_i^\lambda) d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i (v_i - u_i^\lambda) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

В [2] доказывается, что решения u^λ при $\lambda \rightarrow 0$ слабо сходятся в W к решению u задачи (1.2).

Лемма. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) = J(u).$$

Доказательство. Отметим, что функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_1} p_i v_i d\Gamma$$

является выпуклым и непрерывным в W функционалом. Имеем

$$J^\lambda(u^\lambda) = J(u^\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(u^\lambda) \varepsilon_{ij}(u^\lambda) d\Omega.$$

Так как $\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(u^\lambda) \varepsilon_{ij}(u^\lambda) d\Omega \geq 0$, то

$$\liminf_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) \geq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} J(u^\lambda) \geq J(u).$$

Последнее неравенство следует из слабой сходимости u^λ к u . С другой стороны, для $\lambda > 0$ и любого $v \in K_\omega$ справедливо

$$J^\lambda(u^\lambda) \leq J^\lambda(v) = J(v).$$

Поэтому имеем

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) \leq J^\lambda(u).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) \leq J^\lambda(u) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda),$$

то есть существует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} J^\lambda(u^\lambda) = J(u).$$

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Результаты разд. 2 дают основание представить решение упругой задачи с жестким включением как предел при $\lambda \rightarrow 0$ на области Ω_γ решений задач с трещиной вида (2.2).

Для задачи (2.2) с фиксированным λ составим двойственную задачу [10], [11]:

$$\underline{M}(l) - \sup, \quad l \in L_2(\gamma), \quad (3.1)$$

где

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in W} M(v, l) = \inf_{v \in W} \left\{ J^\lambda(v) + \frac{1}{2r} \int_\gamma [(l - r[v_v])^+]^2 - l^2 d\Gamma \right\},$$

и $(l - r[v_v])^+ \equiv \max\{0, l - r[v_v]\}$, $r > 0 - \text{const}$.

В [12] было доказано соотношение двойственности

$$\sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l) = \inf_{v \in K} J^\lambda(v).$$

Для решения двойственной задачи рассмотрен градиентный метод, порождающий следующий алгоритм Удзавы решения задачи (3.1).

Шаг 1. На начальном шаге $k = 0$ задается произвольная функция $l^0 \in L_2(\gamma)$.

Шаг 2. Для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ последовательно вычисляются (см. [13])

$$u^{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in W} \left\{ J^\lambda(v) + \frac{1}{2r} \int_\gamma [(l^k - r[v_v])^+]^2 - (l^k)^2 d\Gamma \right\}; \quad (3.2)$$

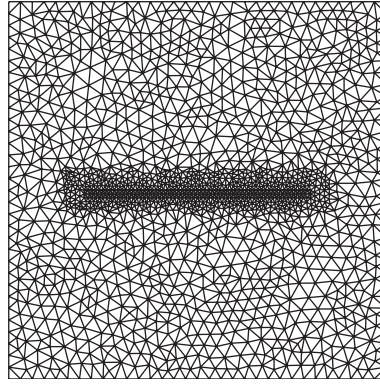
$$l^{k+1} = (l^k - r[u_v^{k+1}])^+. \quad (3.3)$$

Область Ω выбиралась в виде единичного квадрата с границей Γ , где включение занимает область $\omega = \{0.2 < x_1 < 0.8, 0.48 < x_2 < 0.5\}$ и трещина отслоения $\gamma = \{0.2 < x_1 < 0.8, x_2 = 0.5\}$.

Для численного решения задачи (3.2) воспользуемся методом конечных элементов. На фиг. 2 представлено разбиение области Ω с помощью триангуляции Делоне. В качестве базисных возьмем кусочно-линейные функции $\varphi_i(x, y)$ для P1-элементов ($i = \overline{1, N}$), где N – это количество узлов триангуляции области Ω .

Введем следующие обозначения: $h = 0.01$ – шаг сетки на γ , N_γ – количество узлов триангуляции на γ , W_h – линейная оболочка базисных функций $\varphi_i(x, y)$, $u_h = (u_1^h, u_2^h) \in W_h$ – конечно-элементное решение:

$$u_1^h(x, y) = \sum_{j=1}^N t_j \varphi_j(x, y), \quad u_2^h(x, y) = \sum_{j=N+1}^{2N} t_j \varphi_{j-N}(x, y), \quad \text{для } t_j \in R.$$



Фиг. 2. Триангуляция области Ω .

Так как Ω — многоугольник, обеспечено вложение $W_h \subset W$. Таким образом, заменим задачу (3.2) конечно-элементной задачей:

$$u^{k+1} = \operatorname{argmin}_{v \in W_h} M(v, l^k). \quad (3.4)$$

Для решения задачи (3.4) в конечно-элементном приближении аппроксимируем граничный интеграл по γ с помощью квадратурной формулы трапеций. Для узлов на нижнем берегу трещины делаем замену переменных: $t_j^- = t_j^+ + \theta_j$, где $\theta_j = -[t_j] = -(t_j^+ - t_j^-)$. Пусть $t = (t_1, t_2, \dots, \theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_{N_\gamma}}, \dots, t_{2N})$, тогда задача минимизации (3.4) сводится к нахождению оптимальных значений компонент вектора t . Так как конечномерный функционал в (3.4) является сильно выпуклым и непрерывно дифференцируемым функционалом, в [12] для этого используется метод покоординатного спуска.

Однако для задачи с жестким включением данный метод показал плохую сходимость. При уменьшении параметра λ растет число обусловленности матрицы жесткости, что влечет за собой большое количество итераций.

Для преодоления этого затруднения в работе был применен обобщенный метод Ньютона [14]–[16]. Пусть заданы матрица жесткости $A = (a_{ij}) \in R^{2N \times 2N}$ и вектор правой части F . Определим вектор $\alpha^k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_{N_\gamma}^k)$ — приближенное значение двойственной переменной l^k в узлах на трещине, $\theta = (\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_{N_\gamma}})$ и градиент конечномерного функционала $g(t)$:

$$g(t) = At + h(\alpha^k + r\theta)^+ - F,$$

где $(\alpha^k + r\theta)^+ \in R^{2N}$ — вектор с отличными от нуля компонентами только в узлах сетки, лежащих на трещине γ .

Тогда обобщенный метод Ньютона будет выглядеть следующим образом.

1. На начальном шаге задаем t^0 .
2. Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ вычисляем

$$t^{n+1} = t^n - (\partial g(t^n))^{-1} \cdot g(t^n).$$

3. Проверяем

$$\|t^{n+1} - t^n\|_\infty < \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = 10^{-12}.$$

Здесь $\partial g(t)$ — обобщенный Якобиан функции $g(t)$, который определяется в виде

$$\partial g(t) = A + D,$$

$$D = \operatorname{diag}(0, 0, \dots, d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_{N_\gamma}}, \dots, 0),$$

Таблица. Результаты счета метода Удзавы

λ	Метод покоординатного спуска*		Обобщенный метод Ньютона**		Δ $\ \theta^{**} - \theta^*\ _{\infty}$
	Число итераций по t	Число итераций по α	Число итераций по t	Число итераций по α	
0.1	61851	5	4	5	1×10^{-10}
0.01	136054	8	5	8	2.9×10^{-10}
0.001	916501	22	5	22	2.3×10^{-9}

$$d_{i_j} = \begin{cases} rh, & \text{если } \alpha_j^k + r\theta_j > 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На шаге (3.3) вычисляем компоненты двойственной переменной по формуле

$$\alpha_i^{k+1} = (\alpha_i^k + r\theta_i^{k+1})^+, \quad i = \overline{1, N_\gamma}.$$

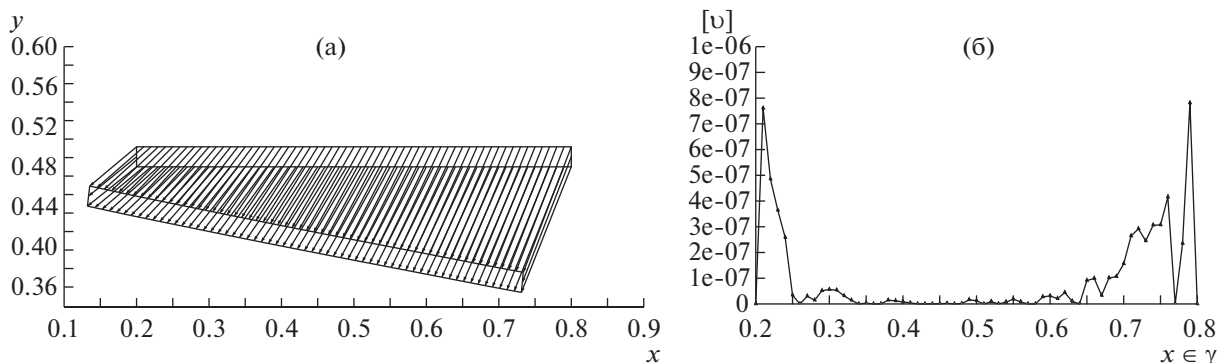
Для метода Удзавы условие останова имеет вид

$$\|\alpha^{k+1} - \alpha^k\|_{\infty} < \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha = 10^{-8}.$$

Приведем результаты численного решения поставленной задачи. Значения параметров брались следующими: $f = (f_1, f_2) = (0, 0)$, поверхностное усилие с правой $p_1|_{\Gamma_1} = g(1 - 2|x_2|)$, $p_2|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, верхней $p_1|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1} = -1$ МПа и нижней $p_1|_{\Gamma_1} = 0$ МПа, $p_2|_{\Gamma_1} = 1$ МПа сторон, модуль упругости Юнга $E = 73000$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$, константа $r = 10^{10}$, $g = 27$ МПа.

Для выполнения расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП “Центр данных ДВО РАН” [17]. Численные эксперименты были проведены на гибридном вычислительном кластере на базе архитектуры OpenPOWER. Вариант с использованием метода покоординатного спуска считался на процессоре IBM POWER8 4.023 GHz, так как данный метод плохо поддается распараллеливанию. В свою очередь обобщенный метод Ньютона легко и хорошо распараллеливается, поэтому расчеты для него проводились на NVIDIA Tesla P100 GPU с использованием библиотеки cuBLAS. Это дало существенный прирост в скорости выполнения счета.

В таблице представлены результаты численного решения двойственной задачи с использованием разных методов минимизации на шаге (3.2). Из нее видно, что обобщенный метод Ньютона сходится за небольшое количество итераций, причем разница между полученными решениями оказалась порядка 10^{-9} , 10^{-10} . Это говорит о близости полученных решений. Однако, в отличие от метода покоординатного спуска, для обобщенного метода Ньютона не удастся показать теоретическую сходимость к решению рассматриваемой задачи.

Фиг. 3. Перемещение ω и $[u]$ при $\lambda = 0.001$.

На фиг. 3 представлены перемещения $u \times 1000$ включения ω и скачок $[u]$ на трещине при $\lambda = 0.001$.

На фиг. 3 видно, что с уменьшением параметра λ область ω ведет себя как жесткое включение. Также скачок на трещине везде неотрицательный, т.е. не происходит взаимное проникание берегов трещины друг в друга.

Численные результаты показали, что предложенный метод эффективен при решении задач теории упругости с жестким включением. Отметим, что для решения методом Удзавы двойственной задачи (3.1) в обеих задачах потребовалось сделать небольшое число шагов (3.3). Данное обстоятельство можно объяснить хорошими дифференциальными свойствами двойственного функционала $\underline{M}(I)$ (см. [12, теор. 4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
2. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
3. Khudnev A.M., Kovtunenkov V.A. Analysis of crack in solids. Southhampton-Boston: WIT Press, 2000.
4. Hintermuller M., Kovtunenkov V.A., Kunisch K. The primal-dual active set method for a crack problem with non-penetration // IMA J. Appl. Math. 2004. Т. 69. № 1. С. 1–26.
5. Рудой Е.М. Метод декомпозиции области для модельной задачи теории трещин с возможным контактом берегов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. С. 305–316.
6. Рудой Е.М. Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журнал индустр. матем. 2016. Т. 19. № 2. С. 74–87.
7. Неустроева Н.В. Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину на границе жесткого включения // Сиб. журнал индустр. матем. 2015. Т. 18. № 2. С. 74–84.
8. Фанкина И.В. Контактная задача для упругой пластины с тонким жестким включением // Сиб. журнал индустр. матем. 2016. Т. 19. № 3. С. 90–98.
9. Lazarev N.P. An Equilibrium Problem for the Timoshenko-Type Plate Containing a Crack on the Boundary of a Rigid Inclusion // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2013. V. 6. № 1. P. 53–62.
10. Вихтенко Э.М., Максимов Н.Н., Намм Р.В. Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17. № 1. С. 43–52.
11. Вихтенко Э.М., Намм Р.В. О методе двойственности для решения модельной задачи с трещиной // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 36–43.
12. Намм Р.В., Цой Г.И. Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной // Сиб. журнал вычисл. матем. 2017. Т. 20. № 1. С. 47–58.
13. Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В. Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа // Дальневосточный матем. журн. 2014. Т. 14. № 1. С. 6–17.
14. Mangasarian O.L. A Newton Method for Linear Programming // J. Optimizat. Theory and Appl. 2004. V. 121. P. 1–18.
15. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н. Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1564–1573.
16. Гаранжа В.А., Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Нгуен М.Х. Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 8. С. 1369–1384.
17. Сорокин А.А., Макогонов С.В., Королев С.П. Информационная инфраструктура для коллективной работы ученых Дальнего Востока России // Научно-техническая информация. Серия 1: Организация и методика информационной работы. 2017. № 12. С. 14–16.