ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 5, с. 829–837

УДК 519.6:537.812

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2019 г. Л. А. Алексеева[1,*], Б. Н. Алипова[2,]**

([1] 480021 Алматы, ул. Пушкина 125, Ин-т матем. и матем. моделирования МОН РК, Казахстан;
[2] Алматы, ул. Малгаева, 34/1, Международный ун-т информационных технологий, Казахстан)
**e-mail: alexeeva@math.kz;*
***e-mail: b.alipova@iitu.kz*

Поступила в редакцию 19.12.2017 г.
Переработанный вариант 30.08.2018 г.
Принята к публикации 11.01.2019 г.

С использованием модели связанной термоупругости исследуется динамика термоупругого полупространства при плоской деформации при действии нестационарных массовых сил и тепловых источников. В пространстве преобразований Лапласа по времени построен тензор Грина краевой задачи для полуплоскости со свободной от напряжений и тепловых потоков границей. Определены перемещения и температура среды для произвольных массовых сил и тепловых источников. Библ. 15.

Ключевые слова: термоэластодинамика, перемещения, напряжения, температура, тензор Грина, термоупругое полупространство, плоская деформация.

DOI: 10.1134/S004446691905003X

При изучении сейсмических процессов в земной коре для учета реальных свойств породного массива используются различные математические модели механики деформируемых твердых тел. Наиболее изучены процессы распространения и дифракции волн в упругих средах при действии сосредоточенных и распределенных источников различного вида. Теоретические исследования в этом направлении на основе классических методов математической физики имеют довольно обширную библиографию (см. [1]–[8]).

Реальный породный массив, помимо упругих, обладает целым рядом других свойств, которые оказывают существенное влияние на процессы распространения сейсмических волн и его напряженно-деформированное состояние. Поэтому усложнение математической модели для более полного учета действующих факторов при изучении сейсмических процессов является абсолютно необходимым. Одним из таковых является температура массива, которая существенно влияет на его напряженно-деформированное состояние при статических и динамических воздействиях.

В связи со сложностью построения решений системы уравнений движения термоупругой среды, которая относится к классу систем смешанного гиперболо-параболического типа, обычно уравнения упрощают, пренебрегая воздействием упругих деформаций на температурное поле среды. Для такой модели, которая получила название *несвязанной термоупругости*, вначале можно определить температурное поле, решая хорошо изученное параболическое уравнение теплопроводности, а затем определить перемещения или скорости точек среды, используя классические уравнения динамики упругого тела, в которые градиент температурного поля входит как массовая сила. Но даже для такой модели класс решенных краевых задач весьма невелик.

Наиболее полное исследование уравнений движения термоупругих сред и их решений при действии нестационарных силовых и тепловых источников возмущений представлено в работах В. Новацкого [4], В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелешвили, Т.В. Бурчуладзе [5] и др.

В данной статье рассматривается волновая динамика термоупругого полупространства при нестационарных силовых и тепловых воздействиях, для чего используется модель *связанной термоупругости*, которая учитывает взаимное влияние как температуры на напряженно-деформированное состояние среды, так и скорости упругой деформации на температурное поле. В пространстве преобразований Лапласа построен тензор Грина для термоупругого полупространства, описывающего перемещения среды при действии мгновенных сосредоточенных силовых и тепловых источников. На его основе построено обобщенное решение задачи динамики термоупругого полупространства в условиях плоской деформации при действии произвольных массовых сил и тепловых источников.

Схожие задачи для упругих и термоупругих сред в двумерной и трехмерной постановках решались в работах H.G. Georgiadis и др. [7], [8], M. Raoofian Naeeni [9], Mahmoodi Kordkhieli H. [10]. Однако при этом использовалась модель несвязанной термоупругости.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОЭЛАСТОДИНАМИКИ

Изотропная термоупругая среда характеризуется конечным числом положительных термодинамических параметров: массовой плотностью ρ, упругими постоянными Ламе λ и μ, а также термоупругими константами γ, η, κ. Все константы положительные.

Динамика термоупругой среды в декартовой системе координат описывается системой дифференциальных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа [1], [2]

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\mu u_{i,jj}+\gamma\theta_{,i}+F_i=\rho\ddot{u}_i,\\ \Delta\theta-\frac{1}{\kappa}\dot{\theta}-\eta\dot{u}_{j,j}+\frac{1}{\kappa}Q=0,\end{gathered}\tag{1}$$

$x\in R^N$, $t\geq 0$. Здесь $u_i(x,t)$ – компоненты вектора перемещений, температура $\theta(x,t)=u_{N+1}(x,t)$; $F(x,t)=F_ie_i$ – массовые силы, e_i – орты декартовой системы координат; $Q(x,t)$ – тепловой источник, $i,j=1,\ldots,N$ (в трехмерном случае $N=3$, в случае плоской деформации $N=2$).

Параметры Ламе: $\lambda=\dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Постоянная $\gamma=(3\lambda+2\mu)\alpha_t$ связана со свойством расширения свободного элемента изотропного тела при возрастании температуры. Коэффициент температуропроводности $\kappa=\lambda_0 b_\varepsilon$ – физический параметр, характеризующий скорость выравнивания температуры в веществе, λ_0 – коэффициент теплопроводности, b_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации. Величина $\eta=\dfrac{\gamma T_0}{\lambda_0}$, где T_0 – текущая абсолютная температура среды в естественном (начальном) состоянии, измеряемая в градусах Кельвина (K).

Тензор напряжений σ_{ij} связан с перемещениями $u(x,t)$ и температурой $\theta(x,t)$ соотношением Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{ij}=(\lambda u_{k,k}+\gamma\theta)\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}),\tag{2}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Всюду символом после запятой обозначены производные по координатам: $u_{i,j}\equiv\partial u_i/\partial x_j$, дифференцирование по времени t обозначено точкой над символом $\dot{u}=\partial u/\partial t$. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование (тензорная свертка).

2. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Здесь рассмотрим термоупругое полупространство в условиях плоской деформации: $x=(x_1,x_2)$, $i,j=1,2$. Обозначим $\Pi=\{x\in R^2: x_1<h\}$ – полуплоскость, ее граница: $x_1=h$, $h>0$.

Предполагается, что начальное состояние среды известно:

$$\begin{gathered}u_i(x,0)=u_i^0(x),\quad \theta(x,0)=\theta^0(x),\\ \dot{u}_i(x,0)=\dot{u}_i^0(x),\quad i=1,2,\end{gathered}\tag{3}$$

и $u_i^0(x),\theta^0(x)\in C(\Pi)\cap L_1(\Pi)$, $\dot{u}^0(x)\in L_1(\Pi)$.

Граница полуплоскости свободна от действия поверхностных сил и тепловых потоков:

$$\sigma_{i1}(x,t)=0,\quad \partial\theta(x,t)/\partial x_1=0,\quad j=1,2,\quad x_1=h.\tag{4}$$

Действующие массовые силы $F(x,t)$ и тепловые источники $Q(x,t)$ известны. Предполагается, что они интегрируемы на П и допускают преобразование Лапласа по времени. Для регулярных функций оно имеет вид:

$$\bar{F}(x,p)=\int_0^{\infty}F(x,t)e^{-pt}dt,\qquad \operatorname{Re}p>0,$$

$$F(x,t)=(2\pi)^{-1}\int_{p_0-\infty}^{p_0+\infty}\bar{F}(x,p)e^{pt}dp,\qquad p_0>0.$$

Заметим, что действующие источники возмущений могут описываться сингулярными силами из класса обобщенных функций медленного роста по времени. Такими функциями можно описать ударные сейсмические воздействия на породный массив, характерные для землетрясений естественного и искусственного происхождения. Для сингулярных обобщенных функций следует использовать определение преобразования Лапласа обобщенных функций [11].

Система уравнений (1) является гиперболо-параболической. Она имеет характеристические поверхности в пространстве-времени, на которых производные решений разрывны. Им соответствуют подвижные волновые фронты, которые описывают ударные термоупругие волны. Ударные волны, возникающие в среде, имеют скачки напряжений, скоростей и тепловых потоков на фронтах. В [12], [13] получены условия на фронтах ударных волн и доказана единственность решений четырех классических нестационарных краевых задач термоупругости с учетом ударных термоупругих волн.

Условия на фронтах ударных волн имеют вид:

$$\begin{gathered} n_j[\sigma_{ij}]_{F_t}=-\rho c_k[\dot{u}_i]_{F_t},\qquad j=1,2,\\ [\theta]_{F_t}=0,\qquad [\dot{\theta}]_{F_t}=\frac{\rho\kappa n_j}{c_k}[\dot{u}_j]_{F_t},\qquad k=1,2. \end{gathered}\tag{5}$$

Здесь $n=\{n_1,n_2\}$ – единичный вектор нормали к волновому фронту F_t, который распространяется в термоупругой среде с одной из следующих скоростей:

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\qquad c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Эти скорости совпадают со скоростями распространения дилатационных и сдвиговых волн в изотропных упругих средах. Первое условие в (5) является законом сохранения импульса на фронте волны. Второй подтверждает, что температура непрерывна на волновом фронте, но ее производная по t терпит скачок, который пропорционален скачку нормальной компоненты скорости перемещений среды на фронте ударной волны.

Требуется найти перемещения, температуру и напряжения термоупругой полуплоскости при действии различных массовых сил и тепловых источников.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕНЗОРА ГРИНА СВОБОДНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Сначала определим матрицу фундаментальных решений $V_i^k(x,t)$ уравнений термоупругости (1) для свободной полуплоскости. Эта матрица удовлетворяет уравнениям под действием импульсных сосредоточенных массовых сил и тепловых источников, которые описываются сингулярными дельта-функциями:

$$\begin{gathered} L_{ij}(\partial_1,\partial_2,\partial_t)V_j^k(x,t)=\delta_i^k\delta(x)\delta(t),\qquad k=1,2,3,\qquad i=1,2,\\ L_{3j}(\partial_1,\partial_2,\partial_t)V_j^k(x,t)=\delta_3^k\delta(x)\delta(t),\qquad j=1,2,3. \end{gathered}\tag{6}$$

Здесь δ_j^k – символ Кронекера. Дифференциальные операторы, как следует из (1), имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} L_{ij}=(\lambda+\mu)\partial_i\partial_j+(\mu\Delta-\rho\partial_t\partial_t)\delta_{ij}-\gamma\delta_{j3}\partial_i,\\ L_{3j}=\delta_{j3}(\Delta-\kappa^{-1}\partial_t)-\eta(1-\delta_{j3})\partial_t\partial_j. \end{gathered}$$

Вычислим граничные условия (4) на свободной поверхности с использованием закона Дюамеля–Неймана при $x_1 = h$

$$\Sigma_{i1}^m(x,t) = (\lambda V_{l,l}^m - \gamma V_3^m)\delta_{i1} + \mu(V_{i,1}^m + V_{1,i}^m) = 0, \quad l = 1,2, \tag{7}$$

$$\frac{\partial V_3^m}{\partial x_1} = 0, \tag{8}$$

здесь $\Sigma_{ij}^m(x,t)$ – напряжения, порождаемые перемещениями $V_j^m(x,t)$ при фиксированном m ($m = 1,2,3$):

$$\Sigma_{ij}^m = \lambda V_{l,l}^m \delta_{ij} - \gamma V_3^m \delta_{ij} + \mu(V_{i,j}^m + V_{j,i}^m), \quad i,j,l = 1,2. \tag{9}$$

Условие (8) указывает на отсутствие теплового потока на границе.

Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородной системы уравнений. Назовем матрицу фундаментальных решений *тензором Грина*, если он удовлетворяет граничным условиям (7), (8) и условиям излучения и затухания на бесконечности:

$$V_i^k(x,t) = 0 \quad \forall t < 0, \tag{10}$$

$$V_i^k(x,t) \to 0 \quad \forall t > 0, \quad \|x\| \to \infty. \tag{11}$$

Также позже определим дополнительные условия излучения, которые описывают отраженные от границы полуплоскости волны.

Для произвольных массовых сил и тепловых источников, используя известные свойства фундаментальных решений, решение представимо в форме тензорно-функциональной свертки:

$$\begin{gathered} u_i(x,t) = V_i^k(x,t) * \hat{F}_k(x,t) + V_i^3(x,t) * \hat{Q}(x,t), \quad i = 1,2, \\ \theta(x,t) = V_3^k(x,t) * \hat{F}_k(x,t) + V_3^3(x,t) * \hat{Q}(x,t). \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь

$$\hat{F}_k = F_k(x,t)H(t) + \rho u_k^0(x)\dot{\delta}(t) + \rho \dot{u}_k^0(x)\dot{\delta}(t),$$
$$\hat{Q}_k = Q_k(x,t)H(t) + \left(\kappa^{-1}\theta^0(x) + \eta \operatorname{div} u^0(x)\right)\delta(t), \quad k = 1,2.$$

Если тензор Грина известен, то формулы (12) позволяют моделировать динамику термоупругой полуплоскости для широкого класса массовых сил и тепловых источников, которые описываются функциями, допускающими такие свертки.

4. ТЕНЗОР ГРИНА И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

Представим $V_i^k(x,t)$ как сумму двух тензоров:

$$V_i^k = U_i^k(x,t) + \Pi_i^k(x,t), \tag{13}$$

где тензор U_i^k является тензором Грина бесконечной термоупругой плоскости, который удовлетворяет уравнению (6) и условиям (10), (11). Аналитическое выражение для его компонент может быть построено только в пространстве преобразований Лапласа по времени $\bar{U}_i^k$ (см. [14]):

$$\bar{U}_i^k(x,p) = \frac{1}{2\pi\mu}[\bar{F}_1(r,p)\delta_i^k - \bar{F}_2(r,p)r_{,i}\, r_{,k}], \quad \bar{U}_3^3(x,p) = \frac{1}{2\pi\kappa}\bar{F}_4(r,p),$$

$$\bar{U}_i^3(x,p) = \frac{m}{2\pi\kappa}\bar{F}_3(r,p)r_{,i}, \quad \bar{U}_3^k(x,p) = \frac{\eta p}{2\pi(\lambda + 2\mu)}\bar{F}_3(r,p)r_{,k},$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $r_{,k} = x_k/r$. Динамические функции $\bar{F}_j(r,p)$ ($j = \overline{1,4}$) имеют следующий вид:

$$\bar{F}_1(r,p) = K_0(\beta r) + \frac{1}{\beta r}\left[K_1(\beta r) - \frac{\zeta_1}{\beta}K_1(\zeta_1 r)\right] + \frac{\zeta_1^2 - \alpha^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\frac{\zeta_2}{\beta^2 r}\left[K_1(\zeta_2 r) - \frac{\zeta_1}{\zeta_2}K_1(\zeta_1 r)\right],$$

$$\bar{F}_2(r,p) = \left[K_2(\beta r) - \frac{\zeta_1^2}{\beta^2}K_2(\zeta_1 r)\right] + \frac{\zeta_1^2 - \alpha^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\frac{\zeta_2^2}{\beta^2}\left[K_2(\zeta_2 r) - \frac{\zeta_1^2}{\zeta_2^2}K_2(\zeta_1 r)\right],$$

$$\bar{F}_3(r,p) = -\frac{\zeta_2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}\left[K_1(\zeta_2 r) - \frac{\zeta_1}{\zeta_2}K_1(\zeta_1 r)\right],$$

$$\bar{F}_4(r,p) = \frac{\alpha^2 - \zeta_1^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}K_0(\zeta_1 r) - \frac{\alpha^2 - \zeta_2^2}{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}K_0(\zeta_2 r),$$

где $K_0(\ldots)$, $K_1(\ldots)$ функции Макдональда. Здесь $\alpha = pc_1$, $\beta = pc_2$, $q = p\kappa$, $m = \gamma(\lambda + 2\mu)$.

Величины ζ_i $(i = 1, 2, 3)$ – это корни характеристического уравнения:

$$\det\{L_{kj}(-i\xi, p)\} = 0, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2),$$

которое имеет вид:

$$c_2^2\left(\xi^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right)\left\{\left(\xi^2 + \frac{p^2}{c_1^2}\right)\left(\xi^2 - \frac{p}{\kappa}\right) - \xi^2\frac{p\varepsilon}{\kappa}\right\} = 0, \quad \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2,$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma\eta\kappa}{\lambda + 2\mu}.$$

Это характеристическое уравнение имеет 6 корней:

$$\zeta_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{p(1+\varepsilon)}{\kappa} - \frac{p^2}{c_1^2} + \sqrt{\left(\frac{p(1+\varepsilon)}{\kappa} - \frac{p^2}{c_1^2}\right)^2 + \frac{4ip^3}{\kappa c_1^2}}\right],$$

$$\zeta_2^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{p(1+\varepsilon)}{\kappa} - \frac{p^2}{c_1^2} - \sqrt{\left(\frac{p(1+\varepsilon)}{\kappa} - \frac{p^2}{c_1^2}\right)^2 + \frac{4ip^3}{\kappa c_1^2}}\right],$$

$$\zeta_3^2 = -\frac{p^2}{c_2^2}.$$

Тензор Π_i^k описывает термоупругие волны, отраженные от плоской границы. Он удовлетворяет однородным уравнениям термоупругости (1), и, как следует из (7), (8), граничным условиям при

$$\lambda\Pi_{k,k}^m\delta_{i1} + \mu(\Pi_{i,1}^m + \Pi_{1,i}^m) - \gamma\Pi_{3,i}^m = -\Gamma_{i1}^m(h, x_2, p), \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

$$\Pi_{3,1}^m = -\partial_1 U_3^m(h, x_2, p), \quad x_1 = h. \tag{15}$$

Здесь Γ_{i1}^m – термоупругие напряжения, генерируемые фундаментальным тензором U_i^k на границе полуплоскости $(x_1 = h)$ с нормалью $n = (1, 0)$:

$$\Gamma_i^m(x,t,n) = (\lambda U_{k,k}^m - \gamma U_3^m)n_i + \mu n_j(U_{i,j}^m + n_i U_{j,i}^m). \tag{16}$$

5. ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЗОРА Π_j^m В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Для определения Π_j^m найдем его вид в пространстве преобразования Лапласа, где этот тензор должен удовлетворять однородным уравнениям:

$$\begin{aligned} &L_{ij}(\partial_1, \partial_2, p)\bar{\Pi}_j^k(x_1, x_2, p) = 0, \\ &L_{3j}(\partial_1, \partial_2, p)\bar{\Pi}_j^k(x_1, x_2, p) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

и условиям (14), (15) на границе. Для его построения используем прямое (*) и обратное преобразование Фурье по горизонтальной координате x_2 в (17). Для регулярных вектор-функций $\bar{u}(x_1, x_2, p)$

$$\bar{u}^*(x_1, \xi, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x_1, x_2, p)\, e^{i\xi x_2} dx_2,$$

$$\bar{u}(x_1, x_2, p) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^*(x_1, \xi, p)\, e^{-i\xi x_2} d\xi.$$

В пространстве преобразований Фурье–Лапласа получаем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\left[(\lambda + 2\mu)\frac{d^2}{dx_1^2} - \mu\xi^2 - \rho p^2\right]\bar{u}_i^* + i\xi(\lambda + \mu)\frac{d}{dx_1}\bar{u}_2^* - \gamma\frac{d}{dx_1}\bar{u}_3^* = 0, \\
i\xi(\lambda + \mu)\frac{d}{dx_1}\bar{u}_1^* + \left[-(\lambda + 2\mu)\xi^2 + \mu\frac{d}{dx_1^2} - \rho p^2\right]\bar{u}_2^* - i\xi\gamma\bar{u}_3^* = 0, \\
-\eta p\frac{d}{dx_1}\bar{u}_1^* - i\xi\mu p\bar{u}_2^* + \left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2 - \frac{p}{\kappa}\right)\bar{u}_3^* = 0
\end{gathered} \tag{18}$$

с краевыми условиями на $x_1 = h$

$$\lambda\bar{u}_{k,k}^*\delta_{i1} + \mu(\bar{u}_{i,1}^* + \bar{u}_{i,1}^*) - \gamma\bar{u}_{3,i}^* = -\Gamma_{i1}^{m*}(h, -i\xi, p), \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

$$\bar{u}_{3,i}^* = -\partial_1\bar{U}_3^{m*}(h, -i\xi, p). \tag{20}$$

Здесь, для упрощения записи формул, мы обозначили через $\bar{u}_j^*$ как тензор преобразования Фурье–Лапласа Π_j^k с фиксированным индексом k.

Граничные условия (14), (15) в пространстве преобразования Лапласа имеют вид (если $x_1 = h$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (B_{ij}(\partial_1 - i\xi, p)\bar{u}_j^*(x_1, \xi, p) + a_l^m(\xi, p)) \exp(-ix_2\xi)\, d\xi = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{21}$$

где $B_{ij}(\partial_1, \partial_2, p)$ – соответствующий полиномиальный матричный дифференциальный оператор, a_j^m – преобразование Фурье граничных функций

$$a_l^m = \bar{\Gamma}_{i1}^{m*}(h, \xi, p), \tag{22}$$

где

$$\bar{\Gamma}_{11}^{1*} = \frac{\exp_1}{4\pi}\left\{\gamma A_3\sqrt{\xi^2 + \zeta_1^2} - \frac{A_1}{\mu\beta^2}(2\mu(\xi_1^2 + \beta^2) + \zeta_1^2\lambda)\right\} +$$
$$+ \frac{\exp_2}{4\pi}\left\{\frac{A_2}{\mu\beta^2}(\lambda\zeta_2^2 + 2\mu(\xi^2 + \zeta_2^2)) - \gamma A_3\sqrt{\xi^2 + \zeta_1^2}\right\} + \frac{(\lambda + \mu)\xi^2}{2\pi\mu\beta^2}\exp_3,$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^{2*} = \frac{i\xi}{4\pi}\left\{\gamma A_3 - \frac{A_1(\lambda\zeta_1^2 + 2\mu(\xi^2 + \zeta_1^2))}{\mu\beta^2\sqrt{\xi^2 + \zeta_1^2}}\right\}\exp_1 +$$
$$+ \frac{i\xi}{4\pi}\left\{-\gamma A_3 + \frac{A_2(\lambda\zeta_2^2 + 2\mu(\xi^2 + \zeta_2^2))}{\mu\beta^2\sqrt{\xi^2 + \zeta_1^2}}\right\}\exp_2 + \frac{i\xi(\lambda + \mu)\sqrt{\xi^2 + \beta^2}}{2\pi\mu\beta^2}\exp_3,$$

$$\bar{\Gamma}_{11}^{3*} = \frac{\gamma(\alpha^2+\zeta_1^2)\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2} - m(2\mu(\xi^2+\zeta_1^2)+\lambda\zeta_1^2)}{4\pi\kappa\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2}(\xi^2+\zeta_1^2)}\exp_1 + \\ + \frac{-\gamma(\alpha^2+\zeta_1^2)\sqrt{\xi^2+\zeta_2^2} + m[2\mu(\xi^2+\zeta_1^2)+\lambda\zeta_2^2]}{2\pi\kappa\sqrt{\xi^2+\zeta_2^2}(\xi^2+\zeta_1^2)}\exp_2,$$

$$\bar{\Gamma}_{21}^{1*} = \frac{i\xi}{4\pi\beta^2}(\gamma\beta^2A_3 - 2A_1\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2})\exp_1 + \frac{i\xi}{4\pi\beta^2}(\gamma\beta^2A_3 - 2A_2\sqrt{\xi^2+\zeta_2^2})\exp_2 - \frac{i\xi}{4\pi\sqrt{\xi^2+\beta^2}}\exp_3,$$

$$\bar{\Gamma}_{21}^{2*} = \xi^2\left\{\frac{2A_1\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2}}{4\pi\beta^2\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2}}\right\}\exp_1 + \xi^2\left\{\frac{-2A_2\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2}+\gamma\beta^2A_3}{4\pi\beta^2\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2}}\right\},$$

$$\bar{\Gamma}_{21}^{3*} = \frac{i\xi}{4\pi\kappa(\zeta_2^2+\zeta_1^2)\sqrt{\xi^2+\zeta_2^2}}\{\gamma(\alpha^2-\zeta_1^2) - 2m\mu\sqrt{\xi^2+\zeta_2^2}\}(\gamma\beta^2A_3 - 2A_2\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2})\exp_1 + \\ + \frac{i\xi}{4\pi\kappa(\zeta_2^2+\zeta_1^2)\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2}}(\gamma(\alpha^2-\zeta_1^2) - 2m\mu\sqrt{\xi^2+\zeta_2^2})\exp_2,$$

$$-\bar{U}_{3,1}^{1*} = \frac{A_3}{4\pi}\{\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2}\exp_1 - \sqrt{\xi^2+\zeta_2^2}\exp_2\},$$

$$-\bar{U}_{3,1}^{2*} = \frac{i\xi A_3}{4\pi}\{\exp_1 - \exp_2\},$$

$$-\bar{U}_{3,1}^{3*} = \frac{1}{4\pi\kappa(\zeta_2^2+\zeta_1^2)}\{(\alpha^2-\zeta_1^2)\exp_1 - (\alpha^2-\zeta_2^2)\exp_2\}.$$

Здесь

$$A_1 = \frac{q(1+\varepsilon)-\zeta_1^2}{\zeta_2^2-\zeta_1^2}, \quad \exp_1 = \exp(-x_1\sqrt{\xi^2+\zeta_1^2}),$$

$$A_2 = \frac{q(1+\varepsilon)-\zeta_2^2}{\zeta_2^2-\zeta_1^2}, \quad \exp_2 = \exp(-x_1\sqrt{\xi^2+\zeta_2^2}),$$

$$A_3 = \frac{\eta p}{(\lambda+2\mu)(\zeta_2^2-\zeta_1^2)}, \quad \exp_3 = \exp(-x_1\sqrt{\xi^2+\beta^2}).$$

Решение однородной системы (18) представим в виде вектор-функции в следующей форме:

$$\bar{u}_j^* = w_j(k(\xi,p))\exp(k(\xi,p)x_1), \quad j = 1,2,3,$$

где $k(\xi,p)$ – корни характеристического уравнения системы (18):

$$\operatorname{Det}\begin{Bmatrix} [(\lambda+2\mu)k^2 - \mu\xi^2 - \rho p^2],\ i(\lambda+\mu)k\xi,\ -\gamma k \\ i(\lambda+\mu)k\xi,\ [-(\lambda+2\mu)\xi^2 + \mu k^2 - \rho p^2],\ -i\gamma\xi \\ -\eta pk,\ -i\eta p\xi,\ \left(k^2-\xi^2-\frac{p}{\kappa}\right) \end{Bmatrix} = 0. \tag{23}$$

Характеристическое уравнение для фиксированных ξ, p имеет 6 корней:

$$k_1 = \sqrt{\xi^2 + \frac{\rho p^2}{\mu}},$$

$$k_2 = \sqrt{\xi^2 + \frac{p}{2\kappa} + \frac{\gamma\eta p}{2(\lambda+2\mu)} + \frac{p}{2(\lambda+2\mu)}\mathrm{R}(\xi,p)},$$

$$k_3 = \sqrt{\xi^2 + \frac{p}{2\kappa} + \frac{\gamma\eta p}{2(\lambda + 2\mu)} - \frac{p}{2(\lambda + 2\mu)} \mathrm{R}(\xi, p)},$$

$$k_{j+3} = -k_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\mathrm{R}(\xi, p) = \sqrt{\gamma^2\eta^2 - 4(\lambda + 2\mu)\xi^2\rho + \frac{\lambda + 2\mu}{\kappa}\left\{\frac{\lambda + 2\mu}{\kappa} + 2\gamma\eta - 4\rho p\right\}}.$$

Поскольку мы находим решение, описывающее волны, отраженные границей плоскости, которое должно затухать при $x_1 \to -\infty$, необходимо выбрать корни с учетом знака радикалов:

$$\operatorname{Im} k(\xi, p) \le 0, \quad \operatorname{Re} k(\xi, p) \ge 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Это и есть дополнительные условия излучения. Можно показать, что на двулистной комплексной плоскости типа Римана можно выбрать корни, с требуемым знаком. Существуют три решения уравнения (23), удовлетворяющие условиям (24).

Следовательно, решения, удовлетворяющие условиям излучения, могут быть представлены следующим образом:

$$\overline{u}_m^*(x_1, \xi, p) = \sum_{j=1}^{3} b_j(\xi, p) w_m(k_j(\xi, p)) \exp(k_j(\xi, p)x_1), \tag{25}$$

$j = 1, 2, 3$, где $b_j(\xi, p)$ – произвольные функции.

Для определения компонент вектор-функции $w(k_j(\xi, p))$ положим $w_3(k_j) = 1$. Затем, чтобы определить другие две компоненты, мы можем взять любые два уравнения этой однородной системы, переводя третью компоненту в правую сторону. Например:

$$\begin{Bmatrix} i(\lambda + \mu)k_j\xi, & -(\lambda + 2\mu)k_j\xi + \mu k_j^2 - \rho p^2 \\ & -\eta p k_j, \ -i\eta p\xi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1(k_j) \\ w_2(k_j) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\gamma\xi \\ -\left(k_j^2 - \xi^2 - \dfrac{p}{k}\right) \end{Bmatrix},$$

$$w_3(k_j) = 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

У нас есть три граничных условия на свободной поверхности (19), (20) для определения трех неизвестных функций $b_j(\xi, p)$. Подставляя (25) в это условие, мы получаем линейную систему трех уравнений для определения b_j:

$$\Sigma_{j=1}^3 b_j \exp(k_j h) \Sigma_{n=1}^3 B_{\ln}(k_j, -i\xi, p) w_n(k_j) + d_l^m(\xi, p) = 0, \quad l = 1, 2, 3. \tag{26}$$

Решение уравнения (26), по правилу Крамера, имеет вид:

$$b_j(\xi, p, m) = \Delta_j^m(\xi, p)/\Delta(\xi, p), \quad j = 1, 2, 3, \tag{27}$$

где $\Delta(\xi, p)$ – определитель матрицы системы (26)

$$\{b_{jl}\}_{3\times 3} = \left\{\exp(k_j(\xi, p)h) \sum_{n=1}^{3} B_{\ln}(k_j(\xi, p), -i\xi, p) w_l(k_j)\right\}_{3\times 3}.$$

Таким образом, найдены все необходимые функции для вычисления трансформанты Фурье–Лапласа тензора отраженных волн $\Pi_j^k(x_1, x_2, t)$. Далее получаем соответствующую ему трансформанту Лапласа $\overline{\Pi}_j^k$:

$$\overline{\Pi}_j^k(x_1, x_2, p) = \Sigma_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} a_j(\xi, p, m) w_l(k_j(\xi, p)) \exp(k_j x_1 - i\xi x_2) d\xi$$

и сам тензор

$$\Pi_j^k(x_1, x_2, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty + ip_0}^{\infty + ip_0} \overline{\Pi}_j^k(x_1, x_2, p) \exp(pt) dp.$$

Подставляя ее в (13), получаем тензор Грина для данной краевой задачи.

Для определения напряжений следует использовать закон Дюамеля–Неймана (2).

При действии произвольных массовых сил и тепловых источников в (12), удобнее перенести вычисления в пространство преобразования Фурье–Лапласа, а не брать свертки по трем переменным. Тогда операция свертки по переменным x_2, t переходит в произведение трансформант, и остается только одна свертка по переменной x_1.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе представленного метода можно построить тензор Грина для всех четырех классических начально-краевых задач для термоупругой полуплоскости, если на границе даны две характеристики из четырех (перемещение, напряжение, температура, тепловой поток).

Кроме того, построенный тензор может быть использован для решения начально-краевых задач для многосвязной упругой полуплоскости с отверстием произвольной формы. В работах [14], [15] были построены решения начально-краевых задач термоэластодинамики для односвязных областей и разрешающие граничные интегральные уравнения, ядрами которых являлся тензор Грина уравнений (1) и соответствующий ему тензор фундаментальных напряжений. Если вместо этих ядер в этих соотношениях использовать построенный здесь тензор Грина и соответствующий ему тензор фундаментальных напряжений, то получим решения начально-краевых задач термоупругости для полупространства с цилиндрической полостью, при заданной нагрузке на ее границе. Этот класс задач является модельным для исследования динамики породного массива в окрестности подземных сооружений вблизи дневной поверхности. А такой класс задач возникает при изучении воздействия динамических нагрузок внутри сооружений или при дифракции сейсмических волн на сооружениях неглубокого заложения (тоннели, метрополитены, горные выработки и т.п. (см. [5])).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелешвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
4. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наукова думка, 1978. 308 с.
5. *Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А.* Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата: Наука, 1989. 240 с.
6. *Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Дильдабаев Ш.М., Жанбырбаев Н.Б.* Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата: Наука, 1992. 228 с.
7. *Georgiadis H.G., Rigatos A.P., Brock L.M.* Thermoelastodynamic disturbances in a half-space under the action of a buried thermal/mechanical line source. International Journal of Solids and Structures. 1999. V. 36. P. 3639–3660.
8. *Lykotrafitis G., Georgiadis H.G., Brock L.M.* Three-dimensional thermoelastic wave motions in a half-space under the action of a buried source. International Journal of Solids and Structures. 2001. V. 38. P. 4857–4878.
9. *Raoofian Naeeni M., Eskandari-Ghadi M., Ardalan A.A., Sture S., Rahimian M.* Transient response of a thermoelastic half-space to mechanical and thermal buried sources. ZAMM. 2015. V. 95. № 4. P. 354–376.
10. *Mahmoodi Kordkhieli H., Ghodrati Amiri G., Hosseini M.* Axisymmetric analysis of a thermoelastic isotropic half-space under buried sources in displacement and temperature potentials // J. of Thermal Stresses. 2017. V. 40. № 2. P. 237–254.
11. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1978. 280 с.
12. *Алексеева Л.А., Дадаева А.Н.* О единственности решения начально-краевых задач термоупругости при действии ударных тепловых волн // Вестник КазНТУ. Серия Математика, механика и информатика. 2013. № 28. С. 11–18.
13. *Alipova B.N., Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N.* Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions // AIP Conference Proceedings, ICNPAA 2016 World Congress 11th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences July 4–8, 2016, La Rochelle, France, American Institute of Physics, ISBN: 978-0-7354-1276-7, http://dx.doi.org/10.1063/1.4765466, Citation: 1798, 020003 (2017).
14. *Алексеева Л.А., Купесова Б.Н.* Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. № 2. С. 334–345.
15. *Alipova B.N.* Method of Boundary integral equations (BIEM) and generalized solutions of transient problems of thermoelastodynamics // ICNPAA 2012, 9–15 July, AIP Conference Proceedings, 1493, 39(2012); doi: 10.1063/1.4765466, American Institute of Physics, Vien, Austria, http://dx.doi.org/10.1063/1.4765466, pp. 39–46.