ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 5, с. 739–751

УДК 519.626.6

ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАГРУЖЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2019 г. В. М. Абдуллаев[1,2,*], К. Р. Айда-заде[2,3,]**

([1] AZ1010 Баку, пр-т Азадлыг, 20, Азерб. гос. ун-т нефти и промышленности, Азербайджан;

[2] AZ1141 Баку, ул. Вахабзаде, 9, Ин-т систем управления НАН Азербайджана, Азербайджан;

[3] AZ1141 Баку, ул. Вахабзаде, 9, Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Азербайджан)

**e-mail: vaqif_ab@rambler.ru;*

***e-mail: kamil_aydazade@rambler.ru*

Поступила в редакцию 17.10.2017 г.
Переработанный вариант 21.10.2018 г.
Принята к публикации 11.01.2019 г.

В работе предложен подход к численному решению задач оптимального управления, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений с точечными нагружениями. В задаче заданы нелокальные условия, в которых участвуют в неразделенном виде как значения фазового состояния в определенных точках, так и ее интегральные значения на различных заданных интервалах. Получены формулы для градиента целевого функционала задачи, использованные для решения задачи с применением численных методов оптимизации первого порядка. Приведены результаты численных экспериментов. Библ. 22. Табл. 2.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, оптимальное управление, градиент функционала, нелокальные условия, интегральные условия.

DOI: 10.1134/S0044466919050028

ВВЕДЕНИЕ

В работе предложен подход к численному решению задач оптимального управления процессами, описываемых системами обыкновенных точечно нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями. Известно, что нагруженными обыкновенными дифференциальными, в том числе интегральными уравнениями, описываются многие процессы [1]–[8]. К этим же системам при использовании метода прямых приводятся нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными с точечными нагружениями [9]–[13]. Наличие неразделенных многоточечных и/или интегральных условий для этих уравнений обусловлено невозможностью на практике производить замеры в какой-либо одной точке фазового пространства и/или в какой-либо момент времени. Ясно, что замеры охватывают некоторую окрестность точки, в которой производится замер, или интервал времени, содержащий момент времени замера. Такие замеры, как правило, усреднялись, что, очевидно, приводило к погрешностям в задании начальных и/или краевых условий.

Для рассматриваемого класса задач управления получены формулы градиента, которые предлагается использовать для решения задач оптимального управления нагруженными системами с нелокальными условиями с применением численных методов оптимизации первого порядка. Для решения нагруженных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями предложен подход, приводящий к решению вспомогательных систем дифференциальных уравнений без нагружения с нелокальными условиями. А для решения дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями как для прямой, так и сопряженной задач использован подход, предложенный в работах [6], [7], [14], [15], [17], являющийся аналогом метода прогонки [16], и основанный на последовательном сдвиге (слева направо или справа налево) точек, участвующих в нелокальных условиях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый следующей системой точечно нагруженных дифференциальных уравнений линейных по фазовой переменной и нелинейных по управляющим воздействиям

$$\dot{x}(t) = A(t,u)x(t) + \sum_{s=1}^{l_1} B_s(t,u)x(\breve{t}_s) + B_0(t,u), \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовая переменная; $u(t) \in U \subset R^r$ – управляющая кусочно-непрерывная вектор-функция, допустимые значения которой принадлежат заданному выпуклому компактному множеству U; n-мерные матричные функции $A(t,u) \not\equiv \text{const}$, $B_s(t,u)$, $s = 1,2,\ldots,l_1$ и n-мерная вектор-функция $B_0(t,u)$ непрерывны по t и непрерывно-дифференцируемы по u; заданные моменты времени нагружения $\breve{t}_s$, $s = 1,2,\ldots,l_1$, не умаляя общности, будем считать упорядоченными, т.е. $t_0 < \breve{t}_1 < \breve{t}_2 < \ldots < \breve{t}_{l_1} < t_f$.

Имеются n линейных условий, содержащих слагаемые как со значениями фазовой переменной в каких-либо точках (в том числе и в точках нагружения), так и слагаемые с интегралами по фазовой переменной

$$\sum_{s=1}^{l_1} \breve{D}_s x(\breve{t}_s) + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j x(\tilde{t}_j) + \sum_{i=1}^{l_3} \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}} \bar{D}_i(\tau)x(\tau)d\tau = L_0. \tag{1.2}$$

Здесь непрерывные матричные функции $\bar{D}_i(\tau)$ и скалярные матрицы $\tilde{D}_j$, $\breve{D}_s$, имеющие размерность $(n \times n)$; n-мерный вектор L_0 – заданы.

Будем предполагать, что заданные моменты времени нагружения $\breve{t}_s$, границы интервалов $\tilde{t}_j$ и моменты временны $\bar{t}_i$ для всех $s = 1,2,\ldots,l_1$, $j = 1,2,\ldots,l_2$, $i = 1,2,\ldots,2l_3$, не умаляя общности, удовлетворяют требованиям

$$\min(\breve{t}_1, \tilde{t}_1, \bar{t}_1) = t_0, \quad \max(\breve{t}_{l_1}, \tilde{t}_{l_2}, \bar{t}_{2l_3}) = t_f, \tag{1.3}$$

$$\tilde{t}_j, \breve{t}_s \;\bar{\in}\; [\bar{t}_{2i-1}, \bar{t}_{2i}]. \tag{1.4}$$

Пусть при каждом допустимом управлении $u(t) \in U$ выполнены условия существования единственного решения системы нагруженных дифференциальных уравнений (1.1), удовлетворяющих условиям (1.2).

Рассматриваемая задача оптимального управления заключается в отыскании такого допустимого управления $u(t) \in U$, что вместе с соответствующим ему решением дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющим условиям (1.2), минимизировалось значение функционала

$$J(u) = F(\hat{x}) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(x,u,t)dt \to \min_{u(t)\in U}. \tag{1.5}$$

Здесь функция $F(\cdot)$ – непрерывно-дифференцируема по своим аргументам; функция $f^0(x,u,t)$ непрерывно-дифференцируема по x,u и непрерывна по t; $\hat{t} = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, \ldots, \hat{t}_{2l_3+l_2})$ – упорядоченное объединение моментов времени

$$\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \ldots, \tilde{t}_{l_2}), \quad \bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{2l_3}), \quad \breve{t} = (\breve{t}_1, \breve{t}_2, \ldots, \breve{t}_s),$$

т.е.

$$\hat{t}_j < \hat{t}_{j+1}, \quad j = 1,\ldots,l_1 + l_2 + 2l_3 - 1; \quad \hat{x} = x(\hat{t}) = (x(\hat{t}_1),\ldots,x(\hat{t}_{l_1+l_2+2l_3})).$$

Ясно, что введением l_2 новых фазовых переменных можно избавиться от интегральных слагаемых в условиях (1.2), сведя их к многоточечным условиям. Далее, используя подход, предложенный в [6], за счет дополнительного увеличения размерности фазового вектора до $(2l_3 + l_2 + 1)(l_3 + 1)n$, полученную задачу с многоточечными условиями можно привести к двухточечной краевой задаче с разделенными краевыми условиями, относительно которой известны необходимые условия оптимальности [17]–[19].

В данный работе получены конструктивные формулы вычисления градиента функционала задачи (1.1), (1.2), (1.5), не использующие увеличения размерности фазового пространства, позволяющие строить численные методы решения рассматриваемой задачи с применением эффективных итерационных методов оптимизации первого порядка.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ФОРМУЛ ДЛЯ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИОНАЛА

Предположим выполненными все наложенные условия на функции, параметры, участвующие в постановке задачи (1.1)–(1.5). Обозначим через $O_{n\times n}$ нулевую матрицу, размерности $n\times n$, O_n есть n-мерный нулевой вектор. Имеет место

Теорема 1. *Решение системы нагруженных уравнений* (1.1) *при условиях* (1.2) *для произвольно заданной допустимой функции* $u(t)$ *представимо в виде*

$$x(t) = z_0(t) + \sum_{s=1}^{l_1} z_s(t)x(\breve{t}_s), \tag{2.1}$$

где n-мерная вектор-функция $z_0(t)$ и n-мерные квадратные матричные функции $z_s(t)$, $s = 1,2,\dots,l_1$, являются решением следующих линейных систем дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями

$$\dot{z}_s(t) = A(t,u)z_s(t) + B_s(t,u), \quad t\in[t_0,T], \quad s = 0,1,\dots,l_1, \tag{2.2}$$

$$\sum_{s=1}^{l_1} \breve{D}_m z_s(\breve{t}_m) + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j z_s(\tilde{t}_j) + \sum_{i=1}^{l_3} \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}} \bar{D}_i(\tau) z_s(\tau)d\tau = \begin{cases} L_0, & s = 0, \\ O_{n\times n}, & s = 1,2,\dots,l_1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Доказательство. Подставив представление решения (2.1) с систему (1.1), получим

$$\dot{z}_0(t) + \sum_{s=1}^{l_1} \dot{z}_s(t)x(t_s) = A(t,u)\left[z_0(t) + \sum_{s=1}^{l_1} z_s(t)x(\breve{t}_s)\right] + \sum_{s=1}^{l_1} B_s(t,u)x(\breve{t}_s) + B_0(t,u).$$

Сгруппировав слагаемые, будем иметь

$$[\dot{z}_0(t) - A(t,u)z_0(t) - B_0(t,u)] + \sum_{s=1}^{l_1} [\dot{z}_s(t) - A(t,u)z_s(t) - B_s(t,u)]x(\breve{t}_s) = 0_n.$$

Учитывая пока произвольность значений $x(\breve{t}_s)$, $s = 1,2,\dots,l_1$, потребуем равенства нулю выражений в квадратных скобках. В результате получим искомую систему дифференциальных уравнений (2.2).

Подставим представления (2.1) в условия (1.2), получим

$$\sum_{s=1}^{l_1} \breve{D}_s \left[z_0(\breve{t}_s) + \sum_{i=1}^{l_1} z_i(\breve{t}_s)x(\breve{t}_i)\right] + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j \left[z_0(\tilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_1} z_s(\tilde{t}_j)x(\breve{t}_s)\right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l_3} \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}} \bar{D}_i(\tau)\left[z_0(\tau) + \sum_{s=1}^{l_1} z_s(\tau)x(\breve{t}_s)\right]d\tau = L_0.$$

Группируя слагаемые и меняя порядок суммирования, получаем

$$\left[\sum_{s=1}^{l_1} \breve{D}_s z_0(\breve{t}_s) + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j z_0(\tilde{t}_j) + \sum_{i=1}^{l_3} \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}} \bar{D}_i(\tau)z_0(\tau)d\tau - L_0\right] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{l_1}\left[\sum_{m=1}^{l_1} \breve{D}_m z_s(\breve{t}_m) + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j z_s(\tilde{t}_j) + \sum_{i=1}^{l_3} \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}} \bar{D}_i(\tau)z_s(\tau)d\tau\right]x(\breve{t}_s) = O_{n\times n}.$$

Приравняв нулю выражения в квадратных скобках, получим искомые условия (2.3).

Пусть n-мерная квадратная матрица $\Phi(t,\tau;u)$ при заданной вектор-функции $u(t)$ есть решение следующей задачи Коши

$$\Phi_t(t,\tau;u) = A(t;u)\Phi(t,\tau;u),$$
$$\Phi(t_0,t_0) = E_n,$$

где E_n есть n-мерная единичная матрицы.

Матричная функция $\Phi(t,\tau;u)$ является фундаментальной матрицей решений векторной системы дифференциальных уравнений (2.2) при $s = 0$ и заданной функции $u(t)$. Далее для краткости, где это возможно, у функции $\Phi(t,\tau;u)$ третий аргумент – $u(t)$ будет опущен, т.е. будет использовано $\Phi(t,\tau) = \Phi(t,\tau;u)$.

Рассмотрим матричные системы дифференциальных уравнений (2.2) при $s = 1,2,\ldots,l_1$. Через $z_s^j(t)$, $B_s^j(t;u)$ обозначим j-е столбцы матриц $z_s(t)$ и $B_s(t;u)$. Тогда $\Phi(t,\tau)$ будет фундаментальной матрицей решений для векторных систем

$$\dot{z}_s^j(t) = A(t,u)z_s^j(t) + B_s^j(t,u),$$

составленных из соответствующих столбцов. Поэтому матрицу $\Phi(t,\tau)$ будем считать фундаментальной и для матричных систем дифференциальных уравнений (2.2) при $s = 1,2,\ldots,l_1$, понимая их как системы, записанные по столбцам матриц $z_s(t)$ и $B_s(t;u)$.

В этом случае решения неоднородных систем уравнений (2.2), согласно формуле Коши, представляются в виде

$$z_s(t) = \Phi(t,t_0)z_s(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B_s(\tau)d\tau, \quad s = 0,1,\ldots,l_1,$$

как для векторной системы дифференциальных уравнений (2.2) при $s = 0$, так и для матричных систем дифференциальных уравнений (2.2) при $s = 1,2,\ldots,l_1$.

Далее используем δ_{ij}-символ Кронеккера, а именно в данном случае $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ $i,j = 1,2,\ldots,l_1$.

Имеет место

Теорема 2. *Для существования и единственности решения задачи* (1.1), (1.2) *при заданной вектор-функции* $u(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы ранг* n*-мерной матрицы*

$$Q = \sum_{s=1}^{l_1}\breve{D}_s\Phi(\breve{t}_s,t_0) + \sum_{j=1}^{l_2}\tilde{D}_j\Phi(\tilde{t}_j,t_0) + \sum_{i=1}^{l_3}\int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}}\bar{D}_i(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau, \tag{2.4}$$

был равен n, *а ранг матрицы* V, *элементы которой есть* n*-мерные квадратные матрицы*

$$V_{sj} = \delta_{sj}E_n - \Phi(\breve{t}_j,t_0)z_s(t_0) - \int_{t_0}^{\breve{t}_j}\Phi(\breve{t}_j,\tau)B_s(\tau)d\tau, \quad j = 1,2,\ldots,l_1, \quad s = 1,2,\ldots,l_1, \tag{2.5}$$

был равен $l_1 n$.

Доказательство. Для решений систем дифференциальных уравнений (2.2), согласно формуле Коши, имеем

$$z_s(\tilde{t}_j) = \Phi(\tilde{t}_j,t_0)z_s(t_0) + \int_{t_0}^{\tilde{t}_j}\Phi(\tilde{t}_j,\tau)B_s(\tau)d\tau, \quad s = 0,1,\ldots,l_1, \quad j = 1,2,\ldots,l_1, \tag{2.6}$$

$$z_s(\breve{t}_j) = \Phi(\breve{t}_j,t_0)z_s(t_0) + \int_{t_0}^{\breve{t}_j}\Phi(\breve{t}_j,\tau)B_s(\tau)d\tau, \quad s = 0,1,\ldots,l_1, \quad j = 1,2,\ldots,l_1. \tag{2.7}$$

Введем обозначение

$$\mathrm{I}_{si} = \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}}\bar{D}_i(\tau)z_s(\tau)d\tau = \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}}\bar{D}_i(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau\cdot z_s(t_0) + \int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}}\int_{t_0}^{\tau}\bar{D}_i(\tau)\Phi(\xi,\tau)B_s(\xi)d\xi d\tau. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.6)–(2.8) в условия (2.3), несложно убедиться, что относительно каждой из функций $z_s(t)$ для их значений $z_s(t_0)$, $s = 0,1,\ldots,l_1$, получим независимые алгебраические системы с одинаковой матрицей в левой части и различными правыми частями

$$Qz_s(t_0) = W_s, \quad s = 0,1,\ldots,l_1. \tag{2.9}$$

Здесь n-мерная квадратная матрица Q определяется по формуле (2.4), а правая часть есть

$$W_s = -\sum_{s=1}^{l_1}\breve{D}_s\int_{t_0}^{\breve{t}_s}\Phi(\breve{t}_s,\tau)B_s(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{l_2}D_j\int_{t_0}^{\tilde{t}_j}\Phi(\tilde{t}_j,\tau)B_s(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{l_3}\mathrm{I}_{si} + \begin{cases}L_0, & s = 0,\\ 0, & s = 1,2,\ldots,l_1.\end{cases}$$

Ясно, что для единственности решения системы (1.1), (1.2) в виде представления (2.1) для произвольных допустимых функций $u(t)$ необходимо, чтобы каждая из систем в (2.9) имела единственное решение, а следовательно, необходимо, чтобы ранг матрицы Q был равен n (учитывая, что в (2.9) алгебраические системы для $s = 1,2,\ldots,l_1$ разбиваются на подсистемы относительно соответствующих столбцов матриц $z_s(t)$ и $W_s(t)$).

Далее, пользуясь представлением (2.1), для точек нагружения имеем

$$x(\breve{t}_j) = z_0(\breve{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_1} z_s(\breve{t}_j)x(\breve{t}_s), \quad j = 1,2,\ldots,l_1.$$

После группировки соответствующих членов получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{l_1}[\delta_{sj}E_n - z_s(\breve{t}_j)]x(\breve{t}_s) = z_0(\breve{t}_j), \quad j = 1,2,\ldots,l_1.$$

Подставляя (2.6), (2.7) в эти соотношения, получаем

$$\sum_{s=1}^{l_1}\left[\delta_{sj}E_n - \Phi(\breve{t}_j,t_0)z_s(t_0) - \int_{t_0}^{\breve{t}_j}\Phi(\breve{t}_j,\tau)B_s(\tau)d\tau\right]x(\breve{t}_s) = \Phi(\breve{t}_j,t_0)z_0(t_0) + \int_{t_0}^{\breve{t}_j}\Phi(\breve{t}_j,\tau)B_0(\tau)d\tau, \quad j = 1,2,\ldots,l_1.$$

Объединим эти системы уравнений в одну систему. Введем следующие обозначения для векторов и матриц:

$$\breve{x} = (\breve{x}^1,\breve{x}^2,\ldots,\breve{x}^{l_1})^{\mathrm{T}} = (x(\breve{t}_1),x(\breve{t}_2),\ldots,x(\breve{t}_{l_1}))^{\mathrm{T}},$$

$$G = (G_1,G_2,\ldots,G_l)^{\mathrm{T}}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1l_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ V_{l_11} & V_{l_12} & \cdots & V_{l_1l_1}\end{pmatrix},$$

$$G_j = \Phi(\breve{t}_j,t_0)z_0(t_0) + \int_{t_0}^{\breve{t}_j}\Phi(\breve{t}_j,\tau)B_0(\tau)d\tau, \quad j = 1,2,\ldots,l_1,$$

$$V_{sj} = \delta_{sj}E_n - \Phi(\breve{t}_j,t_0)z_s(t_0) - \int_{t_0}^{\breve{t}_j}\Phi(\breve{t}_j,\tau)B_s(\tau)d\tau, \quad j = 1,2,\ldots,l_1, \quad s = 1,2,\ldots,l_1.$$

Здесь матрица V имеет размеры $(l_1n\times l_1n)$, G и $\breve{x}$ есть (l_1n)-мерные векторы, V_{sj} есть n-мерные квадратные матрицы, G_j есть n-мерные векторы, $s, j = 1,2,\ldots,l_1$, т – знак транспонирования.

В результате получим следующую систему алгебраических уравнений (l_1n)-го порядка:

$$V\,\breve{x} = G. \tag{2.10}$$

Для того чтобы система (1.1), (1.2) при произвольно заданных допустимых $u(t)$ имела единственное решение в виде представления (2.1), необходимо, чтобы система (2.10) имела единственное решение. Отсюда следует необходимость выполнения условия (2.5).

Имеет место следующая теорема. В ней использованы следующие обозначения: $\delta(t)$ – функция Дирака; $\chi(t)$ – функция Хевисайда, т.е. $\chi(t) = 1$ при $t > 0$ и $\chi(t) = 0$ при $t < 0$; для произвольной кусочно-непрерывной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t^+) = \varphi(t+0), \quad \varphi(t^-) = \varphi(t-0).$$

Теорема 3. *Пусть* $u(t)$ – *произвольное допустимое управление, а* $x(t)$ – *соответствующее ему решение задачи* (1.1), (1.2). *Тогда градиент функционала задачи* (1.1), (1.2), (1.5) *определяется формулой*

$$\operatorname{grad} J(u) = f_u^0(x,u,t) + \psi^{\mathrm{T}}(t)\left(-A_u^{\mathrm{T}}(t,u)x(t) - \sum_{s=1}^{l_1}B_{su}^{\mathrm{T}}(t,u)x(\breve{t}_s) - B_{0u}(t,u)\right), \tag{2.11}$$

где $\psi(t)$, λ — соответственно *n-мерная вектор-функция и n-мерный скалярный вектор, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*:

$$\dot{\psi}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t,u)\psi(t) - \sum_{s=1}^{l_1}\delta(t-\breve{t}_s)\int_{t_0}^{t_f} B_s^{\mathrm{T}}(t,u)\psi(t)dt + \sum_{i=1}^{l_3}[\chi(\overline{t}_{2i}) - \chi(\overline{t}_{2i-1})]\overline{D}_i^{\mathrm{T}}(t)\lambda + f_x^0(x,u,t), \tag{2.12}$$

граничным условиям

$$\psi(t_0) = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F(\hat{x})}{\partial \breve{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} + \breve{D}_1^{\mathrm{T}}\lambda, & \textit{если} \quad t_0 = \breve{t}_1, \\ \left(\dfrac{\partial F(\hat{x})}{\partial \tilde{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} + \tilde{D}_1^{\mathrm{T}}\lambda, & \textit{если} \quad t_0 = \tilde{t}_1, \\ \left(\dfrac{\partial F(\hat{x})}{\partial \overline{x}_1}\right)^{\mathrm{T}}, & \textit{если} \quad t_0 = \overline{t}_1, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\psi(t_f) = \begin{cases} -\left(\dfrac{\partial F(\hat{x})}{\partial \breve{x}_{l_1}}\right)^{\mathrm{T}} - \breve{D}_{l_1}^{\mathrm{T}}\lambda, & \textit{если} \quad \breve{t}_{l_1} = t_f, \\ -\left(\dfrac{\partial F(\hat{x})}{\partial \tilde{x}_{l_2}}\right)^{\mathrm{T}} - \tilde{D}_{l_2}^{\mathrm{T}}\lambda, & \textit{если} \quad \tilde{t}_{l_2} = t_f, \\ -\left(\dfrac{\partial F(\hat{x})}{\partial \overline{x}_{2l_3}}\right)^{\mathrm{T}}, & \textit{если} \quad \overline{t}_{2l_3} = t_f, \end{cases} \tag{2.14}$$

условиям скачка

$$\psi(\breve{t}_s^+) - \psi(\breve{t}_s^-) = \frac{\partial F(\hat{x})}{\partial \breve{x}_s} + \breve{D}_s^{\mathrm{T}}\lambda, \quad s = 1,2,\ldots,l_1, \tag{2.15}$$

$$\psi(\tilde{t}_j^+) - \psi(\tilde{t}_j^-) = \frac{\partial F(\hat{x})}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{D}_j^{\mathrm{T}}\lambda, \quad j = 1,2,\ldots,l_2, \tag{2.16}$$

$$\psi(\overline{t}_i^+) - \psi(\overline{t}_i^-) = \frac{\partial F(\hat{x})}{\partial \overline{x}_i}, \quad i = 1,2,\ldots,2l_3. \tag{2.17}$$

Доказательство. Покажем дифференцируемость функционала (1.5) в задаче (1.1)–(1.5) при произвольном допустимом управлении $u(t)$.

Пусть допустимое управление $u(t)$ получило достаточно малое допустимое приращение $\Delta u(t)$, а соответствующее ему $x(t)$ – решение задачи (1.1), (1.2) получило приращение $\Delta x(t)$, т.е. $u(t) + \Delta u(t) \in U$, $x(t) + \Delta x(t)$. Тогда имеют место уравнения

$$\Delta\dot{x}(t) = A(t,u)\Delta x(t) + \Delta_u A(t,u)x(t) + \sum_{s=1}^{l_1} B_s(t,u)\Delta x(\breve{t}_s) + \Delta_u B_0(t,u), \quad t \in [t_0,t_f], \tag{2.18}$$

$$\sum_{j=1}^{l_1}\breve{D}_s\Delta x(\breve{t}_s) + \sum_{j=1}^{l_2}\tilde{D}_j\Delta x(\tilde{t}_j) + \sum_{i=1}^{l_3}\int_{\overline{t}_{2i-1}}^{\overline{t}_{2i}}\overline{D}_i(\tau)\Delta x(\tau)d\tau = 0. \tag{2.19}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Delta_u A(t,u) = A(t,u+\Delta u) - A(t,u), \quad \Delta_u B_s(t,u) = B_s(t,u+\Delta u) - B_s(t,u),$$
$$\Delta_u B_0(t,u) = B_0(t,u+\Delta u) - B_0(t,u).$$

Перенесем все слагаемые в системе уравнений (2.18) влево, умножим полученные при этом системы равенств на соответствующие компоненты пока произвольной почти всюду непрерывной, непрерывно-дифференцируемой n-мерной вектор-функции $\psi(t)$, а левые части условия (2.19) умножим на соответствующие компоненты пока произвольного n-мерного скалярного вектора λ. Левые части полученных выражений, равные нулю, сложим с приращением функционала

$$\Delta J(u) = J(u+\Delta u) - J(u) = \Delta F(\hat{x}) + \int_{t_0}^{t_f} \Delta f^0(x,u,t)dt +$$
$$+\int_{t_0}^{t_f} \psi^{\mathrm{T}}(t)\left[\Delta\dot{x}(t) - A(t,u)\Delta x(t) - \Delta_u A(t,u)x(t) - \sum_{s=1}^{l_1} B_s(t,u)\Delta x(\breve{t}_s) - \Delta_u B_0(t,u)\right]dt +$$
$$+\lambda^{\mathrm{T}}\left[\sum_{j=1}^{l_2}\tilde{D}_j\Delta x(\tilde{t}_j) + \sum_{j=1}^{l_1}\breve{D}_s\Delta x(\breve{t}_s) + \sum_{i=1}^{l_3}\int_{\bar{t}_{2i-1}}^{\bar{t}_{2i}}\bar{D}_i(\tau)\Delta x(\tau)d\tau\right].$$

Используя интегрирование по частям, после группировки соответствующих членов с точностью до членов первого порядка малости, получаем

$$\begin{aligned}\Delta J(u) = &\int_{t_0}^{t_f}\Bigg[-\dot{\psi}^{\mathrm{T}}(t) - \psi^{\mathrm{T}}(t)A(t,u) + \lambda^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{l_3}[\chi(\bar{t}_{2i}) - \chi(\bar{t}_{2i-1})]\bar{D}_i(t) - \sum_{s=1}^{l_1}\delta(t-\breve{t}_s)\int_{t_0}^{t_f}\psi^{\mathrm{T}}(\tau)B_s(t,u)dt +\\ &+\frac{\partial f^0(x,u,t)}{\partial x}\Bigg]\Delta x(t)dt + \int_{t_0}^{T}\left[f_u^0(x,u,t) + \psi^{\mathrm{T}}(t)\left(-A_u(t,u)x(t) - \sum_{s=1}^{l_1}B_{su}(t,u)x(\breve{t}_s) - B_{0u}(t,u)\right)\right]\Delta u(t)dt +\\ &+\sum_{k=2}^{l_1+l_2+2l_3-1}\left[\psi^{\mathrm{T}}(\hat{t}_k^-) - \psi^{\mathrm{T}}(\hat{t}_k^+) + \frac{\partial F(\hat{x})}{\partial\hat{x}_k}\right]\Delta x(\hat{t}_k) + \sum_{j=1}^{l_2}\lambda^{\mathrm{T}}\tilde{D}_j\Delta x(\tilde{t}_j) + \lambda^{\mathrm{T}}\sum_{s=1}^{l_1}\breve{D}_s\Delta x(\breve{t}_s) + \psi^{\mathrm{T}}(t_f)\Delta x(t_f) -\\ &-\psi^{\mathrm{T}}(t_0)\Delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f}o\left(\|\Delta x(t)\|_{L_2^n[t_0,t_f]}\right)dt + \int_{t_0}^{t_f}o\left(\|\Delta u(t)\|_{L_2^r[t_0,t_f]}\right)dt + o\left(\|\Delta\hat{x}(\hat{t}_k)\|_{L_2^n[t_0,t_f]}\right).\end{aligned} \tag{2.20}$$

В (2.20) использованы следующие обозначения для матриц

$$A_u(t,u) = \left(\left(\frac{\partial A_{ij}(t,u)}{\partial u_s}\right)\right),\quad B_{su}(t,u) = \left(\left(\frac{\partial B_{si}(t,u)}{\partial u_s}\right)\right),\quad s = 1,2,\ldots,l_1 \quad \text{и} \quad B_{0u}(t,u) = \left(\left(\frac{\partial B_{0i}(t,u)}{\partial u_s}\right)\right)$$

соответственно размерностей $(n\times n\times r)$, $(n\times n\times r)$ и $(n\times r)$. Размерности соответствующих им транспонированных матриц равны $(n\times r\times n)$, $(n\times r\times n)$ и $(r\times n)$.

Относительно получения оценок величин

$$o\left(\|\Delta x(t)\|_{L_2^n[t_0,t_f]}\right) \quad \text{и} \quad o\left(\|\Delta\hat{x}(\hat{t}_k)\|_{L_2^n[t_0,t_f]}\right)$$

отметим следующее. Как отмечалось в разд. 1, рассматриваемую краевую задачу (1.1), (1.2) можно привести к нелокальной краевой задаче сначала с многоточечными, далее с двухточечными условиями. Двухточечные краевые задачи исследованы во многих работах при различных предположениях на функции и параметры, участвующие в постановке, в том числе и для нелинейных задач. В этих работах для разных вариантов условий получены оценки вида

$$\|\Delta x(t)\|_{L_2^n[t_0,t_f]} \le c\|\Delta u(t)\|_{L_2^r[t_0,t_f]}, \tag{2.21}$$

где значение $c = \mathrm{const} > 0$ не зависит от свободного члена в правой части уравнения (1.1), а следовательно, в данном случае от выбора допустимого управления $u(t)$ [18], [19]. Использовав методику этих работ, можно получить аналогичную оценку и для краевой задачи (1.1), (1.2).

В силу произвольности вектор-функции $\psi(t)$ потребуем, чтобы она являлась решением краевой задачи (2.12)–(2.17). Тогда из (2.20) следует, что целевой функционал задачи (1.1), (1.2), (1.5) при произвольном допустимом управлении дифференцируем и его градиент определяется формулой (2.11), где $x(t)$ и $\psi(t)$ – соответствующие этому управлению решения прямой (1.1),(1.2) и сопряженной (2.12)–(2.17) краевых задач.

Замечание. В сопряженной задаче (2.12)–(2.17) условия (2.15)–(2.17) можно ввести в само дифференциальное уравнение (2.12) и получить следующее уравнение с импульсными воздействиями

$$\dot{\psi}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t,u)\psi(t) - \sum_{s=1}^{l_1}\delta\left(t-\breve{t}_s\right)\int_{t_0}^{t_f} B_s^{\mathrm{T}}(t,u)\psi(t)dt + \sum_{i=1}^{l_3}[\chi(\overline{t}_{2i}) - \chi(\overline{t}_{2i-1})]\overline{D}_i^{\mathrm{T}}(t)\lambda +$$
$$+ \sum_{s=1}^{l_1}\left[\left(\frac{\partial F(\hat{x})}{\partial \breve{x}_s}\right)^{\mathrm{T}} + \breve{D}_s^T\lambda\right]\delta(t-\breve{t}_s) + \sum_{j=1}^{l_2}\left[\left(\frac{\partial F(\hat{x})}{\partial \tilde{x}_j}\right)^{\mathrm{T}} + \tilde{D}_j^*\lambda\right]\delta(t-\tilde{t}_j) + \sum_{i=1}^{l_3}\left(\frac{\partial F(\hat{x})}{\partial \overline{x}_i}\right)^{\mathrm{T}}\delta(t-\overline{t}_i) + f_x^0(x,u,t). \quad (2.22)$$

Задачи (2.12)–(2.17) и (2.22), (2.13), (2.14) эквиваленты, причем численные схемы и алгоритмы их решения совпадают.

Начально-краевые задачи относительно прямой и сопряженной систем дифференциальных уравнений, т.е. (1.1), (1.2), (2.12)–2.17) при произвольно заданном допустимом управлении $u(t)$ замкнуты, а именно для определения двух n-мерных вектор-функций $x(t), \psi(t)$, соответствующих им $2n$ начальных условий и n-мерного вектора λ имеется $2n$ дифференциальных уравнений (2.1), (2.12), n условий в (2.2) и $2n$ условий в (2.13), (2.14).

Важное значение для рассматриваемой задачи оптимального управления имеет

Теорема 4. *В случае выпуклости функций* $F(\hat{x})$, $f^0(x,u,\cdot)$ (*строгой выпуклости одной из них*) *по указанным аргументам и выпуклости допустимого множества* U *функционал задачи* (1.1), (1.2), (1.5) *является выпуклым* (*строго выпуклым*).

Доказательство. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – допустимые управления, а $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – соответствующие им решения краевой задачи (1.1), (1.2). В силу выпуклости множества U для произвольного $\alpha \in [0,1]$ имеет место

$$u_3(t) = \left(\alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t)\right) \in U.$$

Относительно $x_3(t)$ – решения краевой задачи (1.1), (1.2), соответствующего управлению $u_3(t)$, подстановкой в (1.1), (1.2) несложно проверить, что

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + (1-\alpha)x_2(t),$$

причем $\hat{x}_3 = x(\hat{t}) = \alpha\hat{x}_1(t) + (1-\alpha)\hat{x}_2(t)$. В силу выпуклости $F(\hat{x})$, $f^0(x,u,\cdot)$ (строгой выпуклости одной из них) имеем

$$J(u_3) = F(\hat{x}_3) + \int_{t_0}^{t_f} f^0(x_3,u_3,t)dt = F(\alpha\hat{x}_1 + (1-\alpha)\hat{x}_2) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_f} f^0(\alpha x_1(t) + (1-\alpha)x_2(t), \alpha u_1(t) + (1-\alpha)u_2(t), t)dt \le (<)\alpha F(\hat{x}_1) + (1-\alpha)F(\hat{x}_2) +$$
$$+ \alpha\int_{t_0}^{t_f} f^0(x_1,u_1)dt + (1-\alpha)\int_{t_0}^{t_f} f^0(x_2,u_2)dt = \alpha J(u_1) + (1-\alpha)J(u_2).$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

Отметим, что, пользуясь утверждениями теорем 3 и 4, используя различные известные технологии исследования задач оптимального управления (см. например, [18]–[22]), можно получить различные формы необходимых и достаточных условий оптимальности первого порядка.

3. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Пользуясь полученной формулой градиента функционала (2.22), для численного решения задачи можно использовать итерационные методы оптимизации первого порядка. В частности, нами будет использован метод проекции градиента [20], [22]

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) - \alpha_k \operatorname{grad} J(u^k(t))), \quad k = 0,1,\ldots,$$
$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha\ge 0} J(P_U(u^k(t) - \alpha \operatorname{grad} J(u^k(t)))). \quad (3.1)$$

Здесь $P_U(v)$ – оператор проектирования управления $v \in E^r$ на допустимое множество управлений U, $\alpha_k \geq 0$ – шаг одномерной минимизации. Отметим, что в случае простых допустимых множеств U (параллелепипеда, шара, гиперплоскостей) оператор проектирования на них строится конструктивно.

Как видно из (2.11), вычисление градиента функционала при каком-либо допустимом управлении $u(t)$ связано с проблемой решения прямой задачи относительно неавтономной системы нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями (1.1), (1.2) и проблемой решения сопряженной краевой задачи (2.12)–(2.17), в которой участвуют неизвестный вектор λ и интегральное слагаемое в правой части дифференциального уравнения.

Для численного решения прямой задачи (1.1), (1.2) при заданном управлении $u(t)$ может быть использован, например, подход, предложенный в работах [6], [7]. Он основан на известной идее переноса условий из одного конца с другой [16].

Учитывая специфику условий (1.2), предложенный в работах [6], [7] подход осуществляет последовательный сдвиг условий (1.2) вправо (или влево). На каждом этапе проводится исключение одного из значений фазового состояния $x(\tilde{t}_j)$, $x(\bar{t}_k)$, $j = 1,2,\ldots,l_2$, $k = 1,2,\ldots,l_3$, участвующего в этом условии, оставляя в условиях точки нагружения $\breve{x}_i$, $i = 1,2,\ldots,l_1$. При этом важно, что не требуется увеличения размерности фазовой переменной для исключения интегральных слагаемых как для основной задачи, так и вспомогательных задач Коши.

После достижения одного из концов, вместо (1.2) получается система (nl_1) линейных условий (алгебраических уравнений), в которых участвуют лишь значения фазового состояния в точках нагружения. После решения этой системы решается задача Коши относительно системы (1.1), т.к. значения фазовой переменной в точках нагружения и условия на одном из концов уже известны.

Для решения сопряженной задачи (2.12)–(2.17) можно использовать подход, в основе которого лежит схема, предложенная в [6], [14], [17].

В начале вводятся l дополнительных n-мерных векторов фазовых переменных $\psi_s(t)$, $s = 1,2,\ldots,l_1$, являющихся решением следующих задач Коши:

$$\dot{\psi}_s(t) = B_s^{\mathrm{T}}(t,u)\psi(t), \quad \psi_s(t_0) = 0, \quad s = 1,2,\ldots,l_1. \tag{3.2}$$

Тогда система (2.12) приводится к нагруженной в одной точке $t = t_f$ системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -A^{\mathrm{T}}(t,u)\psi(t) - \sum_{s=1}^{l_1}\psi_s(t_f)\delta(t-\breve{t}_s) + \sum_{i=1}^{l_3}[\chi(\bar{t}_{2i}) - \chi(\bar{t}_{2i-1})]\bar{D}_i^{\mathrm{T}}(t)\lambda + f_x^0(x,u,t). \tag{3.3}$$

Далее используется описанная выше схема переноса условий из одного конца в другой относительно системы дифференциальных уравнений, в которой участвует неизвестный параметр $\lambda \in R^n$. При этом число заданных нелокальных условий в задаче должно быть равно $2n$. При осуществлении последовательного переноса условий (2.13), (2.14) из одного конца в другой учитываются условия скачков (2.15), (2.16) для значений состояния. Участие в условиях фазовых переменных в точке нагружения t_f : $\psi(t_f)$, $\psi_s(t_f)$, $s = 1,2,\ldots,l_1$ и вектора λ на всех этапах переноса сохраняется до достижения одного из концов. Значения фазовой переменной в точках $\tilde{t}_i$, $i = 1,2,\ldots,l_2$, $t \in [\tilde{t}_{2j}, \tilde{t}_{2j-1}]$, $j = 1,2,\ldots,l_3$ в условиях не сохраняются. В результате получается система алгебраических уравнений порядка $(l_1+2)n$ относительно состояний фазовых переменных в точке нагружения $t = t_f$ и неизвестного вектора λ.

Подставляя решение алгебраический системы, т.е. значения фазовых переменных в точке нагружения $\psi(t_f)$, $\psi_s(t_f)$, $s = 1,2,\ldots,l_1$ и вектора λ в (3.1), (3.2) и (2.14) (или (2.13), если условия переносились влево), решается задача Коши относительно системы (2.12) справа налево (или слева направо) с учетом в процессе счета скачков (2.15)–(2.17).

Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении следующей задачи оптимального управления, описываемой системой нагруженных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= tx_1(t) - 2x_2(t) + tu - 2x_1(0.3) + x_2(0.3) + x_1(0.8) + 3x_2(0.8) - t^2 - 1.41, \\ \dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) + tx_2(t) + x_1(0.3) + 2x_2(0.3) + x_1(0.8) - x_2(0.8) - t^3 - 5t - 1.74, \quad t \in [0,1], \end{aligned} \tag{3.4}$$

с условиями

$$\int_0^{0.2} \bar{D}_1(\tau)x(\tau)d\tau + \breve{D}_1 x(0.3) + \tilde{D}_1 x(0.5) + \breve{D}_2 x(0.8) + \int_{0.7}^{1} \bar{D}_2(\tau)x(\tau)d\tau = L_0. \tag{3.5}$$

Здесь

$$\bar{D}_1(\tau) = \begin{pmatrix} 2 & \tau - 1 \\ \tau & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{D}_2(\tau) = \begin{pmatrix} \tau & 3 \\ 1 & -2\tau \end{pmatrix}, \quad \breve{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\breve{D}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 7.4177 \\ 4.2934 \end{pmatrix}.$$

Из (3.4), (3.5) следует $\bar{t}_1 = t_0 = 0$, $\bar{t}_2 = 0.2$, $\bar{t}_3 = 0.7$, $\bar{t}_4 = t_f = 1$, $\tilde{t}_1 = 0.5$, а точки нагружения – $\breve{t}_1 = 0.3$, $\breve{t}_2 = 0.8$.

Целевой функционал имеет вид

$$\begin{aligned} J(u) = \int_0^1 [x_1(t) - 2u(t) + 3]^2\,dt + [x_1(0.3) - 1.6]^2 + 2x_1^2(0.5) + [2x_2(0.5) - 2.5]^2 + \\ + [x_2(0.8) - 1.64]^2 + [x_1(1) - 1]^2 + [x_2(1) - 2]^2 \to \min. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Точным решением задачи является управление $u^*(t) = t + 1$ и фазовые переменные – $x_1^*(t) = 2t - 1$, $x_2^*(t) = t^2 + 1$, при этом $J(u^*) = 0$.

Согласно теореме 3 сопряженная задача имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{\psi}_1(t) = -t\psi_1(t) - 3\psi_2(t) - (-2\psi_1(t) + \psi_2(t))\delta(t - 0.3) - (\psi_1(t) + \psi_2(t))\delta(t - 0.8) + \\ + (2\lambda_1 + t\lambda_2)(\chi(0.2) - \chi(0)) + (t\lambda_1 + \lambda_2)(\chi(1) - \chi(0.7)) + 2(x_1(t) - 2u(t) + 3), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \dot{\psi}_2(t) = 2\psi_1(t) - t\psi_2(t) - (\psi_1(t) + 2\psi_2(t))\delta(t - 0.3) - (3\psi_1(t) - \psi_2(t))\delta(t - 0.8) + \\ + ((t - 1)\lambda_1 + 3\lambda_2)(\chi(0.2) - \chi(0)) + (3\lambda_1 - 2t\lambda_2)(\chi(1) - \chi(0.7)), \end{gathered}$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0) = 0, \quad \psi_1(1) = -2[x_1(1) - 1], \quad \psi_2(1) = -2[x_2(1) - 2],$$

для промежуточной точки $\tilde{t}_1 = 0.5$ имеют место условия (2.16)

$$\psi_1(0.5^+) - \psi_1(0.5^-) = 4x_1(0.5) + 3\lambda_1 + 2\lambda_2,$$

$$\psi_2(0.5^+) - \psi_2(0.5^-) = 2[2x_2(0.5) - 2.5] + 4\lambda_1 + \lambda_2.$$

В точках нагружения $\breve{t}_1 = 0.3$ и $\breve{t}_2 = 0.8$ имеют место условия скачка (2.15):

$$\psi_1(0.3^+) - \psi_1(0.3^-) = 2(x_1(0.3) - 1.6) + \lambda_1 - 3\lambda_2,$$

$$\psi_2(0.3^+) - \psi_2(0.3^-) = 2\lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\psi_1(0.8^+) - \psi_1(0.8^-) = -\lambda_1 + 2\lambda_2,$$

$$\psi_2(0.8^+) - \psi_2(0.8^-) = 2[2x_2(0.8) - 1.64] + \lambda_2.$$

Градиент функционала согласно (2.22) определяется формулой:

$$\operatorname{grad} J(u) = -2[x_1(t) - 2u(t) + 3] - t\psi_1(t). \tag{3.7}$$

Таблица 1. Начальные значения управления, фазовых переменных, нормированных градиентов, вычисленных по предложенным формулам и по формуле (3.8)

t	$u^{(0)}(t)$	$x_1^{(0)}(t)$	$x_2^{(0)}(t)$	$\psi_1^{(0)}(t)$	$\psi_2^{(0)}(t)$	$(\nabla^{(3.7)}J)$	$(\nabla^{(3.8)}J)$	
							$\delta = 10^{-1}$	$\delta = 10^{-3}$
0	−1.0000	−0.8238	0.6623	−97.2549	83.5954	−0.0668	−0.0660	−0.0667
20	−0.9900	−0.5713	0.7323	−117.7114	61.7170	−0.0713	−0.0706	−0.0712
40	−0.9600	−0.3508	0.8312	−129.6432	36.2105	−0.0773	−0.0765	−0.0773
60	−0.9100	−0.1647	0.9505	−64.1513	16.9638	−0.0851	−0.0847	−0.0850
80	−0.8400	−0.0135	1.0809	−31.4629	7.3786	−0.0932	−0.0923	−0.0930
100	−0.7500	0.1032	1.2126	−15.1017	2.6989	−0.1012	−0.1096	−0.1002
120	−0.6400	0.1878	1.3355	−6.1880	1.7225	−0.0511	−0.0505	−0.0510
140	−0.5100	0.2445	1.4387	−2.5005	0.8187	−0.0577	−0.0573	−0.0577
160	−0.3600	0.2797	1.5113	−1.6399	0.3612	−0.0602	−0.0592	−0.0599
180	−0.1900	0.3026	1.5424	−0.7806	0.0945	−0.0588	−0.0581	−0.0586
200	0.0000	0.3258	1.5214	−0.0000	0.0000	−0.0579	−0.0572	−0.0578

Таблица 2. Точное и полученное на седьмой итерации решения задачи

t	Точное решение			Полученное решение				
	$u^*(t)$	$x_1^*(t)$	$x_2^*(t)$	$u^{(7)}(t)$	$x_1^{(7)}(t)$	$x_2^{(7)}(t)$	$\psi_1^{(7)}(t)$	$\psi_2^{(7)}(t)$
0	1.0000	−1.0000	1.0000	0.9994	−1.0011	0.9976	−0.0057	0.0122
20	1.1000	−0.8000	1.0100	1.0997	−0.8006	1.0074	−0.0092	0.0107
40	1.2000	−0.6000	1.0400	1.2000	−0.6001	1.0372	−0.0119	0.0084
60	1.3000	−0.4000	1.0900	1.3005	−0.3995	1.0872	−0.0061	0.0065
80	1.4000	−0.2000	1.1600	1.4010	−0.1989	1.1573	−0.0032	0.0054
100	1.5000	0.0000	1.2500	1.5016	0.0016	1.2476	−0.0018	0.0047
120	1.6000	0.2000	1.3600	1.6006	0.2017	1.3581	0.0007	−0.0002
140	1.7000	0.4000	1.4900	1.7012	0.4018	1.4888	0.0003	−0.0001
160	1.8000	0.6000	1.6400	1.8016	0.6013	1.6396	0.0002	−0.0000
180	1.9000	0.8000	1.8100	1.9019	0.8017	1.8107	0.0001	−0.0000
200	2.0000	1.0000	2.0000	2.0021	1.0020	2.0020	−0.0000	−0.0000

Итерационная процедура (3.1) проводилась для разных начальных управлений $u^0(t)$ с точностью по функционалу $\varepsilon = 10^{-5}$. На каждой итерации (3.1) вспомогательные задачи Коши, возникающие при использовании метода сдвига условий как для решения прямой (1.1)–(1.2), так и сопряженной задач (2.12)–(2.17) решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.005$.

Проведено сравнение значений компонент градиента, вычислительных по формуле (3.7) и с использованием конечноразностной центральной схемы:

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_i} \approx \frac{J(u_i + \delta e_i) - J(u_i - \delta e_i)}{2\delta}. \tag{3.8}$$

Здесь $u_i = u(\tau_i)$, $\tau_i = ih - i$-й узел временной сетки. Величина δ варьировалась с целью получения лучших результатов.

В табл. 1 приведены величины эвклидовых норм градиента функционала $J(u)$ в моменты времени $t_i = 20i$, $i = 0,1,\ldots,10$, вычисленные на первой итерации по аналитической формуле (3.7):

$\left\|\nabla^{(3.7)}J(u)\right\|$ и разностной схеме (3.8): $\left\|\nabla^{(3.8)}J(u)\right\|$. В этой же таблице приведены результаты решения прямой и сопряженной задач при начальном управлении $u^0(t) = t^2 - 1$.

В табл. 2 приведены результаты, полученные на седьмой итерации процедуры (3.1) и точные оптимальные значения управления и фазовой переменной. При этом значения функционала в начальной точке было равно $J(u^0) = 18.813$, после первой итерации $J(u^1) = 7.895$, а вектор параметров $\lambda_1 = 0.377$, $\lambda_2 = 0.188$. Значения функционала по завершению итераций были равны: $J(u^2) = 0.104$, $J(u^3) = 0.0308$, $J(u^4) = 0.0189$, $J(u^5) = 0.00017$, $J(u^6) = 0.00001$, $J(u^7) = 10^{-6}$.

Как видно из табл. 2, можно считать, что итерационный процесс (3.1) сходился как по функционалу, так и по управлению.

Аналогичные результаты были получены для других начальных точек $u^0(t)$ процедуры (3.1).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод численного решения задач оптимального управления системами нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями.

Предложенные в работе формулы, схемы проведения вычислений позволяют учесть все особенности, которые встречаются при вычислении градиента функционала. В целом же предложенный подход позволяет использовать для решения рассматриваемых задач оптимального управления богатый арсенал численных методов оптимизации первого порядка и соответствующих стандартных программных средств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kneser A.* Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der matem. Phusik, 1923.
2. *Lichtenstein L.* Vorlesungen über einege Klassen nichtlinear Integralgleichungen und Integraldifferentialgleihungen nebst Anwendungen. Berlin: Springer, 1932.
3. *Гюнтер Н.М.* К общей теории интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. С. 215–219.
4. *Яковлев М.Н.* Оценки решений систем нагруженных интегро-дифференциальных уравнений, подчиненных многоточечным и интегральным краевым условиям // Численные методы и вопросы организации вычислений. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 124, Изд-во Наука, Ленинград. отд. Л., 1983. С. 131–139.
5. *Джумабаев Д.С., Илиясова Г.Б.* Об одной численной реализации метода параметризации решения линейной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения // Известия НАН РК. Серия физ.-матем. 2014. № 2. С. 275–280.
6. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. 2004. V. 44. № 9. P. 1505–1515.
7. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. 2014. V. 54. № 7. P. 1096–1109.
8. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. № 4. P. 634–644.
9. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.
10. *Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 7. С. 1223–1231.
11. *Дженалиев М.Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.
12. *Алиханов А.А., Березков А.М., Шхануков-Лафишев М.Х.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1619–1628.
13. *Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Optimizing placement of the control points at synthesis of the heating process control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. № 9. P. 1585–1599.
14. *Айда-заде К.Р.* Численный метод восстановления параметров динамической системы // Кибернетика и системный анализ. Киев. 2004. № 1. С. 101–108.

15. *Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Solution to a class of inverse problems for system of loaded ordinary differential equations with integral conditions // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2016. V. 24. № 5. P. 543–558.

16. *Абрамов А.А.* Вариант метода прогонки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 349–352.

17. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* Control problem with non-separated multipoint and integral conditions // J. of Automation and Information Scis. 2013. V. 45. № 3. P. 34–52.

18. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикл. матем. и механ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.

19. *Васильева О.О., Мизукaми К.* Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Известия АН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 95–100.

20. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. С. 824.

21. *Антипин А.С.* Терминальное управление краевыми моделями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 2. С. 257–285.

22. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.