ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 4, с. 549–565

УДК 519.63

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ИНДЕКСА $(k, 0)$

А. К. Свинин[1,*], С. В. Свинина[1,*]

([1] 664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, ИДСТУ СО РАН, Россия)

**e-mail: gaidamak@icc.ru; svinin@icc.ru*

Поступила в редакцию 19.10.2017 г.
Переработанный вариант 14.11.2018 г.
Принята к публикации 14.11.2018 г.

Рассматривается квазилинейная дифференциально-алгебраическая система уравнений в частных производных индекса $(k, 0)$. Для численного решения такой системы построена сплайн-коллокационная разностная схема с расщепленным матричным пучком. Разностная схема имеет высокую точность, совпадающую с наименьшим порядком сплайна, аппроксимирующего искомую функцию. Представлены результаты численных расчетов. Библ. 11. Табл. 1.

Ключевые слова: сплайн-коллокационная схема, дифференциально-алгебраические уравнения, расщепленный пучок.

DOI: 10.1134/S004446691904015X

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] говорилось о проблемах, возникающих при численном решении дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных, имеющих индекс выше единицы. Под индексом системы в алгебраическом смысле понимается максимальная в области определения степень элементарных делителей, соответствующих нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена матричного пучка, построенного по коэффициентам дифференциально-алгебраической системы. Напомним, что при численном решении линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных частного вида классическими методами возникают “пограничные слои ошибок”, а при решении линейных систем общего вида или более того квазилинейных систем дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных, применение классических методов вовсе невозможно. С целью решения этих проблем в [3] для численного решения линейных систем высокого индекса был предложен итерационный алгоритм. Он состоит в следующем. Коэффициенты системы специальным образом расщепляются, а затем к расщепленной системе применяется метод последовательных приближений. Возникающая на каждом итерационном шаге начально-краевая задача аппроксимируется устойчивой неявной сплайн-коллокационной разностной схемой [4]. Построенная таким образом неявная итерационная сплайн-коллокационная разностная схема является эффективной при определенных условиях и применяется для численного решения линейных систем. При ее реализации “пограничные слои ошибок” отсутствуют. Применить этот подход для численного решения квазилинейных дифференциально-алгебраических систем высокого индекса не представляется возможным, потому что подстановка числового ряда вместо искомой функции в коэффициенты квазилинейной системы не эффективна. В настоящей работе предлагается новый алгоритм, который также основан на расщеплении матричного пучка системы и полностью решает проблему численного решения квазилинейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных индекса $(k, 0)$. Предлагаемый алгоритм состоит в следующем. Выполняется расщепление матричного пучка, построенного по коэффициентам дифференциально-алгебраической системы, на два пучка: один из них имеет только простые элементарные делители, соответствующие нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена, а другой не имеет регулярного ядра. В соответствующей расщепленной системе производные, относящиеся к регулярному пучку, аппроксимируются сплайном произвольного порядка, а производные, относящиеся к сингулярному пучку аппроксимируются сплайном меньшего порядка по каждой переменной. В результате строится нелинейная разностная схема, для решения которой применяется итерационный метод. Такая разностная схема в настоящей работе называется сплайн-коллокационной разностной схемой с расщепленным пучком. Она является достаточно эффективной и дает высокую точность во всей области решения.

Цель настоящей работы состоит в построении сплайн-коллокационной разностной схемы с расщепленным пучком, доказательстве существования ее решения и обосновании ее устойчивости.

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе записана начально-краевая задача для квазилинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных. Во втором разделе построена сплайн-коллокационная разностная схема с расщепленным матричным пучком. В этом же разделе разностная схема записана в нормальной форме матрично-операторного уравнения. В третьем разделе доказана основная теорема о существовании решения разностной схемы и ее устойчивости. В четвертом разделе на одном тестовом примере с известным точным решением продемонстрирована эффективность предложенного в работе численного алгоритма. Работа снабжена необходимым списком цитируемой литературы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим квазилинейную дифференциально-алгебраическую систему уравнений в частных производных следующего вида:

$$A(x,t,u)\partial_t u + B(x,t,u)\partial_x u = F(x,t,u), \tag{1}$$

в которой $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$ — заданные квадратные матрицы порядка n тождественно-вырожденные во всей области определения, то есть $\det A(x,t,u) = 0$ и $\det B(x,t,u) = 0$ $\forall (x,t,u) \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U} = \{(x,t,u) | (x,t) \in U, \|u(x,t)\|_{C(U)} < \mathfrak{Q}\}$, $\mathfrak{Q}$ — некоторая постоянная величина, $U = \{(x,t) | x \in [x_0; X], t \in [t_0; T]\}$; $F(x,t,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция; $u \equiv u(x,t)$ — искомая n-мерная вектор-функция. Предполагается, что элементы матриц $A(x,t,u)$, $B(x,t,u)$ и вектора $F(x,t,u)$ принадлежат пространству $C^1(\mathcal{U})$.

Пусть для системы (2) заданы начально-краевые условия

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad u(x,t_0) = \phi(x), \tag{2}$$

где $\psi(t)$ и $\phi(x)$ — известные n-мерные вектор-функции, для которых в точке (x_0,t_0) выполнены условия согласования: $\psi(t_0) = \phi(x_0)$, $\psi'(t_0) = \phi'(x_0)$, $A(x_0,t_0,u(x_0,t_0))\psi'(t_0) + B(x_0,t_0,u(x_0,t_0))\phi'(x_0) = F(x_0,t_0,u(x_0,t_0))$.

Отметим, что если в каждой точке области $\mathcal{U}$ пучок матриц $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u) = A(x,t,u) + \lambda B(x,t,u)$, построенный по коэффициентам системы (1), является регулярным, то его индекс или индекс системы (1) определяется парой чисел $(k,0)$, где k — максимальная степень элементарных делителей пучка $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)$, соответствующих нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена $\det\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)$ во всей области $\mathcal{U}$. Второй параметр индекса равен нулю, поскольку пучок $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)$ не содержит сингулярной составляющей [3]. Сформулируем достаточные условия, при выполнении которых пучок $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)$ имеет индекс $(k,0)$.

Теорема 1 (см. [5]). *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *все корни характеристического многочлена* $\det(A(x) + \lambda B(x))$, *где* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \bar{U}$, $\bar{U}$ — *замыкание некоторой области, содержащейся в* $\mathbb{R}^m$, *являются вещественными и имеют постоянную кратность в области определения* $\bar{U}$;

2) *старший коэффициент многочлена* $\det(A(x) + \lambda B(x))$ *относительно параметра* λ *не обращается в нуль ни в одной точке* $\bar{U}$;

3) *ранги матриц* $A(x)$ *и* $B(x)$ *являются постоянными в каждой точке области* $\bar{U}$ *и меньше размерности* n.

Тогда пучок $A(x)+\lambda B(x)$ s*-гладко эквивалентен пучку следующего канонического вида*:

$$\operatorname{diag}\{E_d, M(x), E_p\}+\lambda \operatorname{diag}\{J(x), E_l, N(x)\}, \tag{3}$$

где E_d — *единичная матрица порядка* d; $M(x)$ *и* $N(x)$ — *верхние (правые) треугольные блоки с нулевой диагональю порядка* l *и* p *соответственно*; $\mathbb{O}_l$ — *квадратная нулевая матрица порядка* l; $J(x)=\operatorname{diag}\{J_1(x), J_2(x),\ldots, J_{\tilde{s}}(x)\}$ — *блочно-диагональная матрица порядка* d, *в которой* $J_i(x)$, $i=1,2,\ldots,\tilde{s}$ — *невырожденные матрицы порядков* p_i, *соответственно* $d=\sum_{\nu=1}^{\tilde{s}} p_\nu$; *каждый блок* $J_i(x)$ *имеет единственное собственное значение* $-1/\lambda_i(x)$ *в области определения* $\bar{U}$; $\lambda_i(x)$ — *собственные значения характеристического многочлена* $\det(A(x)+\lambda B(x))$, *не обращающиеся в нуль в области* $\bar{U}$; $p=n-d-l$. *Из теоремы* 1 *следует, что* $M(x)$ *и* $N(x)$ *в* (3) *являются нильпотентными матрицами в области определения* $\bar{U}$. *Пусть* $\operatorname{ind} M(x)=k_1$ *и* $\operatorname{ind} N(x)=k_2$ *в области* $\bar{U}$, *то есть* $k_1=\min\{\bar{k} : M(x)^{\bar{k}}=0\ \forall (x)\in \bar{U}\}$. *Аналогично определяется* k_2. *Будем предполагать, что для пучка* $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)$ *системы* (1) *выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда* $\operatorname{ind}\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)=(k,0)$, *где* $k=\max\{k_1,k_2\}$ *и соответственно индекс системы* (1) *также равен* $(k,0)$.

Перейдем к построению сплайн-коллокационной разностной схемы.

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В этом разделе построим сплайн-коллокационную разностную схему с расщепленным пучком и преобразуем ее к матрично-операторному уравнению в нормальной форме.

В силу сделанных в предыдущем разделе предположений существуют невырожденные в области $\mathcal{U}$ матрицы $P(x,t,u)$ и $Q(x,t,u)$, которые преобразуют пучок $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)$ к каноническому виду (3), то есть

$$P(x,t,u)\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)Q(x,t,u)=\operatorname{diag}\{E_d, M(x,t,u), E_p\}+\lambda\operatorname{diag}\{J(x,t,u), E_l, N(x,t,u)\}. \tag{4}$$

Тогда пучок $\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)$ можно расщепить на два пучка

$$\mathcal{P}(\lambda,x,t,u)=\mathcal{P}_1(\lambda,x,t,u)+\mathcal{P}_2(\lambda,x,t,u), \tag{5}$$

где

$$\mathcal{P}_1(\lambda,x,t,u)=A_1(x,t,u)+\lambda B_1(x,t,u),\qquad \mathcal{P}_2(\lambda,x,t,u)=A_2(x,t,u)+\lambda B_2(x,t,u),$$

и

$$P(x,t,u)\mathcal{P}_1(\lambda,x,t,u)Q(x,t,u)=\operatorname{diag}\{E_d,\mathbb{O}_l,E_p\}+\lambda\operatorname{diag}\{J(x,t,u),E_l,\mathbb{O}_p\},$$

$$P(x,t,u)\mathcal{P}_2(\lambda,x,t,u)Q(x,t,u)=\operatorname{diag}\{\mathbb{O}_d,M(x,t,u),\mathbb{O}_p\}+\lambda\operatorname{diag}\{\mathbb{O}_d,\mathbb{O}_l,N(x,t,u)\}.$$

С учетом (5) запишем систему (1) в расщепленном виде

$$A_1(x,t,u)\partial_t u+B_1(x,t,u)\partial_x u=F(x,t,u)-A_2(x,t,u)\partial_t u-B_2(x,t,u)\partial_x u. \tag{6}$$

Построим в прямоугольной области U равномерную сетку U_Δ с шагами h и τ соответственно по пространственной и временной переменным

$$U_\Delta=\{x_i=x_0+ih,\ t_j=t_0+j\tau,\ i=0,1,\ldots,n_1,\ j=0,1,\ldots,n_2\}.$$

В области $\mathcal{U}$ будем иметь соответствующее сеточное пространство

$$\mathcal{U}_\Delta=\{x_i=x_0+ih,\ t_j=t_0+j\tau,\ u_{i,j}=u(x_i,t_j),\ i=0,1,\ldots,n_1,\ j=0,1,\ldots,n_2\}.$$

Как и в работах [3], [4], будем искать решение $u(x,t)$ задачи (6), (2) в виде сплайна $\delta^{m_1,m_2}(x,t)\in C^1(\mathcal{U})$ дефекта 1 со старшими степенями, равными m_1 и m_2 по каждой независимой переменной соответственно, значения которого в узлах сетки U_Δ совпадают со значениями искомой функции $u(x,t)$. В каждом прямоугольнике $U_{i,j}^{m_1,m_2}=[x_i,x_i+m_1h]\times[t_j,t_j+m_2\tau]$ сетки U_Δ, содержащем $(m_1+1)(m_2+1)$ узлов, где $m_1\le n_1$, $m_2\le n_2$, сплайн $\delta^{m_1,m_2}(x,t)$ представляем в виде полинома Ньютона, записанного для равноотстоящих узлов. Поэтому для аппроксимации производных $\partial_t u(x,t)$ и $\partial_x u(x,t)$ на слоях $x = x_i$ и $t = t_j$ используем безразностные формулы численного дифференцирования для равноотстоящих узлов (см. [6, с. 161]). Для производных в левой части системы (6) используем аппроксимации производных, записанные по значениям искомой функции в узловых точках области $U_{i,j}^{m_1,m_2}$ (см. [3], [4]), а для аппроксимации производных в правой части системы (6) используем значения искомой функции только в узловых точках внутренней области $\tilde{U}_{i,j}^{m_1,m_2} = [x_i + h, x_i + m_1 h] \times [t_j + \tau, t_j + m_2\tau] \subseteq U_{i,j}^{m_1,m_2}$.

Запишем систему (6) в узловых точках области $\tilde{U}_{i,j}^{m_1,m_2}$, подставим в нее значения искомой функции $u(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau)$ и аппроксимации ее производных в этих точках. В результате получим нелинейную разностную схему

$$
\begin{gathered}
A_{1,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}u_{i+l_1,j+l_3} + B_{1,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1}\overline{\gamma}_{l_1,l_3}u_{i+l_3,j+l_2} = F_{i+l_1,j+l_2} - \\
- A_{2,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2-1}\beta_{l_2-1,l_3}u_{i+l_1,j+l_3+1} - B_{2,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1-1}\overline{\beta}_{l_1-1,l_3}u_{i+l_3+1,j+l_2}, \\
u_{0,j} = \psi_j, u_{i,0} = \phi_i, \quad i = 0,1,\ldots,n_1 - 1, \quad j = 0,1,\ldots,n_2 - 1,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

где коэффициенты γ_{l_2,l_3}, $\overline{\gamma}_{l_1,l_3}$, β_{l_2,l_3} и $\overline{\beta}_{l_1,l_3}$ вычисляются по известным формулам (см. [6, с. 161]):

$$
\gamma_{l_2,l_3} = H(m,s,l_3)\big|_{m=m_2,s=l_2}, \quad \overline{\gamma}_{l_1,l_3} = H(m,s,l_3)\big|_{m=m_1,s=l_1},
$$

$$
\beta_{l_2,l_3} = H(m,s,l_3)\big|_{m=m_2-1,s=l_2}, \quad \overline{\beta}_{l_1,l_3} = H(m,s,l_3)\big|_{m=m_1-1,s=l_1},
$$

$$
H(m,s,l_3) = (-1)^{m+l_3}\frac{C_m^{l_3}}{m!}\frac{d}{ds}\left(\prod_{\nu=0}^{m}(s-\nu)/(s-l_3)\right),
$$

где $C_m^{l_3}$ – биномиальные коэффициенты. Коэффициенты в (7) имеют следующие сокращенные обозначения:

$$
A_{s,i+l_1,j+l_2} = A(s, x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, u_{i+l_1,j+l_2}), \quad B_{s,i+l_1,j+l_2} = B(s, x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, u_{i+l_1,j+l_2}),
$$

$$
F_{i+l_1,j+l_2} = F(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau, u_{i+l_1,j+l_2}), \quad u_{i+l_1,j+l_2} = u(x_i + l_1 h, t_j + l_2\tau), \quad \phi_i = \phi(x_i), \quad \psi_j = \psi(t_j),
$$

где $s = 1, 2$. Разностная схема (7) в каждом узле (x_i, t_j) сетки U_Δ представляет собой систему нелинейных уравнений порядка $\tilde{n} = m_1 m_2 n$ с искомым вектором

$$
\overline{u}_{i+1,j+1} = (u_{i+1,j+1},\ldots,u_{i+1,j+m_2},u_{i+2,j+1},\ldots,u_{i+2,j+m_2},\ldots,u_{i+m_1,j+1},\ldots,u_{i+m_1,j+m_2})^{\mathrm{T}}.
$$

Чтобы не возникало путаницы в обозначениях, решение системы (7) в узлах (x_{i+1}, t_{j+1}) сетки U_Δ будем обозначать $v_{i+1,j+1}$, а значения искомой функции $u(x,t)$ в этих же узлах $u_{i+1,j+1} = u(x_{i+1}, t_{j+1})$. Согласно этой договоренности перепишем систему (7) следующим образом:

$$
\begin{gathered}
A_{1,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}v_{i+l_1,j+l_3} + B_{1,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1}\overline{\gamma}_{l_1,l_3}v_{i+l_3,j+l_2} = F_{i+l_1,j+l_2} - \\
- A_{2,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{\tau}\sum_{l_3=0}^{m_2-1}\beta_{l_2-1,l_3}v_{i+l_1,j+l_3+1} - B_{2,i+l_1,j+l_2}\frac{1}{h}\sum_{l_3=0}^{m_1-1}\overline{\beta}_{l_1-1,l_3}v_{i+l_3+1,j+l_2}, \\
v_{0,j} = \psi_j, \quad v_{i,0} = \phi_i, \quad i = 0,1,\ldots,n_1 - 1, \quad j = 0,1,\ldots,n_2 - 1,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где

$$
\overline{v}_{i+1,j+1} = (v_{i+1,j+1},\ldots,v_{i+1,j+m_2},v_{i+2,j+1},\ldots,v_{i+2,j+m_2},\ldots,v_{i+m_1,j+1},\ldots,v_{i+m_1,j+m_2})^{\mathrm{T}}.
$$

Разностную схему (8) назовем нелинейной сплайн-коллокационной разностной схемой с расщеплением. Система (8) представляет собой целый набор нелинейных разностных схем, порядки аппроксимации которых определяются порядками сплайнов и составляют величину, равную $O(h^{m_1-1}) + O(\tau^{m_2-1})$.

Далее мы хотим записать разностную схему (8) в нормальной форме матрично-операторного уравнения. Для этого рассмотрим функцию $F(x,t,u)$. Представим ее в следующем виде: $F(x,t,u) = P^{-1}(x,t,u)\tilde{F}(x,t,u)$, где $P(x,t,u)$ – невырожденная в $\mathcal{U}$ из (4), а $\tilde{F}(x,t,u)$ – некоторая неизвестная n-мерная вектор-функция. Имеем

$$\tilde{F}(x,t,u) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{F}(x,t,\xi u)}{\partial \xi} d\xi + \tilde{F}(x,t,0) = u\int_0^1 \frac{\partial \tilde{F}(x,t,\xi u)}{\partial \xi u} d\xi + \tilde{F}(x,t,0),$$

где $\partial \tilde{F}(x,t,\xi u)/\partial \xi u = (\partial \tilde{F}_{s_1}(x,t,\xi u)/\partial \xi u_{s_2})$ – матрица Якоби, $s_1, s_2 = 1,2,\ldots,n$. Обозначим $C(x,t,u) = -\int_0^1 \partial \tilde{F}(x,t,\xi u)/\partial \xi u d\xi$, тогда

$$F(x,t,u) = -P^{-1}(x,t,u)(C(x,t,u)u + \tilde{F}(x,t,0)). \tag{9}$$

Умножим (8) на τ. Тогда в силу (9) получим следующую систему:

$$\begin{gathered} A_{1,i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=1}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}v_{i+l_1,j+l_3} + rB_{1,i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=1}^{m_1}\overline{\gamma}_{l_1,l_3}v_{i+l_3,j+l_2} + \tau P^{-1}_{i+l_1,j+l_2}C_{i+l_1,j+l_2}v_{i+l_1,j+l_2} = \\ = \tau P^{-1}_{i+l_1,j+l_2}\tilde{F}_{i+l_1,j+l_2} - A_{1,i+l_1,j+l_2}\gamma_{l_2,0}v_{i+l_1,j} - rB_{1,i+l_1,j+l_2}\overline{\gamma}_{l_1,0}v_{i,j+l_2} - \\ - A_{2,i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=0}^{m_2-1}\beta_{l_2-1,l_3}v_{i+l_1,j+l_3+1} - rB_{2,i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=0}^{m_1-1}\overline{\beta}_{l_1-1,l_3}v_{i+l_3+1,j+l_2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Составим матрицу

$$\tilde{P}_{i+1,j+1} = \operatorname{diag}\{P_{i+1,j+1},\ldots,P_{i+1,j+m_2},P_{i+2,j+1},\ldots,P_{i+2,j+m_2},\ldots,P_{i+m_1,j+1},\ldots,P_{i+m_1,j+m_2}\}.$$

Умножим систему (10) слева на матрицу $\tilde{P}_{i+1,j+1}$ и выполним замену переменной $v_{i,j} = Q_{i,j}w_{i,j}$, где $w_{i,j} = w(x_i,t_j)$ и $Q_{i,j} = Q(x_i,t_j,u_{i,j})$ – матрица из (4). В результате получим систему

$$\begin{gathered} P_{i+l_1,j+l_2}\left\{A_{1,i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=1}^{m_2}\gamma_{l_2,l_3}Q_{i+l_1,j+l_3}w_{i+l_1,j+l_3} + rB_{1,i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=1}^{m_1}\overline{\gamma}_{l_1,l_3}Q_{i+l_3,j+l_2}w_{i+l_3,j+l_2}\right\} + \tau\tilde{C}_{i+l_1,j+l_2}w_{i+l_1,j+l_2} = \\ = \tau\tilde{F}_{i+l_1,j+l_2} - P_{i+l_1,j+l_2}\Big\{A_{1,i+l_1,j+l_2}\gamma_{l_2,0}Q_{i+l_1,j}w_{i+l_1,j} + rB_{1,i+l_1,j+l_2}\overline{\gamma}_{l_1,0}Q_{i,j+l_2}w_{i,j+l_2} + \\ + A_{2,i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=0}^{m_2-1}\beta_{l_2-1,l_3}Q_{i+l_1,j+l_3+1}w_{i+l_1,j+l_3+1} + rB_{2,i+l_1,j+l_2}\sum_{l_3=0}^{m_1-1}\overline{\beta}_{l_1-1,l_3}Q_{i+l_3+1,j+l_2}w_{i+l_3+1,j+l_2}\Big\}, \\ w_{0,j} = Q^{-1}_{0,j}\psi_j, \quad w_{i,0} = Q^{-1}_{i,0}\phi_i, \end{gathered} \tag{11}$$

где $i = 0,1,\ldots,n_1-1,\ j = 0,1,\ldots,n_2-1,\ l_1 = 1,2,\ldots,m_1,\ l_2 = 1,2,\ldots,m_2$ с искомым вектором

$$\overline{w}_{i+1,j+1} = (w_{i+1,j+1},\ldots,w_{i+1,j+m_2},w_{i+2,j+1},\ldots,w_{i+2,j+m_2},\ldots,w_{i+m_1,j+1},\ldots,w_{i+m_1,j+m_2})^{\mathrm{т}}.$$

Используя формулу Тейлора, представим матрицу $Q_{i+l_1,j+l_2}$ следующим образом:

$$Q_{i+l_1,j+l_2} = Q_{i+\tilde{l}_1,j+\tilde{l}_2} + \sigma^1_{i+l_1,j+l_2}\chi_1 h + \sigma^2_{i+l_1,j+l_2}\chi_2\tau, \quad \tilde{l}_1 = 1,2,\ldots,m_1, \quad \tilde{l}_2 = 1,2,\ldots,m_2, \tag{12}$$

где

$$\sigma^1_{i+l_1,j+l_2} = \partial_x Q(x_{i+l_1} + \theta h, t_{j+l_2}, w(x_{i+l_1} + \theta h, t_{j+l_2})), \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$\sigma^2_{i+l_1,j+l_2} = \partial_t Q(x_{i+l_1}, t_{j+l_2} + \theta\tau, w(x_{i+l_1}, t_{j+l_2} + \theta\tau)).$$

В силу принадлежности элементов матриц $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$ пространству $C^1(\mathcal{U})$, элементы матриц $\partial_x Q$ и $\partial_t Q$, следуя [7]–[9], непрерывны в области $\mathcal{U}$. Перепишем систему (11), используя представление матрицы $Q_{i+l_1,j+l_2}$ из (12), а также аналогичное разложение по формуле Тейлора матрицы $J_{i+l_1,j+l_2}$. Получим систему

$$(\hat{\Omega}_{i+1,j+1} + \tau\sigma_1)\bar{w}_{i+1,j+1} = \tau\tilde{f}_{i+1,j+1} - (\hat{\mathcal{A}} + \tau\sigma_1)\bar{w}_{i+1,j} - r(\hat{\mathcal{B}}_{i+1,j+1} + h\sigma_3)\bar{w}_{i,j+1}, \tag{13}$$

где σ_ν – ограниченные в области $\mathcal{U}$ матрицы, полученные в результате разложения матриц $Q(x,t,u)$ и $J(x,t,u)$ по формуле Тейлора. В (13) матрицы $\hat{\Omega}_{i+1,j+1}$, $\hat{\mathcal{A}}$, $\hat{\mathcal{B}}_{i+1,j+1}$ и вектор $\tilde{f}_{i+1,j+1}$ имеют вид:

$$\hat{\Omega}_{i+1,j+1} = E_{m_1} \otimes \gamma_{m_2} \otimes \operatorname{diag}\{E_d, \mathbb{O}_l, E_p\} + r\bar{\gamma}_{m_1} \otimes E_{m_2} \otimes \operatorname{diag}\{J_{i+1,j+1}, E_l, \mathbb{O}_p\} +$$
$$+ E_{m_1} \otimes \beta_{m_2} \otimes \operatorname{diag}\{\mathbb{O}_d, M_{i+1,j+1}, \mathbb{O}_p\} + r\bar{\beta}_{m_1} \otimes E_{m_2} \otimes \operatorname{diag}\{\mathbb{O}_d, \mathbb{O}_l, N_{i+1,j+1}\},$$

$$\hat{\mathcal{A}} = E_{m_1} \otimes \gamma^0_{m_2} \otimes \operatorname{diag}\{E_d, \mathbb{O}_l, E_p\}, \quad \hat{\mathcal{B}}_{i+1,j+1} = \bar{\gamma}^0_{m_1} \otimes E_{m_2} \otimes \operatorname{diag}\{J_{i+1,j+1}, E_l, \mathbb{O}_p\}$$

и $\quad \tilde{f}_{i+1,j+1} = (\tilde{F}_{i+1,j+1}, \ldots, \tilde{F}_{i+1,j+m_2}, \tilde{F}_{i+2,j+1}, \ldots, \tilde{F}_{i+2,j+m_2}, \ldots, \tilde{F}_{i+m_1,j+1}, \ldots, \tilde{F}_{i+m_1,j+m_2})^{\text{т}}.$

Далее, разобьем каждую блочную компоненту $w_{i+1,j+1}$ вектора $\bar{w}_{i+1,j+1}$ на три блока $w_{i+1,j+1} = (w^1_{i+1,j+1}, w^2_{i+1,j+1}, w^3_{i+1,j+1})^{\text{т}}$ размеров d, l и p соответственно. Пусть T – матрица, которая при умножении на вектор $\bar{w}_{i+1,j+1}$ выполняет перестановку его элементов (см. [4]), то есть $T\bar{w}_{i+1,j+1} = (\bar{w}^1_{i+1,j+1}, \bar{w}^2_{i+1,j+1}, \bar{w}^3_{i+1,j+1})^{\text{т}}$, где блоки $\bar{w}^s_{i+1,j+1}$ имеют вид $\bar{w}^s_{i+1,j+1} = (w^s_{i+1,j+1}, \ldots, w^s_{i+1,j+m_2}, w^s_{i+2,j+1}, \ldots, w^s_{i+2,j+m_2}, \ldots, w^s_{i+m_1,j+1}, \ldots, w^s_{i+m_1,j+m_2})^{\text{т}}$. Матрица T осуществляет следующие преобразования:

$$T\hat{\Omega}_{i+1,j+1}T^{\text{т}} = \bar{\Omega}_{i+1,j+1}, \quad T\hat{\mathcal{A}}T^{\text{т}} = \bar{\mathcal{A}}, \quad T\hat{\mathcal{B}}_{i+1,j+1}T^{\text{т}} = \bar{\mathcal{B}}_{i+1,j+1}, \tag{14}$$

где матрицы

$$\bar{\Omega}_{i+1,j+1} = \operatorname{diag}\{\Omega^1_{i+1,j+1}, \Omega^2_{i+1,j+1}, \Omega^3_{i+1,j+1}\}, \quad \bar{\mathcal{A}} = \operatorname{diag}\{\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3\} \quad \text{и}$$
$$\bar{\mathcal{B}}_{i+1,j+1} = \operatorname{diag}\{\mathcal{B}^1_{i+1,j+1}, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3\}$$

имеют следующие блоки:

$$\Omega^1_{i+1,j+1} = E_{m_1} \otimes \gamma_{m_2} \otimes E_d + r\bar{\gamma}_{m_1} \otimes E_{m_2} \otimes J_{i+1,j+1}, \Omega^2_{i+1,j+1} = r\bar{\gamma}_{m_1} \otimes E_{m_2 l} + E_{m_1} \otimes \beta_{m_2} \otimes M_{i+1,j+1},$$
$$\Omega^3_{i+1,j+1} = E_{m_1} \otimes \gamma_{m_2} \otimes E_p + r\bar{\beta}_{m_1} \otimes E_{m_2} \otimes N_{i+1,j+1},$$
$$\mathcal{A}^1 = E_{m_1} \otimes \gamma^0_{m_2} \otimes E_d, \quad \mathcal{A}^2 = \mathbb{O}_{m_1 m_2 l}, \quad \mathcal{A}^3 = E_{m_1} \otimes \gamma^0_{m_2} \otimes E_p,$$
$$\mathcal{B}^1_{i+1,j+1} = \bar{\gamma}^0_{m_1} \otimes E_{m_2} \otimes J_{i+1,j+1}, \quad \mathcal{B}^2 = \bar{\gamma}^0_{m_1} \otimes E_{m_2} \otimes E_l, \quad \mathcal{B}^3 = \mathbb{O}_{m_1 m_2 p}.$$

Умножим (13) слева на матрицу T и выполним замену переменной $\bar{w}_{i+1,j+1} = T^{\text{т}} z_{i+1,j+1}$, где $z_{i+1,j+1}$ – неизвестный вектор. Тогда система (13) с учетом равенств (14) примет вид

$$\Omega_{i+1,j+1} z_{i+1,j+1} = q(z_{i+1,j+1}), \tag{15}$$

где $\Omega_{i+1,j+1} = \bar{\Omega}_{i+1,j+1} + \tau\tilde{\sigma}_1$ и $q(z_{i+1,j+1}) = \tau T\tilde{f}_{i+1,j+1} - (\bar{\mathcal{A}} + \tau\sigma_2)z_{i+1,j} - r(\bar{B}_{i+1,j+1} + h\tilde{\sigma}_3)z_{i,j+1}$, $\tilde{\sigma}_\nu = T\sigma_\nu$. Предположим, что в каждом узле сетки $\mathcal{U}_\Delta$ выполняются условия (12) леммы 1 из работы [4]. Тогда в силу леммы 1 из [4] и теоремы о спектральном разложении функции от матрицы в ряд (см. [10, теорема 5.6.3]), матрица $\Omega_{i+1,j+1}$ является невырожденной в области $\mathcal{U}_\Delta$. Умножим систему (15) слева на матрицу $\Omega^{-1}_{i+1,j+1}$ и после всех необходимых преобразований, аналогичных преобразованиям из [4], перейдем к системе в расщепленной по блочным компонентам форме

$$\bar{w}^s_{i+1,j+1} = \tau g^s_{i+1,j+1} - \mathcal{F}^s_{i+1,j+1}\bar{w}^s_{i+1,j} - \mathcal{K}^s_{i,j+1} + \delta^s_{i+1,j+1}(\tau^2), \quad s = 1,2,3, \tag{16}$$

где $g_{i+1,j+1} = \bar{\Omega}^{-1}_{i+1,j+1}T\tilde{f}_{i+1,j+1}$, $g_{i+1,j+1} = (g^1_{i+1,j+1}, g^2_{i+1,j+1}, g^3_{i+1,j+1})^{\text{т}}$, $g^s_{i+1,j+1}$ – блоки размеров $m_1 m_2 d$, $m_1 m_2 l$ и $m_1 m_2 p$ соответственно;

$$\mathcal{F}^1_{i+1,j+1} = \mathcal{T}^{\text{T}}\tilde{\mathcal{D}}^1_{i+1,j+1}\mathcal{T}, \quad \mathcal{K}^1_{i+1,j+1} = \tilde{\mathcal{D}}^2_{i+1,j+1},$$

$$\tilde{\mathcal{D}}^1_{i+1,j+1} = \operatorname{diag}\{\exp(-r\bar{\gamma}_{m_1} \otimes J_{i+1,j+1}), \exp(-2r\bar{\gamma}_{m_1} \otimes J_{i+1,j+1}), \ldots, \exp(-m_2 r\bar{\gamma}_{m_1} \otimes J_{i+1,j+1})\},$$

$$\tilde{\mathcal{D}}^2_{i+1,j+1} = \operatorname{diag}\left\{\exp\left(-\frac{1}{r}\gamma_{m_2}\otimes J^{-1}_{i+1,j+1}\right),\ \exp\left(-\frac{2}{r}\gamma_{m_2}\otimes J^{-1}_{i+1,j+1}\right),\ \ldots,\ \exp\left(-\frac{m_1}{r}\gamma_{m_2}\otimes J^{-1}_{i+1,j+1}\right)\right\},$$

здесь $\mathcal{T}$ – ортогональная матрица перестановок;

$$\mathcal{F}^2_{i+1,j+1} = \mathbb{O}_{m_1m_2l}, \quad \mathcal{K}^2_{i+1,j+1} = \left(E_{m_1m_2l} + \frac{1}{r}\overline{\gamma}^{-1}_{m_1}\otimes\beta_{m_2}\otimes M_{i+1,j+1}\right)^{-1},$$

$$\mathcal{F}^3_{i+1,j+1} = \left(E_{m_1m_2p} + r\overline{\beta}_{m_1}\otimes\gamma^{-1}_{m_2}\otimes N_{i+1,j+1}\right)^{-1}, \quad \mathcal{K}^3_{i+1,j+1} = \mathbb{O}_{m_1m_2p};$$

$$\delta^s_{i+1,j+1}(\tau^2) = \tau\sum_{l=1}^{3}(\tau\tilde{\epsilon}^{s,l}_{i+1,j+1}(\tau)g^l_{i+1,j+1} - \overline{\epsilon}^{s,l}_{i+1,j+1}(\tau)w^l_{i+1,j} - \hat{\epsilon}^{s,l}_{i+1,j+1}(\tau)w^l_{i,j+1}) + O(h^{m_1}) + O(\tau^{m_2}),$$

$$\left\|\tilde{\epsilon}^{s,l}_{i+1,j+1}(\tau)\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = O(\tau), \quad \left\|\overline{\epsilon}^{s,l}_{i+1,j+1}(\tau)\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = O(\tau), \quad \left\|\hat{\epsilon}^{s,l}_{i+1,j+1}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = O(\tau).$$

Система (16) представляет собой канонический вид разностной схемы (8). В матричной форме система (16) имеет следующий вид:

$$\left(L(\mathcal{V}) + \mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau)\right)\mathcal{V} = G(\mathcal{V}), \tag{17}$$

где $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^1,\mathcal{V}^2,\mathcal{V}^3)^{\mathrm{T}}$ и $\mathcal{V}^s = (\overline{w}^s_{1,1},\overline{w}^s_{2,1},\ldots,\overline{w}^s_{n_1,1},\overline{w}^s_{1,2},\overline{w}^s_{2,2},\ldots,\overline{w}^s_{n_1,2},\ldots,\overline{w}^s_{1,n_2},\overline{w}^s_{2,n_2},\ldots,\overline{w}^s_{n_1,n_2})^{\mathrm{T}}$. В системе (17) матрица $L(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{L^1(\mathcal{V}),L^2(\mathcal{V}),L^3(\mathcal{V})\}$. Каждый ее блок является блочно-двухдиагональной матрицей $L^s(\mathcal{V}) = (L^s_{i,j}(\mathcal{V}))$, где $i,j = 1,2,\ldots,n_1$. Блоки $L^s_{i,i}(\mathcal{V})$, расположенные на главной диагонали, имеют вид

$$L^s_{i,i}(\mathcal{V}) = \begin{pmatrix} E_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s}\\ \mathcal{K}^k_{2,i} & E_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s}\\ \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathcal{K}^k_{3,i} & E_{\nu^s} & \ldots & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & E_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s}\\ \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathcal{K}^k_{n_1,i} & E_{\nu^s}\end{pmatrix}, \tag{18}$$

где ν^s принимает значения: m_1m_2d, m_1m_2l и m_1m_2p, соответственно $s = 1,2,3$. Блоки $L^s_{i,j}(\mathcal{V})$, расположенные под главной диагональю, имеют блочно-диагональный вид, $\mathcal{L}^s_{i,j}(\mathcal{V}) = \operatorname{diag}\{\mathcal{F}^s_{1,i},\mathcal{F}^s_{2,i},\ldots,\mathcal{F}^s_{n_1,i}\}$, где $i = 2,3,\ldots,n_1$, $j = i-1$. Матрица $\mathcal{L}(\mathcal{V},h,\tau) = (\mathcal{L}^{\nu_1,\nu_2}(\mathcal{V},h,\tau))$, где $\nu_1,\nu_2 = 1,2,3$, состоит из блоков, имеющих блочно-двухдиагональный вид $\mathcal{L}^{\nu_1,\nu_2}(\mathcal{V},h,\tau) = (\mathcal{L}^{\nu_1,\nu_2}_{i,j})$, где $i,j = 1,2,\ldots,n_1$, с диагональными блоками

$$\mathcal{L}^{\nu_1,\nu_2}_{i,i} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s}\\ \tau\hat{\epsilon}^{\nu_1,\nu_2}_{2,i} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s}\\ \mathbb{O}_{\nu^s} & \tau\hat{\epsilon}^{\nu_1,\nu_2}_{3,i} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s}\\ \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \mathbb{O}_{\nu^s} & \ldots & \tau\hat{\epsilon}^{\nu_1,\nu_2}_{n_1,i} & \mathbb{O}_{\nu^s}\end{pmatrix}$$

и блоками, расположенными под главной диагональю $\mathcal{L}^{\nu_1,\nu_2}_{i,j} = \operatorname{diag}\{\tau\overline{\epsilon}^{\nu_1,\nu_2}_{1,j},\tau\overline{\epsilon}^{\nu_1,\nu_2}_{2,j},\ldots,\tau\overline{\epsilon}^{\nu_1,\nu_2}_{n_1,j}\}$. Вектор $G(\mathcal{V})$ в (17) имеет следующий вид:

$$G(\mathcal{V}) = \tau(E_{\overline{n}} + \mathcal{G}(\mathcal{V},h,\tau))\overline{g} - (H(\mathcal{V} + \mathcal{H}(\mathcal{V},h,\tau)))w_0 - (Q(\mathcal{V}) + Q(\mathcal{V},h,\tau))w^0 + O(h^{m_1}) + O(\tau^{m_2}),$$

где $\overline{g} = (\overline{g}^1,\overline{g}^2,\overline{g}^3)$ – вектор размера $\overline{n} = \tilde{n}n$, $\tilde{n} = n_1n_2m_1m_2$. Блоки $\overline{g}^s$ имеют размеры $\tilde{n}d$, $\tilde{n}l$ и $\tilde{n}p$ соответственно значениям $s = 1,2,3$,

$$\overline{g}^s = (g_{1,1}^s, g_{2,1}^s, \ldots, g_{n_1,1}^s, g_{1,2}^s, g_{2,2}^s, \ldots, g_{n_1,2}^s, \ldots, g_{1,n_2}^s, g_{2,n_2}^s, \ldots, g_{n_1,n_2}^s)^{\mathrm{T}}.$$

Матрица $\mathcal{G}(\mathcal{V}, h, \tau) = (\mathcal{G}^{\nu_1,\nu_2})$, где $\nu_1, \nu_2 = 1, 2, 3$, имеет следующие блоки:

$$\mathcal{G}^{\nu_1,\nu_2} = \tau\,\mathrm{diag}\{\tilde{\epsilon}_{1,1}^{\nu_1,\nu_2}, \tilde{\epsilon}_{2,1}^{\nu_1,\nu_2}, \ldots, \tilde{\epsilon}_{n_1,}^{\nu_1,\nu_2}, \tilde{\epsilon}_{1,2}^{\nu_1,\nu_2}, \tilde{\epsilon}_{2,2}^{\nu_1,\nu_2}, \ldots, \tilde{\epsilon}_{n_1,2}^{\nu_1,\nu_2}, \ldots, \tilde{\epsilon}_{1,n_2}^{\nu_1,\nu_2}, \tilde{\epsilon}_{2,n_2}^{\nu_1,\nu_2}, \ldots, \tilde{\epsilon}_{n_1,n_2}^{\nu_1,\nu_2}\}.$$

Матрица $H(\mathcal{V}) = \mathrm{diag}\{H^1, H^2, H^3\}$ имеет блоки диагонального вида $H^s = \mathrm{diag}\{H_{1,1}^s, \mathbb{O}_s\}$, где $H_{1,1}^s = \mathrm{diag}\{\mathcal{F}_{1,1}^s, \mathcal{F}_{2,1}^s, \ldots, \mathcal{F}_{n_1,1}^s\}$, $\mathbb{O}_{\nu^s}$ – нулевой квадратный блок порядка $\nu^s = (n_2 - 1)n_1 m_1 m_2 \nu$, где ν принимает значения d, l и p соответственно значениям $s = 1, 2, 3$. Матрица $\mathcal{H}(\mathcal{V}, \tau, h) = (\mathcal{H}^{\nu_1,\nu_2})$ состоит из блоков $\mathcal{H}^{\nu_1,\nu_2} = \mathrm{diag}\{\mathcal{H}_{1,1}^{\nu_1,\nu_2}, \mathbb{O}_{\nu^s}\}$, где $\mathcal{H}_{1,1}^{\nu_1,\nu_2} = \tau\,\mathrm{diag}\{\overline{\epsilon}_{1,1}^{\nu_1,\nu_2}, \overline{\epsilon}_{2,1}^{\nu_1,\nu_2}, \ldots, \overline{\epsilon}_{n_1,1}^{\nu_1,\nu_2}\}$. Вектор $w_0 = (w_0^1, w_0^2, w_0^3)^{\mathrm{T}}$ имеет следующие блоки: $w_0^s = e_{n_2} \otimes (\overline{w}_{1,0}^s, \overline{w}_{2,0}^s, \ldots, \overline{w}_{n_1,0}^s)^{\mathrm{T}}$. Матрица $Q(\mathcal{V}) = \mathrm{diag}\{Q^1, Q^2, Q^3\}$ имеет диагональные блоки $Q^s = \mathrm{diag}\{Q_{1,1}^s, Q_{1,2}^s, \ldots, Q_{1,n_2}^s\}$, где $Q_{1,j}^s = \mathrm{diag}\{\mathcal{K}_{1,j}^s, \mathbb{O}_{\nu^s}\}$, $\nu^s = (n_1 - 1)m_1 m_2 \nu$, ν принимает значения d, l и p, соответственно $s = 1, 2, 3$. Матрица $\mathfrak{Q}(\mathcal{V}, h, \tau) = (\mathfrak{Q}^{\nu_1,\nu_2})$ имеет блоки $\mathfrak{Q}^{\nu_1,\nu_2} = \mathrm{diag}\{\mathfrak{Q}_1^{\nu_1,\nu_2}, \mathfrak{Q}_2^{\nu_1,\nu_2}, \ldots, \mathfrak{Q}_{n_2}^{\nu_1,\nu_2}\}$, где $\mathfrak{Q}_j^{\nu_1,\nu_2} = \tau\,\mathrm{diag}\{\hat{\epsilon}_{1,j}^{\nu_1,\nu_2}, \mathbb{O}_{\nu^s}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n_2$. Вектор $w^0 = (w^{0,1}, w^{0,2}, w^{0,3})^{\mathrm{T}}$, где $w^{0,s} = (e_{n_1} \otimes w_{0,1}^s, e_{n_1} \otimes w_{0,2}^s, \ldots, e_{n_1} \otimes w_{0,n_2}^s)^{\mathrm{T}}$.

Далее запишем систему (17) в нормальной форме. Для этого докажем существование матрицы $(L(\mathcal{V}) + L(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1}$. Найдем $L^{-1}(\mathcal{V})$. Матрицы $(L^s(\mathcal{V}))^{-1} = (X_{\nu_1,\nu_2}^s)$, где $\nu_1, \nu_2 = 1, 2, s, n_2$, $s = 1, 2, 3$, имеют блочную нижнюю (левую) треугольную форму, их квадратные блоки определяются равенством

$$X_{\nu_1,\nu_2}^s = \begin{cases} \mathbb{O}_{\nu^s} \quad \text{при} \quad \nu_1 < \nu_2, \\ (-1)^{\nu_1-\nu_2}\left(\prod\limits_{s_2=\nu_2}^{\nu_1-1}(L_{s_2+1,s_2+1}^s)^{-1}L_{s_2+1,s_2}^s\right)(L_{\nu_2,\nu_2}^s)^{-1} \quad \text{при} \quad \nu_2 \le \nu_1, \end{cases} \tag{19}$$

где $\nu^s = n_1 m_1 m_2 \overline{\nu}$ и $\overline{\nu}$ принимает значения d, l и p, соответственно $s = 1, 2, 3$. В (19) символ $\prod$ обозначает левое произведение матриц. Из (19) нетрудно заметить, что X_{ν_1,ν_2}^s вычисляются также по следующим рекуррентным формулам:

$$X_{\nu_1,\nu_2}^s = \begin{cases} \mathbb{O}_{\nu^s} \quad \text{при} \quad \nu_1 < \nu_2, \\ (L_{\nu_1,\nu_1}^s)^{-1} \quad \text{при} \quad \nu_1 = \nu_2, \\ -(L_{\nu_1,\nu_1}^s)^{-1}L_{\nu_1,\nu_1-1}^s X_{\nu_1-1,\nu_2}^s \quad \text{при} \quad \nu_2 < \nu_1. \end{cases} \tag{20}$$

Матрицы $(L_{\nu_2,\nu_2}^s)^{-1} = (Y_{\tilde{\nu}_1,\tilde{\nu}_2}^{s,\nu_2})$ имеют нижнюю (левую) треугольную форму, где $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2 = 1, 2, \ldots, n_1$. Их блоки определяются следующим образом:

$$Y_{\tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2}^{s,\nu_2} = \begin{cases} \mathbb{O}_{s_2} \quad \text{при} \quad \tilde{\nu}_1 < \tilde{\nu}_2, \\ E_{s_2} \quad \text{при} \quad \tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_2, \\ (-1)^{\tilde{\nu}_1-\tilde{\nu}_2}\prod\limits_{\overline{s}=\tilde{\nu}_2+1}^{\tilde{\nu}_1}\mathcal{K}_{\overline{s},\nu_2}^s \quad \text{при} \quad \tilde{\nu}_1 \ge \tilde{\nu}_2. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, $L^{-1}(\mathcal{V})$ всегда определена. В силу ограниченности матриц $L^{-1}(\mathcal{V})$ и $\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau)$ на сетке $\mathcal{U}_\Delta$ имеем, что $\left\|\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{V})L(\mathcal{V}, h, \tau)\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = c_1 h + c_2\tau$, где c_ν – некоторые постоянные величины. Следовательно, существует матрица $(E + L^{-1}(\mathcal{V})\mathcal{L}(V, h, \tau))^{-1}$, которая определяется равенством $(E + L^{-1}(\mathcal{V})\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}[-L^{-1}(\mathcal{V})\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau)]^\nu$. Причем $\left\|(E + L^{-1}(\mathcal{V})\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 1 + \tilde{c}_1 h + \tilde{c}_2 h$, где $\tilde{c}_\nu$ – некоторые постоянные величины. Поскольку матрицу $(L(\mathcal{V}) + \mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1}$ мы можем представить в виде $(L(\mathcal{V}) + \mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1} = (E + L^{-1}(\mathcal{V})\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau))^{-1}L^{-1}(\mathcal{V})$, то тем самым мы доказали ее существование. Таким образом, перепишем систему (17) в виде

$$\mathcal{V} = \Pi(\mathcal{V}), \tag{22}$$

где $\Pi(\mathcal{V}) = L^{-1}(\mathcal{V})(\tau\overline{g} - H(\mathcal{V})w_0 - Q(\mathcal{V})w^0) + \delta(\mathcal{V}, h, \tau)$ и $\delta(\mathcal{V}, h, \tau) = \tau L^{-1}(\mathcal{V})\mathcal{G}(\mathcal{V}, h, \tau)\overline{g} - L^{-1}(\mathcal{V}) \times \mathcal{H}(\mathcal{V}, h, \tau)w_0 - L^{-1}(\mathcal{V})\mathcal{Q}(\mathcal{V}, h, \tau)w^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}[-L^{-1}(\mathcal{V})\mathcal{L}(\mathcal{V}, h, \tau)]^{\nu} L^{-1}(\mathcal{V})G(\mathcal{V}) + O(h^{m_1}) + O(\tau^{m_2})$.

Уравнение (22) представляет собой разностную схему (17) (или (8)), записанную в нормальной форме матрично-операторного уравнения. Перейдем к доказательству существования равномерно-ограниченного на всей сетке $\mathcal{U}_{\Delta}$ решения уравнения (22).

3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

В этом разделе докажем существование равномерно-ограниченного решения разностной схемы (22) в сеточном пространстве U_{Δ}. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *собственные значения* $\xi_{\overline{\gamma}_{m_1}}^{s_1}$, $\xi_{\gamma_{m_2}}^{s_2}$ *и* $\xi_{J_{i,j}}^{s_3}$ *матриц* $\overline{\gamma}_{m_1}$, γ_{m_2} *и* $J_{i,j}$, *соответственно, в каждом узле разностной сетки* $\mathcal{U}_{\Delta}$ *удовлетворяют условию*

$$r\xi_{\overline{\gamma}_{m_1}}^{s_1} \cdot \xi_{J_{i,j}}^{s_3} \neq -\xi_{\gamma_{m_2}}^{s_2} \qquad \forall s_1, s_2, s_3, \tag{23}$$

где $s_1 = \overline{1, m_1}$, $s_2 = \overline{1, m_2}$, $s_3 = \overline{1, k}$;

2) *собственные значения* $\xi_{J_{i,j}}^{s}$ *положительные в сеточном пространстве* $\mathcal{U}_{\Delta}$;

3) *отношение шагов разностной сетки* τ/h *является постоянной величиной*.

Тогда разностная схема (22) *в сеточном пространстве* $\mathcal{U}_{\Delta}$ *имеет решение равномерно-ограниченное по начально-краевым условиям и по правой части, для которого справедлива оценка* (Как и прежде, в сеточном пространстве $C(U_{\Delta})$ n-мерных вектор-функций используем равномерную норму $\|v_{i,j}\|_{C(U_{\Delta})} = \max_{i,j}\|v_{i,j}\|$, $\|v_{i,j}\| = \max_{s=1,2,\dots,n}|v_{i,j}^s|$, $v_{i,j} = (u_{i,j}^1, v_{i,j}^2, \dots, v_{i,j}^n)^{\text{т}}$, согласованную с нормой n-мерной вектор-функции $v(x,t) \in C(U)$: $\|v(x,t\|_{C(U)} = \max\{\|v(x,t)\| \;\; \forall (x,t) \in U\}$.)

$$\|\mathcal{V}\|_{C(\mathcal{U}_{\Delta})} \leq \mathcal{M}_1\|\tilde{F}_{i,j}\|_{C(U_{\Delta})} + \mathcal{M}_2\|\phi_i\|_{C(U_{\Delta})} + \mathcal{M}_3\|\psi_j\|_{C(U_{\Delta})}, \tag{24}$$

где $\mathcal{M}_{\nu}$ – *постоянные величины*, $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$.

Доказательство. Применим к матричному уравнению (22) метод простых итераций

$$\mathcal{V}_k = \Pi(\mathcal{V}_{k-1}), \quad k \geq 1, \tag{25}$$

где $\Pi(\mathcal{V}_{k-1}) = L^{-1}(\mathcal{V}_{k-1})(\tau\overline{g} - H(\mathcal{V}_{k-1})w_0 - Q(\mathcal{V}_{k-1})w^0) + \delta(\mathcal{V}_{k-1}, h, \tau)$. С помощью итерационного процесса (25), начиная с некоторого стартового вектора $\mathcal{V}_0$, построенного по начально-краевым условиям из (8), образуем последовательность $\{\mathcal{V}_k : k \geq 1\}$ сеточных функций. Докажем, что последовательность $\{\mathcal{V}_k\}$ при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ сходится к некоторой предельной сеточной функции $\mathcal{V}^*$, которая является равномерно-ограниченной и удовлетворяет уравнению (22).

Составим матрицу Якоби $\partial\Pi(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$ и выясним, при каких условиях спектр матрицы $\partial\Pi(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$ будет находиться в круге единичного радиуса. Для удобства обозначим $\Pi_1(\mathcal{V}) = \tau L^{-1}(\mathcal{V})\overline{g}$, $\Pi_2(\mathcal{V}) = L^{-1}(\mathcal{V})H(\mathcal{V})w_0$, $\Pi_3(\mathcal{V}) = L^{-1}(\mathcal{V})Q(\mathcal{V})w^0$ и $\Pi_4(\mathcal{V}) = \delta(\mathcal{V}, h, \tau)$. Исследуем спектры матриц $\partial\Pi_{\nu}(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$.

Рассмотрим $\partial\Pi_1(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$. Имеем $\partial\Pi_1(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V} = \tau\,\mathrm{diag}\{\partial\theta^1/\partial\mathcal{V}^1, \partial\theta^2/\partial\mathcal{V}^2, \partial\theta^3/\partial\mathcal{V}^3\}$, где $\theta^s = \tau(L^s(\mathcal{V}^s))^{-1}\overline{g}^s$ и $\theta^s = (\theta_1^s, \theta_2^s, \dots, \theta_{n_2}^s)^{\text{т}}$. Компоненты вектора θ^s находятся из следующих равенств $\theta_{\nu_2}^s = \tau\sum_{s_1=1}^{\nu_2} X_{\nu_2,s_1}^s\tilde{g}_{s_1}^s$, где X_{ν_2,s_1} определяются по формулам (19) или (20). Обозначим

$\theta^s_{\nu_2} = (\theta^s_{1,\nu_2}, \theta^s_{2,\nu_2}, \ldots, \theta^s_{n_1,\nu_2})^{\mathrm{T}}$, где $\nu_2 = 1, 2, \ldots, n_2$. Тогда, принимая во внимание (18), (19) и (21), находим компоненты векторов $\theta^s_{\nu_2}$. Они выражаются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{gathered}\theta^s_{\nu_1,1} = \tau\sum_{\nu_3=1}^{\nu_1}(-1)^{\nu_1-\nu_3}\prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{\nu_1}\mathcal{K}^s_{\nu_4,1}g^s_{\nu_3,1},\\ \theta^s_{\nu_1,\nu_2} = \tau\sum_{\nu_3=1}^{\nu_1}(-1)^{\nu_1-\nu_3}\prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{\nu_1}\mathcal{K}^s_{\nu_4,\nu_2}\mathcal{F}^s_{\nu_3,\nu_2}\theta^s_{\nu_3,\nu_2-1} + \tau\sum_{\nu_3=1}^{\nu_1}(-1)^{\nu_1-u_3}\prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{\nu_1}\mathcal{K}^s_{\nu_4,\nu_2}g^s_{\nu_3,\nu_2},\end{gathered} \tag{26}$$

где $\nu_1 = 1, 2, \ldots, n_1$. Тогда матрицы Якоби $\partial\theta^s/\partial\mathcal{V}^s$ имеют следующую нижнюю (левую) треугольную форму:

$$\partial\theta^s/\partial\mathcal{V}^s = (\partial\theta^s_{\nu_3}/\partial\overline{w}^s_{\nu_2}), \quad \nu_2, \nu_3 = 1, 2, \ldots, n_2 \quad \text{и} \quad \partial\theta^s_{\nu_3}/\partial\overline{w}^s_{\nu_2} = \mathbb{O} \quad \text{при} \quad \nu_3 < \nu_2, \tag{27}$$

где $\overline{w}^s_{\nu_2} = (\overline{w}^s_{1,\nu_2}, \overline{w}^s_{2,\nu_2}, \ldots, \overline{w}^s_{n_1,\nu_2})^{\mathrm{T}}$, $\mathbb{O}$ — нулевая матрица подходящего размера. Заметим, что для исследования спектра матриц (27) достаточно исследовать спектры диагональных блоков $\partial\theta^s_{\nu_2}/\partial\overline{w}^s_{\nu_2}$. Отметим, что блоки $\partial\theta^s_{\nu_2}/\partial\overline{w}^s_{\nu_2}$ имеют нижнюю (левую) треугольную форму. Выполним оценку по норме их диагональных блоков $\partial\theta^s_{\nu_1,\nu_2}/\partial\overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}$, где $\nu_1 = 1, 2, \ldots, n_1$, $\nu_2 = 1, 2, \ldots, n_2$. Из (26) получаем необходимые оценки

$$\begin{gathered}\left\|\frac{\partial\theta^s_{\nu_1,\nu_2}}{\partial\overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \tau\left\{\zeta^s_{\nu_2}\left\|\mathcal{F}^s_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\left\|\frac{\partial\mathcal{K}^s_{\nu_1,\nu_2}e}{\partial\overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} + \left\|\frac{\partial\mathcal{F}^s_{\nu_1,\nu_2}e}{\partial\overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\right\}\left\|\theta^s_{\nu_1,\nu_2-1}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} + \\ + \tau\zeta^s_{\nu_2}\left\|g^s_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\left\|\frac{\partial\mathcal{K}^s_{\nu_1,\nu_2}e}{\partial\overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} + \tau\left\|\frac{\partial g^s_{\nu_1,\nu_2}}{\partial\overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)},\end{gathered} \tag{28}$$

где

$$\zeta^s_{\nu_2} = \sum_{\nu_3=1}^{n_1}\left\|\prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{n_1}\mathcal{K}^s_{\nu_4,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} + 1.$$

Компоненты $\theta^s_{\nu_1,\nu_2}$ из (28) оцениваются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{gathered}\left\|\theta^s_{\nu_1,1}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \tau\zeta^s_1\left\|g^s_{\nu_1,1}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)},\\ \left\|\theta^s_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \tau\zeta^s_{\nu_2}\left\{\left\|\mathcal{F}^s_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\left\|\theta^s_{\nu_1,\nu_2-1}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} + \left\|g^s_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\right\}.\end{gathered} \tag{29}$$

Рассмотрим первый случай, $s = 1$. Имеем

$$\left\|g^s_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le c_1, \quad \left\|\partial g^s_{\nu_1,\nu_2}/\partial\overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le c_2 \quad \forall s = 1, 2, 3, \tag{30}$$

где c_ν — постоянные величины, которые определяются следующими равенствами: $c_1 = \left\|(\overline{\Omega}^s_{\nu_1,\nu_2})^{-1}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\left\|\tilde{f}_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\|T\|$ и $c_2 = \left\|\partial(\Omega^s_{\nu_1,\nu_2})^{-1}e/\partial\overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\left\|\tilde{f}_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\|T\|$. В [4] показано, что в силу условия 2 настоящей теоремы справедливы неравенства

$$\left\|\mathcal{K}^1_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \rho_1, \quad \left\|\mathcal{F}^1_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \rho_2, \tag{31}$$

где $\rho_1 = \overline{c}_1\exp(-\kappa_1/r)$, $\rho_2 = \overline{c}_2\exp(-\kappa_2 r)$, $\overline{c}_\nu$, κ_ν — постоянные величины, $r = \tau/h$. Нетрудно показать, что при выполнении первого условия теоремы 1, а также в силу теоремы о глобальной структуре матрицы-функции из [9], справедливы неравенства

$$\left\|\frac{\partial\mathcal{K}^1_{\nu_1,\nu_2}e}{\partial\overline{w}^1_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \overline{\rho}_1, \quad \left\|\frac{\partial\mathcal{F}^1_{\nu_1,\nu_2}e}{\partial\overline{w}^1_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \overline{\rho}_2, \tag{32}$$

где $\bar{\rho}_1 = \hat{c}_1 r \exp(-r\bar{\kappa}_1)$, $\bar{\rho}_2 = (\hat{c}_2/r)\exp(-\bar{\kappa}_2/r)$, $\hat{c}_\nu$, $\bar{\kappa}_\nu$ — постоянные величины. Отметим, что $\rho_1, \bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 \to 0$ при $r \to 0$. Подставляя (30), (31) и (32) в (28) и (29), получаем оценки

$$\left\|\theta^1_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \frac{\tau\left\|g^1_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}}{1-\rho_1-\tau\rho_2}, \tag{33}$$

$$\left\|\frac{\partial\theta^1_{\nu_1,\nu_2}}{\partial\bar{w}^1_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \vartheta_1, \quad \vartheta_1 \frac{\tau^2 c_1(\bar{\rho}_1\rho_2+\bar{\rho}_2)}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\tau\rho_2)} + \tau\left(\frac{\bar{\rho}_1 c_1}{1-\rho_1}+c_2\right). \tag{34}$$

Рассмотрим второй случай, $s=2$. В этом случае имеем $\mathcal{K}^2_{i+1,j+1} = E_{m_1m_2l} + \tilde{\mathcal{K}}^2_{i+1,j+1}$, где $\tilde{\mathcal{K}}^2_{i+1,j+1} = \sum_{\nu_3=1}^{\infty}(-1)^{\nu_3}\left(\frac{1}{r}\bar{\gamma}^{-1}_{m_1}\otimes\beta_{m_2}\otimes M_{i+1,j+1}\right)^{\nu_3}$. Заметим, что $\tilde{\mathcal{K}}^2_{i+1,j+1}$ является нильпотентной матрицей индекса k_1 на сетке $\mathcal{U}_\Delta$. Также в силу условий теоремы 1

$$\left\|\mathcal{K}^2_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \bar{c}_3, \quad \left\|\frac{\partial\mathcal{K}^2_{\nu_1,\nu_2}e}{\partial\bar{w}^2_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le c_3, \tag{35}$$

где $\bar{c}_3$ и c_3 — постоянные величины. Рассмотрим теперь $\zeta^2_{\nu_2}$ из (28). Имеем

$$\zeta^2_{\nu_2} \le \sum_{\nu_4=1}^{n_1-1}\sum_{\nu_3=0}^{\nu_4} C^{\nu_3}_{\nu_4}\left(\left\|\tilde{\mathcal{K}}^2_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\right)^{\nu_3} \le \sum_{\nu_3=1}^{k_1} C^{\nu_3}_{n_1}\left(\left\|\tilde{\mathcal{K}}^2_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\right)^{\nu_3-1} \le c_4, \tag{36}$$

где $c_4 = \left(1+\left\|\tilde{\mathcal{K}}^2_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\right)^{k_1}$. Так как $\mathcal{F}^2_{i+1,j+1} = \mathbb{O}_{m_1m_2l}$, то с учетом оценок (30), (35) и (36) неравенства (28) и (29) имеют вид

$$\left\|\theta^2_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \tau c_4\left\|g^2_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}, \tag{37}$$

$$\left\|\frac{\partial\theta^1_{\nu_1,\nu_2}}{\partial\bar{w}^1_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \vartheta_2, \quad \vartheta_2 = \tau(c_3c_4+c_2). \tag{38}$$

Рассмотрим третий случай, $s=3$. Так как $\mathcal{F}^3_{i+1,j+1} = E_{m_1m_2p} + \tilde{\mathcal{F}}^3_{i+1,j+1}$, где $\tilde{\mathcal{F}}^3_{i+1,j+1}$ — нильпотентная матрица индекса k_2 на сетке $\mathcal{U}_\Delta$, которая выражается равенством

$$\tilde{\mathcal{F}}^3_{i+1,j+1} = \sum_{\nu_3=1}^{\infty}(-1)^{\nu_3}(r\bar{\beta}_{m_1}\otimes\gamma^{-1}_{m_2}\otimes N_{i+1,j+1})^{\nu_3},$$

то в силу условий теоремы 1 выполняются неравенства

$$\left\|\mathcal{F}^3_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \bar{c}_5, \quad \left\|\frac{\partial\mathcal{F}^3_{\nu_1,\nu_2}e}{\partial\bar{w}^3_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le c_5, \tag{39}$$

где $\bar{c}_5$ и c_5 — постоянные величины. Поскольку $\mathcal{K}^3_{i+1,j+1} = \mathbb{O}_{m_1m_2p}$, то при достаточно малом τ из (28) и (29), с учетом (30) и (39), имеем неравенства

$$\left\|\theta^3_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \frac{\tau\left\|g^2_{\nu_1,\nu_2}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}}{1-\tau c_5}, \tag{40}$$

$$\left\|\frac{\partial\theta^1_{\nu_1,\nu_2}}{\partial\bar{w}^1_{\nu_1,\nu_2}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \vartheta_3, \quad \vartheta_3 = \tau\left(\frac{\tau c_1 c_5}{1-\tau\bar{c}_5}+c_2\right). \tag{41}$$

Из неравенства (34), (38) и (41) следует, что уменьшая шаги разностной сетки τ и h всегда можно добиться достаточной малости радиуса спектра матрицы $\partial\Pi_1(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$.

Перейдем к исследованию спектра матрицы $\partial\Pi_2(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$. Рассмотрим матрицу $\partial\Pi_2(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$. Имеем $\partial\Pi_2(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V} = \operatorname{diag}\{\partial y^1/\partial\mathcal{V}^1, \partial y^2/\partial\mathcal{V}^2, \partial y^3/\partial\mathcal{V}^3\}$, где $y^s = (L^s(\mathcal{V}^s))^{-1}H^s w^s_0$ и $y^s = (y^s_1, y^s_2, \dots, y^s_{n_2})^{\mathrm{T}}$.

Компоненты вектора y^s находятся из следующих равенств: $y^s_{\nu_2} = X^s_{\nu_2,1} H^s_{1,1} \tilde{w}^s_0$, где $\nu_2 = 1, 2, \ldots, n_2$ и $\tilde{w}^s_0 = (\overline{w}^s_{1,0}, \overline{w}^s_{2,0}, \ldots, \overline{w}^s_{n_1,0})^{\mathrm{T}}$. Обозначим $y^s_{\nu_2} = (y^s_{1,\nu_2}, y^s_{2,\nu_2}, \ldots, y^s_{n_1,\nu_2})^{\mathrm{T}}$. Используя (20), находим компоненты векторов $y^s_{\nu_2}$. Они выражаются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} y^s_{\nu_1,1} &= \sum_{\nu_3=1}^{\nu_1} (-1)^{\nu_1-\nu_3} \prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{\nu_1} \mathcal{K}^s_{\nu_4,1} \mathcal{F}^s_{\nu_3,1} \overline{w}^s_{\nu_3,0}, \\ y^s_{\nu_1,\nu_2} &= \sum_{\nu_3=1}^{\nu_1} (-1)^{\nu_1-\nu_3} \prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{\nu_1} \mathcal{K}^s_{\nu_4,\nu_2} \mathcal{F}^s_{\nu_3,\nu_2} y^s_{\nu_3,\nu_2-1}, \end{aligned} \tag{42}$$

где $\nu_1 = 1, 2, \ldots, n_1$. Следовательно, матрицы $\partial y^s / \partial \mathcal{V}^s$ имеют нижнюю (левую) треугольную форму

$$\partial y^s / \partial \mathcal{V}^s = (\partial y^s_{\nu_3} / \partial \overline{w}^s_{\nu_2}), \quad \nu_2, \nu_3 = 1, 2, \ldots, n_2 \quad \text{и} \quad \partial y^s_{\nu_3} / \partial \overline{w}^s_{\nu_2} = \mathbb{O} \quad \text{при} \quad \nu_3 < \nu_2. \tag{43}$$

Диагональные блоки $\partial y^s_{\nu_2} / \partial \overline{w}^s_{\nu_2}$ матриц (43) также имеют нижнюю (левую) треугольную форму. Поэтому для исследования их спектра достаточно исследовать спектры диагональных блоков $\partial y^s_{\nu_1,u_2} / \partial \overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}$. Дифференцируя $y^s_{\nu_1,\nu_2}$ из (42) и оценивая их по норме, получаем

$$\left\| \frac{\partial y^s_{\nu_1,\nu_2}}{\partial \overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \left\| \frac{\partial \left(\sum_{\nu_3=1}^{n_1} (-1)^{n_1-\nu_3} \prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{n_1} \mathcal{K}^s_{\nu_4,\nu_2} \mathcal{F}^s_{\nu_3,\nu_2} y^s_{\nu_3,\nu_2-1} \right)}{\partial \overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}. \tag{44}$$

Рассмотрим первый случай, $s = 1$. Оценим сначала компоненты $y^1_{\nu_1,\nu_2}$. Из (20) следует, что

$$y^s_1 = (L^s_{1,1})^{-1} H^s_{1,1} \overline{w}^s_0, \quad y^s_{\nu_2} = -(L^s_{\nu_2,\nu_2})^{-1} L^s_{\nu_2,\nu_2-1} y^s_{\nu_2-1} \quad \forall s = 1, 2, 3. \tag{45}$$

Тогда из (45) получаем, что

$$y^s_{\nu_2} = (-1)^{\nu_2-1} \left[\prod_{\nu_3=2}^{\nu_2} (L^s_{\nu_3,\nu_3})^{-1} L^s_{\nu_3,\nu_3-1} \right] y^s_1. \tag{46}$$

Так как собственные значения матриц $(L^1_{\nu_2,\nu_2})^{-1} L^1_{\nu_2,\nu_2-1}$ по модулю меньше единицы, поскольку на их диагоналях расположены блоки $\mathcal{F}^1_{\nu_1,\nu_2}$, то при $s = 1$ произведение матриц в правой части (46) стремится к нулю при увеличении ν_2 и является ограниченной величиной. Следовательно, можем записать

$$\left\| y^1_{\nu_2} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = c_6 \left\| \tilde{w}^1_0 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}, \tag{47}$$

где c_6 — постоянная величина, определяемая равенством

$$c_6 = \max \left\{ \left\| \prod_{\nu_3=1}^{\nu_2} (L^1_{\nu_3,\nu_3})^{-1} L^1_{\nu_3,\nu_3-1} (L^1_{1,1})^{-1} H^1_{1,1} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \right\}.$$

Тогда из (31), (32), (36), (44) и (47) следует

$$\left\| \frac{\partial y^1_{\nu_1,\nu_2}}{\partial \overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \overline{\vartheta}_1, \quad \text{где} \quad \overline{\vartheta}_1 \left(\overline{\rho}_1 c_4 \rho_2 + \overline{\rho}_2 \right) c_6 \left\| \tilde{w}^1_0 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}. \tag{48}$$

Отметим, что $\overline{\vartheta}_1 \to 0$ при уменьшении r.

Рассмотрим второй случай, $s = 2$. Поскольку в этом случае $\mathcal{F}^2_{i+1,j+1} = \mathbb{O}_{m_1 m_2 l}$, то из (42) и (44) немедленно следуют оценки

$$\left\| y^2_{\nu_1,\nu_2} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 0 \quad \text{и} \quad \left\| \frac{\partial y^2_{\nu_1,\nu_2}}{\partial \overline{w}^2_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 0. \tag{49}$$

Рассмотрим третий случай, $s = 3$. В этой ситуации $\mathcal{K}^3_{i+1,j+1} = \mathbb{O}_{m_1 m_2 p}$. Тогда из (44) с учетом (40) имеем

$$\left\| \frac{\partial y^3_{\nu_1,\nu_2}}{\partial \overline{w}^3_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le c_5 \left\| y^3_{\nu_1,\nu_2-1} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}. \qquad (50)$$

Для оценки по норме $y^3_{\nu_1,\nu_2}$ воспользуемся равенством (46). Поскольку $\mathcal{F}^3_{i+1,j+1}$ является нильпотентной матрицей индекса k_2 на сетке $\mathcal{U}_\Delta$, то при $n_2 \le k_2$ выполняется

$$\left\| y^3_{\nu_1,\nu_2} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 0. \qquad (51)$$

Поэтому из (50) с учетом (51) получаем

$$\left\| \frac{\partial y^3_{\nu_1,\nu_2}}{\partial \overline{w}^3_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 0 \quad \text{при} \quad \nu_2 \ge k_2. \qquad (52)$$

Таким образом, из (48), (49) и (52) получаем, что при достаточно малом r спектр матрицы $\partial\Pi_3(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$ будет достаточно мал. Рассмотрим матрицу $\partial\Pi_3(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$. Исследуем ее спектр. Имеем $\partial\Pi_3(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V} = \operatorname{diag}\{\partial z^1/\partial\mathcal{V}^1, \partial z^2/\partial\mathcal{V}^2, \partial z^3/\partial\mathcal{V}^3\}$, где $z^s = (L^s(\mathcal{V}^s))^{-1} Q^s w_{0,s}$ и $z^{0,s} = (e_{n_1} \otimes w^s_{0,1}, e_{n_1} \otimes w^s_{0,2}, \ldots, e_{n_1} \otimes w^s_{0,n_2})^{\mathrm{T}}$ при $s = 1, 2, 3$. Компоненты вектора z^s определяются равенствами

$$z^s_{\nu_2} = \sum\nolimits_{\nu_3=1}^{\nu_2} X^s_{\nu_2,\nu_3} Q^s_{1,\nu_3} e_{n_1} \otimes w^s_{0,\nu_3},$$

где $\nu_2 = 1, 2, \ldots, n_2$. Обозначим вектор через $z^s_{\nu_2} = (z^s_{1,\nu_2}, z^s_{2,\nu_2}, \ldots, z^s_{n_1,\nu_2})^{\mathrm{T}}$ и с помощью (20) найдем его компоненты

$$\begin{gathered} z^s_{\nu_1,1} = \prod_{\nu_4=1}^{\nu_1} (-1)^{\nu_1-1} \mathcal{K}^s_{\nu_4,1} w^s_{0,1}, \\ z^s_{\nu_1,\nu_2} = \sum_{\nu_3=1}^{\nu_1} (-1)^{\nu_1-\nu_3} \prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{\nu_1} \mathcal{K}^s_{\nu_4,\nu_2} \mathcal{F}^s_{\nu_3,\nu_2} z^s_{\nu_3,\nu_2-1} + \prod_{\nu_4=1}^{\nu_1} (-1)^{\nu_1-1} \mathcal{K}^s_{\nu_4,nu_2} w^s_{0,\nu_2}, \end{gathered} \qquad (53)$$

где $\nu_1 = 1, 2, \ldots, n_1$. Таким образом, матрицы $\partial z^s/\partial\mathcal{V}^s$ будут иметь нижнюю (левую) треугольную форму

$$\partial z^s/\partial\mathcal{V}^s = (\partial z^s_{\nu_3}/\partial \overline{w}^s_{\nu_2}), \quad \nu_2, \nu_3 = 1, 2, \ldots, n_2 \quad \text{и} \quad \partial z^s_{\nu_3}/\partial \overline{w}^s_{\nu_2} = \mathbb{O} \quad \text{при} \quad \nu_3 < \nu_2. \qquad (54)$$

Диагональные блоки $\partial z^s_{\nu_2}/\partial \overline{w}^s_{\nu_2}$ матриц (54) также имеют нижнюю (левую) треугольную форму. Поэтому для исследования их спектра достаточно исследовать спектры диагональных блоков $\partial z^s_{\nu_1,u_2}/\partial \overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}$. Дифференцируя $z^s_{\nu_1,\nu_2}$ из (53) и оценивая их по норме, получаем

$$\left\| \frac{\partial z^s_{\nu_1,\nu_2}}{\partial \overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \left\| \frac{\partial \left(\sum_{\nu_3=1}^{n_1} (-1)^{n_1-\nu_3} \prod_{\nu_4=\nu_3+1}^{n_1} \mathcal{K}^s_{\nu_4,\nu_2} \mathcal{F}^s_{\nu_3,\nu_2} z^s_{\nu_3,\nu_2-1} \right)}{\partial \overline{w}^s_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}. \qquad (55)$$

Рассмотрим первый случай, $s = 1$. Из (55) с учетом (31) и (32) получаем оценку

$$\left\| \frac{\partial z^1_{\nu_1,\nu_2}}{\partial \overline{w}^1_{\nu_1,\nu_2}} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le c_7 \left\| z^1_{\nu_1,\nu_2-1} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}, \qquad (56)$$

где $c_7 = \overline{\rho}_1 \rho_2/(1-\rho_1) + \overline{\rho}_2$. Для оценки $z^1_{\nu_1,\nu_2}$ воспользуемся рекуррентными соотношениями, следующими из (20):

$$z^s_1 = (L^s_{1,1})^{-1} Q^s_{1,1} (e_{n_1} \otimes w^s_{0,1}), \qquad z^s_{\nu_2} = -(L^s_{\nu_2,\nu_2})^{-1} L^s_{\nu_2,\nu_2-1} z^s_{\nu_2-1} + (L^s_{\nu_2,\nu_2})^{-1} Q^s_{1,\nu_2} (e_{n_1} \otimes w^s_{0,\nu_2}). \qquad (57)$$

Из (57) получаем

$$z_{\nu_2}^s = \sum_{\nu_4=1}^{\nu_2} (-1)^{\nu_2-\nu_4} \left[\prod_{\nu_3=\nu_4+1}^{\nu_2} (L_{\nu_3,\nu_3}^s)^{-1} L_{\nu_3,\nu_3-1}^s \right] (L_{\nu_4,\nu_4}^s)^{-01} Q_{1,\nu_4}^s (e_{n_1} \otimes w_{0,\nu_4}^s). \tag{58}$$

Поскольку спектр матрицы $(L_{\nu_2,\nu_2}^1)^{-1} L_{\nu_2,\nu_2-1}^1$ лежит внутри круга единичного радиуса, то из (58) следует, что

$$\left\| z_{\nu_2}^1 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le c_8 \left\| \tilde{w}_{0,\nu_2}^1 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}, \tag{59}$$

где c_8 — постоянная величина, которая определяется равенством

$$c_8 = \left\| \sum_{\nu_4=1}^{n_2} \prod_{\nu_3=\nu_4+1}^{n_2} (L_{\nu_3,\nu_3}^s)^{-1} L_{\nu_3,\nu_3-1}^s \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \left\| (L_{\nu_2,\nu_2}^s)^{-1} Q_{1,\nu_2}^s \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}.$$

Подставляя (59) в (56) будем иметь

$$\left\| \frac{\partial z_{\nu_1,\nu_2}^1}{\partial \bar{w}_{\nu_1,\nu_2}^s} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \hat{\vartheta}, \quad \text{где} \quad \hat{\vartheta} = c_7 c_8 \left\| \bar{w}_{0,\nu_2}^1 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}. \tag{60}$$

Отметим, что $c_7 \to 0$ при уменьшении r.

Рассмотрим второй случай, $s = 2$. Так как $\mathcal{F}_{i+1,j+1}^2 = \mathbb{O}_{m_1 m_2 l}$, то из (55) немедленно следует, что

$$\left\| \frac{\partial z_{\nu_1,\nu_2}^2}{\partial \bar{w}_{\nu_1,\nu_2}^s} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 0. \tag{61}$$

Выполним также оценку по норме вектора z_{ν_1,ν_2}^2. Она понадобится позже. Из (53) следует, что

$$\left\| z_{\nu_1,\nu_2}^2 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \left\| \prod_{\nu_3=1}^{n_1} \mathcal{K}_{\nu_3,\nu_2}^2 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \left\| w_{0,\nu_2}^2 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le c_9 \left\| w_{0,\nu_2}^2 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}, \tag{62}$$

где $c_9 = \sum_{\nu_3=0}^{k_1-1} C_{n_1}^{\nu_3} \left\| \tilde{\mathcal{K}}_{\nu_1,\nu_2}^2 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}^{\nu_3}$.

Рассмотрим третий случай, $s = 3$. Так как $\mathcal{K}_{i+1,j+1}^3 = \mathbb{O}_{m_1 m_2 p}$, то из (53) и (55) следует, что

$$\left\| \frac{\partial z_{\nu_1,\nu_2}^3}{\partial \bar{w}_{\nu_1,\nu_2}^3} \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 0 \quad \text{и} \quad \left\| z_{\nu_1,\nu_2}^3 \right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = 0. \tag{63}$$

Из (60), (61) и (63) заключаем, что при уменьшении r спектр матрицы $\partial \Pi_3(\mathcal{V})/\partial \mathcal{V}$ будет достаточно мал. Спектр матрицы $\partial \Pi_4(\mathcal{V})/\partial \mathcal{V}$ ввиду малости величины $\delta(\mathcal{V}, h, \tau)$ будет значительно меньше спектра матрицы $\sum_{s=1}^{3} \partial \Pi_s(\mathcal{V})/\partial \mathcal{V}$ при достаточно малых τ и h. Таким образом, мы доказали, что найдутся такие τ^* и h^*, удовлетворяющие условию (23), что при $\tau < \tau^*$ и $h < h^*$ спектр матрицы Якоби $\partial \Pi(\mathcal{V})/\partial \mathcal{V}$ будет расположен внутри круга единичного радиуса.

Для последовательности $\{\mathcal{V}_k\}$ имеем

$$\mathcal{V}_{k+1} - \mathcal{V}_k = \Pi(\mathcal{V}_k) - \Pi(\mathcal{V}_{k-1}) = \int_{\mathcal{V}_{k-1}}^{\mathcal{V}_k} \frac{\partial \Pi(\mathcal{V})}{\partial \mathcal{V}} d\mathcal{V}. \tag{64}$$

Из (64) по теореме о среднем получаем

$$\mathcal{V}_{k+1} - \mathcal{V}_k = \frac{\partial \Pi(\tilde{\mathcal{V}}^k)}{\partial \mathcal{V}} (\mathcal{V}_k - \mathcal{V}_{k-1}), \tag{65}$$

где $\tilde{\mathcal{V}}^k$ – промежуточное значение между $\mathcal{V}_k$ и $\mathcal{V}_{k-1}$. Тогда из (65) будем иметь

$$\|\mathcal{V}_{k+1}-\mathcal{V}_k\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \left\|\frac{\partial\Pi(\mathcal{V}^k)}{\partial\mathcal{V}}\frac{\partial\Pi(\mathcal{V}^{k-1})}{\partial\mathcal{V}}\cdots\frac{\partial\Pi(\mathcal{V}^1)}{\partial\mathcal{V}}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\|\mathcal{V}_1-\mathcal{V}_0\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}. \tag{66}$$

Так как спектр матрицы $\partial\Pi(\mathcal{V})/\partial\mathcal{V}$ находится в круге единичного радиуса, то найдется такое число n_ϵ, для которого будет справедливо следующее:

$$\hat{\delta} < 1, \quad \text{где} \quad \hat{\delta} = \max\left\{\left\|\partial\Pi(\mathcal{V}^{k+n_\epsilon-1})/\partial\mathcal{V}\partial\Pi(\mathcal{V}^{k+n_\epsilon-2})/\partial V\cdots\partial\Pi(\mathcal{V}^k)/\partial V\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\right\} \quad \forall k.$$

Тогда из (66) следует неравенство

$$\|\mathcal{V}_{k+1}-\mathcal{V}_k\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \hat{\delta}^{\left[\frac{k}{n_\epsilon}\right]}\tilde{\delta}\|\mathcal{V}_1-\mathcal{V}_0\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}, \tag{67}$$

где

$$\tilde{\delta} = \left\|\partial\Pi\left(\tilde{\mathcal{V}}^{\left[\frac{k}{n_\epsilon}\right]+1}\right)/\partial\mathcal{V}\cdot\partial\Pi\left(\tilde{\mathcal{V}}^{\left[\frac{k}{n_\epsilon}\right]+2}\right)/\partial V\cdots\partial\Pi\left(\tilde{\mathcal{V}}^{\left[\frac{k}{n_\epsilon}\right]+\mathrm{mod}\{k,n_\epsilon\}}\right)/\partial V\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}.$$

Далее, в силу неравенства (67), для любых k и p имеем

$$\|\mathcal{V}_{k+p}-\mathcal{V}_k\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \hat{\delta}^{\left[\frac{k}{n_\epsilon}\right]}\tilde{\delta}\left(\hat{\delta}^{\left[\frac{p}{n_\epsilon}\right]}+\hat{\delta}^{\left[\frac{p-1}{n_\epsilon}\right]}+\cdots+1\right)\|\mathcal{V}_1-\mathcal{V}_0\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}. \tag{68}$$

В правой части неравенства (68) $\bar{\delta}^{\left[\frac{k}{n_\epsilon}\right]} \to 0$ при $k\to\infty$, а все другие сомножители являются ограниченными в сеточном пространстве $C(\mathcal{U}_\Delta)$, следовательно, последовательность $\{\mathcal{V}_k\}$ сходится в себе и в силу полноты пространства $C(\mathcal{U}_\Delta)$ сходится к некоторому сеточному значению $\mathcal{V}^*$, который в силу замкнутости сеточного пространства $C(\mathcal{U}_\Delta)$ будет принадлежать этому пространству [11]. Поскольку

$$\|\Pi(\mathcal{V}_k)-\Pi(\mathcal{V}^*)\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} = \|\mathcal{V}_{k+1}-\Pi(\mathcal{V}^*)\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)} \le \left\|\partial\Pi(\tilde{\mathcal{V}}^*)/\partial\mathcal{V}\right\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}\|\mathcal{V}_k-\mathcal{V}^*\|_{C(\mathcal{U}_\Delta)}$$

и $\{\mathcal{V}_k\}\to\mathcal{V}^*$ при $k\to\infty$, то $\mathcal{V}_{k+1}\to\Pi(\mathcal{V}^*)$. Следовательно, $\mathcal{V}^*$ является решением уравнения (22).

Докажем равномерную ограниченность сеточного решения $\mathcal{V}^*$ уравнения (22). Из (33), (37), (40), (47), (49), (51), (59), (62) и (63) следует, что сеточные функции $\mathcal{V}_k$ являются равномерно-ограниченными на сетке $\mathcal{U}_\Delta$ и удовлетворяют неравенству (24). Поскольку последовательность $\{\mathcal{V}_k\}$ равномерно сходится к некоторой сеточной функции $\mathcal{V}^*$, то и для предельной функции $\mathcal{V}^*$ также будет справедлива оценка (24). Теорема доказана.

Перейдем к численным экспериментам.

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Продемонстрируем эффективность предложенного в работе численного метода на следующем тестовом примере. Рассмотрим дифференциально-алгебраическую систему уравнений в частных производных вида (1), в которой

$$A(x,t,u) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{O} & A_{1,3} \\ \mathbb{O} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & E_4 \end{pmatrix}, \quad B(x,t,u) = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & E_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & B_{3,3} \end{pmatrix}, \tag{69}$$

где $A_{1,3} = (0,\exp(x+t^2),0)$, $B_{1,1} = \exp(u_1)+\exp(u_2u_6)+xt$, $\mathbb{O}$ – нулевые блоки подходящего размера,

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & \exp(u_1+u_3) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1+x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & u_1u_5 & 0 & \exp(xt) \\ 0 & 0 & u_6 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица.

№	h	τ	m_1	m_2	Δu	№	h	τ	m_1	m_2	Δu
1	10^{-1}	10^{-1}	2	2	6.8×10^{-2}	6	10^{-2}	10^{-2}	4	4	1.2×10^{-6}
2	10^{-2}	10^{-2}	2	2	2.5×10^{-2}	7	10^{-1}	10^{-1}	5	5	1.2×10^{-4}
3	10^{-1}	10^{-1}	3	3	1.9×10^{-2}	8	10^{-2}	10^{-2}	5	5	5.1×10^{-8}
4	10^{-2}	10^{-2}	3	3	3.4×10^{-4}	9	10^{-1}	10^{-1}	6	6	3.4×10^{-6}
5	10^{-1}	10^{-1}	4	4	3.4×10^{-4}	10	10^{-2}	10^{-2}	6	6	7.4×10^{-10}

Решением системы (1) с коэффициентами (69) является вектор $u = (\exp(xt), \exp(x+t),$ $x+t, xt, t\exp(x), x\exp(t), 1+x)^{\mathrm{T}}$. Вектор $F(x,t,u)$ соответствует этому решению. Начально-краевые условия для такой системы будут иметь вид

$$\begin{gathered}\psi_1(t) = \exp(x_0 t), \quad \psi_2(t) = \exp(x_0 + t), \quad \psi_1(t) = x_0 + t, \\ \phi_1(x) = \exp(x t_0), \quad \phi_4(x) = x t_0, \quad \phi_5(x) = t_0 \exp(x), \quad \phi_6(x) = x\exp(t_0), \quad \phi_7(x) = 1 + x.\end{gathered} \tag{70}$$

Очевидно, что матричный пучок $\mathcal{P}(\lambda, x, t, u)$, построенный по коэффициентам из (69), легко преобразуется к каноническому виду (3) и имеет индекс, равный четырем. Выполним следующее расщепление пучка на два составляющих: $\mathcal{P}(\lambda, x, t, u) = \mathcal{P}_1(\lambda, x, t, u) + \mathcal{P}_2(\lambda, x, t, u)$, где $\mathcal{P}_1(\lambda, x, t, u) = \operatorname{diag}\{1, \mathbb{O}_2, E_4\} + \lambda \operatorname{diag}\{\mathrm{B}_{1,1}, \mathrm{E}_2, \mathbb{O}_4\}$ и $\mathcal{P}_2(\lambda, x, t, u) = \big(\mathbb{O}, \operatorname{colon}(A_{1,3}, A_{2,3}, \mathbb{O}_4)\big) +$ $+ \lambda \operatorname{diag}\{\mathbb{O}_3, B_{3,3}\}$. Найдем численное решение начально-краевой задачи (1), (69), (70) предложенным в работе алгоритмом с помощью специально разработанной программы. Программа написана на компьютерном языке C++ и позволяет находить численное решение начально-краевых задач (1), (2) обоснованным в настоящей работе методом. В программе пользователь задает: коэффициенты системы $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$; вектор правой части $F(x,t,u)$; начально-краевые условия $\psi(t)$ и $\phi(x)$; область решения $U = [x_0, X] \times [t_0, T]$; порядки сплайна для каждой независимой переменной m_1 и m_2; шаги разностной сетки h и τ; число десятичных знаков κ, до стабилизации которых осуществляется итерационный процесс. На выходе формируется текстовый файл, в котором записаны значения сеточной функции в каждом узле разностной сетки. Программа "Численная реализация нелинейной разностной схемы с расщепленным матричным пучком для решения квазилинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса" зарегистрирована в Федеральной регистрационной службе РОСПАТЕНТ 25 августа 2017 г. под номером № 2017619532.

Найдено численное решение задачи (1), (69), (70) в области $U = [0,1] \times [0,1]$ при $\kappa = 4$. Результаты численных расчетов представлены в таблице. Расчеты выполнены на оборудовании центра коллективного пользования "Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН" [12].

За результат в тестовом примере принята абсолютная погрешность Δu как максимальное отклонение точного решения от найденного численного решения на всей разностной сетке $\mathcal{U}_\Delta$. Из последнего столбца таблицы видно, что численный алгоритм имеет высокую точность, которая на единицу меньше порядка аппроксимирующего сплайна. В некоторых случаях (№ 1, 5, 9) абсолютная погрешность на порядок превосходит ожидаемый результат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе сплайн-коллокационный метод позволяет с высокой точностью, которая на единицу меньше порядка сплайна, численно решать рассмотренные в работе квазилинейные дифференциально-алгебраические системы индекса $(k, 0)$. Особенность этого метода имеет аналитический характер и заключается в предварительном расщеплении матричного пучка системы $\mathcal{P}(\lambda, x, t, u)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бормотова О.В., Чистяков В.Ф.* О методах численного решения и исследования систем не типа Коши—Ковалевской // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 8. С. 1380—1387.
2. *Гайдомак С.В.* Об одной краевой задаче для линейной параболической системы первого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 73—83.

3. *Гайдомак С.В.* Об одном алгоритме численного решения линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 9. С. 1530–1544.
4. *Гайдомак С.В.* Об устойчивости неявной сплайн-коллокационной разностной схемы для линейных дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 9. С. 44–63.
5. *Гайдомак С.В.* О канонической структуре пучка вырожденных матриц-функций // Изв. ВУЗОВ. Математика. 2012. № 2. С. 23–33.
6. *Березин М.В., Жидков Н.П.* Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Т. 1.
7. *Вербицкий Б.В.* Об одном глобальном свойстве матриц-функций, зависящих от нескольких переменных // Успехи матем. наук. 1973. Т. 28. Вып. 5. № 173. С. 233–234.
8. *Вербицкий Б.В.* Об одном глобальном свойстве матрицы-функции от одного переменного // Матем. сб. 1973. Т. 91(133). № 1(5). С. 50–61.
9. *Вербицкий Б.В.* Одно глобальное свойство матриц-функций, зависящих от нескольких переменных // Изв. ВУЗОВ. Математика. 1978. № 1. С. 8–17.
10. *Ланкастер П.* Теория матриц: Пер. с англ. М.: Физматлит, 1982.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. Издание второе. М.: Физматлит, 1977.
12. Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН [Электронный ресурс]: сайт. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН. – URL: http://hpc.icc.ru.