ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 5, с. 731–738

УДК 519.65

О РЕАЛИЗАЦИИ НЕПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СПЛАЙНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

© 2019 г. О. В. Белякова

(236041 Калининград, ул. А. Невского, 14, Балтийский федеральный ун-т, Россия)

e-mail: obelyakova@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.10.2018 г.
Переработанный вариант 22.12.2018 г.
Принята к публикации 23.12.2018 г.

В данной работе исследованы варианты обработки числовых потоков с использованием неполиномиальных сплайнов лагранжева и эрмитова типов. Рассматриваемые сплайны строятся из аппроксимационных соотношений, включающих генерирующую вектор-функцию с компонентами различного характера, в том числе неполиномиального. Здесь рассмотрены аппроксимации сплайнами лагранжева типа первого порядка и эрмитова типа третьего порядка. На ряде модельных примеров продемонстрирована эффективность построенных аппроксимаций для потоков из значений функции и потоков из значений функции и ее производной. Преимуществами рассматриваемых сплайнов являются простота их построения, максимальная гладкость, интерполяционные и аппроксимационные свойства, а также точность на априори заданных функциях (на компонентах генерирующей вектор-функции). Библ. 6. Табл. 7.

Ключевые слова: неполиномиальные сплайны, аппроксимация, погрешность аппроксимации.

DOI: 10.1134/S0044466919050041

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость эффективно обрабатывать числовые информационные потоки, в том числе цифровые потоки от измерительных приборов, повышает интерес к локальным аппроксимациям с помощью сплайнов, вейвлетов, сплайн-вейвлетных разложений и др. Наиболее популярны непрерывные или непрерывно дифференцируемые полиномиальные сплайны (см., например, [1]–[3]). В некоторых случаях интерполяции и аппроксимации целесообразно применять неполиномиальные сплайны, обладающие свойством точности на некоторых, вообще говоря, неполиномиальных функциях. Построение таких сплайнов предложено в [4] и развивалось в [5], [6]. Оно основано на применении так называемых аппроксимационных соотношений, использующих ограниченность носителей сплайн-функций на введенной сетке и некоторую априори заданную генерирующую вектор-функцию, компоненты которой могут быть и неполиномиальными функциями. Если коэффициенты в аппроксимационных соотношениях специальным образом связать с генерирующей функцией, то построенная аппроксимация станет непрерывной интерполирующей функцией. В случае, когда генерирующую функцию удается задать так, чтобы она примерно соответствовала закономерностям в цифровом потоке, то получается аппроксимация высокой точности.

Данная работа посвящена апробации нового подхода, разработанного в [4], реализации аппроксимаций цифрового потока с помощью неполиномиальных сплайнов лагранжева типа первого порядка и неполиномиальных сплайнов эрмитова типа третьего порядка и численному исследованию эффективности таких аппроксимаций.

При построении аппроксимирующих сплайнов для задания исходного потока используются значения, которые генерируются модельными функциями на заданной сетке. В случае сплайнов лагранжева типа первого порядка используются только значения функций, для сплайнов эрмитова типа используются значения функций и их производных первого порядка на упомянутой сетке. В данной работе в качестве модельных рассматриваются функции $\sin(t)$, e^t, $1/(1+t^2)$ и т.п. Указанный подход в построении аппроксимаций приводит к достаточно простым алгоритмам с небольшим числом арифметических операций. Для оценивания эффективности исследуются уклонения полученных аппроксимаций от исходных функций. Полученные численные результаты согласуются с теоретическими оценками, а также дают представление о неизвестных константах в упомянутых оценках.

1. АППРОКСИМАЦИИ ЛАГРАНЖЕВА ТИПА

Пусть требуется аппроксимировать функцию $u(t) \in C(\alpha,\beta)$. Аппроксимирующая функция $\tilde{u}(t)$ ищется в виде

$$\tilde{u}(t) = \sum_j c_j \cdot \omega_j(t), \tag{1.1}$$

где числовые коэффициенты c_j и координатные сплайны $\omega_j(t)$ определяются ниже.

Для того, чтобы построить координатные сплайны $\omega_j(t)$, достаточно выполнить следующие действия: 1) ввести сетку, например, равномерную: $x_k = k \cdot h,\ h > 0,\ k \in Z$; 2) задать носитель функции $\omega_j(t)$, например, $\operatorname{supp}\omega_j(t) = [x_j, x_{j+2}]$, и двухкомпонентную вектор-функцию $\phi(t) = (1,\phi_1(t))^{\mathrm{T}}$, $\phi_1(t) \in C(R^1)$, например, $\phi_1(t) = \sin(t)$; 3) использовать аппроксимационные соотношения (см. [4, с. 187]):

$$a_{i-1} \cdot \omega_{i-1}(t) + a_i \cdot \omega_i(t) = \phi(t), \quad t \in (x_i, x_{i+1}), \quad i \in \mathrm{Z}, \tag{1.2}$$

в которых a_{i-1}, a_i — двухкомпонентные числовые векторы, $a_i = (a_i^{(0)}, a_i^{(1)})^{\mathrm{T}}$. Поэтому соотношение (1.2) соответствует системе линейных уравнений относительно неизвестных $\omega_{i-1}(t)$, $\omega_i(t)$

$$\begin{aligned} a_{i-1}^{(0)} \cdot \omega_{i-1}(t) + a_i^{(0)} \cdot \omega_i(t) &= 1, \\ a_{i-1}^{(1)} \cdot \omega_{i-1}(t) + a_i^{(1)} \cdot \omega_i(t) &= \phi_1(t). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Предполагая, что

$$\det(a_{j-1}, a_j) \neq 0 \quad \forall j \in Z, \tag{1.4}$$

из (1.3) легко найти

$$\omega_{i-1}(t) = \frac{\det(\phi(t), a_i)}{\det(a_{i-1}, a_i)}, \quad \omega_i(t) = \frac{\det(a_{i-1}, \phi(t))}{\det(a_{i-1}, a_i)}. \tag{1.5}$$

Множество векторов $a_j \in R^2$, удовлетворяющих условию (1.4), называется *полной цепочкой векторов*.

Для $t \in (x_{i+1}, x_{i+2})$, ввиду (1.2), имеем аппроксимационное соотношение $a_i\omega_i(t) + a_{i+1}\omega_{i+1}(t) = \phi(t)$, из которого, аналогично (1.5), получим

$$\omega_i(t) = \frac{\det(\phi(t), a_{i+1})}{\det(a_i, a_{i+1})}, \quad \omega_{i+1}(t) = \frac{\det(a_i, \phi(t))}{\det(a_i, a_{i+1})}. \tag{1.6}$$

Таким образом, из (1.5), (1.6) находим формулу сплайна, который называется *координатным сплайном*

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(a_{j-1}, \phi(t))}{\det(a_{j-1}, a_j)}, & t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\det(\phi(t), a_{j+1})}{\det(a_j, a_{j+1})}, & t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0, & t \notin [x_j, x_{j+2}]. \end{cases} \tag{1.7}$$

Поэтому в выражении (1.1) для аппроксимирующей функции $\tilde{u}(t)$ при любом $t \in (x_j, x_{j+1})$ имеется не более двух ненулевых слагаемых

$$\tilde{u}(t) = c_{j-1} \cdot \omega_{j-1}(t) + c_j \cdot \omega_j(t). \tag{1.8}$$

Координатный сплайн $\omega_j(t)$ определен на всей вещественной оси, за исключением узлов $x_j,\ x_{j+1},\ x_{j+2}$, в этих узлах он может оказаться разрывным. На практике обычно применяются непрерывные сплайны. В работе [4, с. 206] доказано, что сплайны (1.7) непрерывны лишь в случае, когда полная цепочка векторов a_j в определении координатных сплайнов связана с вектор-функцией $\phi(t)$ следующим образом:

$$a_j = \phi(x_{j+1}). \tag{1.9}$$

Таким образом, аппроксимирующая функция $\tilde{u}(t)$ будет непрерывной, если $\phi_1(t) \in C(R^1)$ и координатные функции $\omega_j(t)$ в (1.1) вычисляются по формуле

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\phi(x_j),\phi(t))}{\det(\phi(x_j),\phi(x_{j+1}))}, & t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\det(\phi(t),\phi(x_{j+2}))}{\det(\phi(x_{j+1}),\phi(x_{j+2}))}, & t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \\ 0, \quad t \notin [x_j, x_{j+2}]. \end{cases} \tag{1.10}$$

Из формулы (1.10) следуют равенства: $\omega_j(x_{j+1}) = 1,\ \omega_j(x_j) = \omega_j(x_{j+2}) = 0$. Поэтому функция (1.8) при $c_j = u(x_{j+1})$ принимающая вид

$$\tilde{u}(t) = u(x_j)\cdot\omega_{j-1}(t) + u(x_{j+1})\cdot\omega_j(t), \tag{1.11}$$

интерполирует функцию $u(t)$ в узлах $x_j,\ x_{j+1}$. В работе [5] доказано, что если $u \in C^2(\alpha,\beta)$, то функция (1.11) обеспечивает 2-й порядок аппроксимации:

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \le Ch^2, \quad t \in (\alpha,\beta), \tag{1.12}$$

где $C = \text{const} > 0$, зависит от $u(t)$ и $\phi(t)$, но не зависит от h. В случае, когда $u(t) = \phi_1(t)$ выполняется тождество: $\tilde{u}(t) \equiv \phi_1(t)\ \forall t \in (\alpha,\beta)$.

В данной работе в численных экспериментах ограничимся промежутком $(\alpha,\beta) \equiv [0;1]$ и упомянутой выше равномерной сеткой.

В табл. 1 представлены результаты реализации аппроксимирующей функции (1.11), (1.10) на сетках с различными значениями сеточного параметра h и неполиномиальной генерирующей функцией $\phi(t) = (1,\sin(t))^{\mathrm{T}}$ для ряда модельных функций $u(t)$. Величина погрешности аппроксимации здесь и далее вычислялась по формуле: $r \equiv \max\limits_{t=j\tau}|u(t) - \tilde{u}(t)|$, $\tau = 0.005$ — шаг контрольной сетки на [0; 1], а значения $j \in \mathrm{Z}$ таковы, что $t \in [0;1]$.

Табл. 1 иллюстрирует аппроксимацию с оценкой типа (1.12) для всех рассматриваемых функций $u(t)$ на промежутке [0; 1]; эта таблица подтверждает закономерность изменения погрешности аппроксимации в соответствии с изменением величины сеточного параметра h и порядком аппроксимации в (1.12). Указанная закономерность нарушается только для функции $u(t) = \sqrt{t}$, которая не имеет 1-й производной при $t = 0$.

Описанный выше подход к построению аппроксимирующей функции по заданной генерирующей функции $\phi(t) = (1,\phi_1(t))^{\mathrm{T}}$ является экономичным и легко реализуется при различном выборе функции $\phi_1(t)$.

Из табл. 2 видно, что наименьшая погрешность аппроксимации для заданной функции достигается при $\phi_1(t) = t$ и $\phi_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Наибольшая погрешность аппроксимации, как и следовало ожидать, оказывается при порождающих функциях $\phi_1(t) = \sin(t) + \sin(2t)$, $\phi_1(t) = \sin(3t)$, поскольку они не учитывают поведение аппроксимируемой функции.

Таблица 1. Зависимость погрешности аппроксимации $u(t)$ от величины сеточного параметра h при генерирующей функции $\phi(t) = (1, \sin(t))^{\mathrm{T}}$

№	$u(t)$	$h_1 = 0.1$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.01$
1	$\sin(t)$	0.0	0.0	0.0
2	t	7.0×10^{-3}	4.6×10^{-4}	1.9×10^{-5}
3	t^2	5.8×10^{-3}	1.5×10^{-3}	6.3×10^{-5}
4	e^t	7.8×10^{-3}	2.1×10^{-3}	8.6×10^{-5}
5	$\cos(t)$	2.1×10^{-3}	5.6×10^{-4}	2.3×10^{-5}
6	$1/(1+t^2)$	2.5×10^{-3}	6.2×10^{-4}	2.5×10^{-5}
7	$\sqrt{t}$	7.9×10^{-2}	5.5×10^{-2}	2.1×10^{-2}
8	$\sin(3t)$	1.1×10^{-2}	2.9×10^{-3}	1.1×10^{-4}

Таблица 2. Зависимость погрешности аппроксимации $u(t) = \sin(t)$ при $h = 0.01$ от выбора генерирующей функции $\phi(t) = (1, \phi_1(t))^{\mathrm{T}}$

№	$\phi_1(t)$	r
1	$\cos(t)$	2.5×10^{-3}
2	t	1.0×10^{-5}
3	t^2	2.5×10^{-3}
4	e^t	1.8×10^{-5}
5	e^{-t}	1.2×10^{-5}
6	$1/(1+t^2)$	2.5×10^{-3}
7	$\sin(t) + \sin(2t)$	8.0×10^{-3}
8	$\sin(3t)$	7.7×10^{-3}

2. АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТОВА ТИПА

Аналогично случаю построения неполиномиальных аппроксимаций лагранжева типа можно построить неполиномиальные аппроксимации эрмитова типа, если известны не только функция $u(t)$, но и ее производная $u'(t)$ в узлах сетки.

Для построения аппроксимирующей функции $\tilde{u}(t)$ снова будем использовать равномерную сетку, введенную в предыдущем разделе, и полагать

$$\tilde{u}(t) = \sum_j \left(c_j \cdot \omega_j(t) + \hat{c}_j \cdot \hat{\omega}_j(t)\right), \tag{2.1}$$

где c_j, $\hat{c}_j$ – описываемые далее числовые коэффициенты, $\omega_j(t)$, $\hat{\omega}_j(t)$ – координатные сплайны с заданным носителем

$$\operatorname{supp} \omega_j(t) = \operatorname{supp} \hat{\omega}_j(t) = [x_j, x_{j+2}]. \tag{2.2}$$

Зададим четырехкомпонентную вектор-функцию $\phi(t) = (1, \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} \phi_i \in C^1(R^1), \quad i = 1, 2, 3, \\ \det\left(\phi(x), \phi'(x), \phi(y), \phi'(y)\right) \neq 0 \quad \forall x, y \in (\alpha, \beta), \quad x \neq y. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Будем искать координатные функции $\omega_j(t)$, $\hat{\omega}_j(t)$ из аппроксимационных соотношений вида (см. [4, с. 429]):

$$\sum_j \left(\phi(x_j)\omega_{j-1}(t) + \phi'(x_j)\hat{\omega}_{j-1}(t)\right) = \phi(t). \tag{2.4}$$

Ввиду предположения (2.2) из (2.4) при $t \in (x_i, x_{i+1})$ получим

$$\phi(x_i)\cdot\omega_{i-1}(t) + \phi'(x_i)\cdot\hat{\omega}_{i-1}(t) + \phi(x_{i+1})\cdot\omega_i(t) + \phi'(x_{i+1})\cdot\hat{\omega}_i(t) = \phi(t). \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) соответствует системе линейных уравнений

$$\begin{gathered}
\omega_{i-1}(t) + 0\cdot\hat{\omega}_{i-1}(t) + \omega_i(t) + 0\cdot\hat{\omega}_i(t) = 1,\\
\phi_1(x_i)\cdot\omega_{i-1}(t) + \varphi_1'(x_i)\cdot\hat{\omega}_{i-1}(t) + \varphi_1(x_{i+1})\cdot\omega_i(t) + \varphi_1'(x_{i+1})\cdot\hat{\omega}_i(t) = \varphi_1(t),\\
\phi_2(x_i)\cdot\omega_{i-1}(t) + \varphi_2'(x_i)\cdot\hat{\omega}_{i-1}(t) + \varphi_2(x_{i+1})\cdot\omega_i(t) + \varphi_2'(x_{i+1})\cdot\hat{\omega}_i(t) = \varphi_2(t),\\
\phi_3(x_i)\cdot\omega_{i-1}(t) + \varphi_3'(x_i)\cdot\hat{\omega}_{i-1}(t) + \varphi_3(x_{i+1})\cdot\omega_i(t) + \varphi_3'(x_{i+1})\cdot\hat{\omega}_i(t) = \varphi_3(t)
\end{gathered} \tag{2.6}$$

относительно неизвестных $\omega_{i-1}(t)$, $\hat{\omega}_{i-1}(t)$, $\omega_i(t)$, $\hat{\omega}_i(t)$. Эта система однозначно разрешима для таких $\phi(t)$, которые удовлетворяют условиям (2.3), так как в этом случае имеем

$$W_i \equiv \det\left(\phi(x_i), \phi'(x_i), \phi(x_{i+1}), \phi'(x_{i+1})\right) \neq 0.$$

Решение (2.6) может быть записано следующим образом:

$$\begin{gathered}
\omega_{i-1}(t) = \det(\varphi(t), \varphi'(x_i), \varphi(x_{i+1}), \varphi'(x_{i+1}))/W_i,\\
\hat{\omega}_{i-1}(t) = \det(\varphi(x_i), \varphi'(t), \varphi(x_{i+1}), \varphi'(x_{i+1}))/W_i,\\
\omega_i(t) = \det(\varphi(x_i), \varphi'(x_i), \varphi(t), \varphi'(x_{i+1}))/W_i,\\
\hat{\omega}_i(t) = \det(\varphi(x_i), \varphi'(x_i), \varphi(x_{i+1}), \varphi'(t))/W_i.
\end{gathered}$$

При $t \in \left(x_{i+1},\, x_{i+2}\right)$ аппроксимационное соотношение (2.4) принимает вид

$$\phi(x_{i+1})\cdot\omega_i(t) + \phi'(x_{i+1})\cdot\hat{\omega}_i(t) + \phi(x_{i+2})\cdot\omega_{i+1}(t) + \phi'(x_{i+2})\cdot\hat{\omega}_{i+1}(t) = \phi(t).$$

Отсюда, аналогично решению (2.6), находим

$$\begin{gathered}
\omega_i(t) = \det\left(\phi(t),\, \phi'(x_{i+1}),\, \phi(x_{i+2}),\, \phi'(x_{i+2})\right)/W_{i+1},\\
\hat{\omega}_i(t) = \det\left(\phi(x_{i+1}),\, \phi(t),\, \phi(x_{i+2}),\, \phi'(x_{i+2})\right)/W_{i+1}.
\end{gathered}$$

В работе [4, с. 430] доказано, что если $\phi(t)$ удовлетворяет условиям (2.3), то координатные функции $\omega_i(t)$, $\hat{\omega}_i(t)$ принадлежат пространству $C^1(\alpha,\beta)$. Таким образом, если задать генерирующую функцию $\phi(t)$ так, чтобы для нее выполнялись условия (2.3), то координатные функции $\omega_i(t)$, $\hat{\omega}_i(t)$ будут принадлежать пространству $C^1(\alpha,\beta)$ и описываться формулами

$$\omega_i(t) = \begin{cases}\det\left(\phi(x_i), \phi'(x_i), \phi(t), \phi'(x_{i+1})\right)/W_i, & t \in (x_i, x_{i+1}),\\ \det\left(\phi(t), \phi'(x_{i+1}), \phi(x_{i+2}), \phi'(x_{i+2})\right)/W_{i+1}, & t \in (x_{i+1}, x_{i+2}),\\ 0, & t \notin [x_i,\, x_{i+2}],\end{cases} \tag{2.7а}$$

$$\hat{\omega}_i(t) = \begin{cases}\det\left(\phi(x_i), \phi'(x_i), \phi(t), \phi'(t)\right)/W_i, & t \in (x_i, x_{i+1}),\\ \det\left(\phi(x_{i+1}), \phi(t), \phi(x_{i+2}), \phi'(x_{i+2})\right)/W_{i+1}, & t \in (x_{i+1}, x_{i+2}),\\ 0, & t \notin [x_i, x_{i+2}].\end{cases} \tag{2.7б}$$

Из (2.7а) , (2.7 б) следуют равенства

$$\begin{gathered}
\omega_i(x_i) = \omega_i(x_{i+2}) = 0, \quad \omega_i(x_{i+1}) = 1,\\
\hat{\omega}_i(x_i) = \hat{\omega}_i(x_{i+2}) = \hat{\omega}_i(x_{i+1}) = 0.
\end{gathered}$$

Таким образом, в силу свойств координатных сплайнов (2.7), аппроксимирующая функция (2.1) с $c_j = u(x_{j+1})$, $\hat{c}_j = u'(x_{j+1})$ при каждом $t \in (x_i,\, x_{i+1}) \subset (\alpha,\beta)$ содержит не более четырех слагаемых, отличных от нуля,

$$\tilde{u}(t) = \sum_j (u(x_{j+1})\omega_j(t) + u'(x_{j+1})\hat{\omega}_j(t)) = u(x_i)\omega_{i-1}(t) + u'(x_i)\hat{\omega}_{i-1}(t) + u(x_{i+1})\omega_i(t) + u'(x_{i+1})\hat{\omega}_i(t), \tag{2.8}$$

Таблица 3. Зависимость погрешности аппроксимации $u(t)$ от величины сеточного параметра h в случае генерирующей функции $\phi(t) = (1, t, t^2, t^3)^{\mathrm{T}}$

№	$u(t)$	$h_1 = 0.1$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.01$
1	t	2.0×10^{-17}	7.6×10^{-17}	2.1×10^{-15}
2	t^2	3.6×10^{-17}	1.4×10^{-16}	3.7×10^{-15}
3	t^3	4.8×10^{-17}	1.9×10^{-16}	5.0×10^{-15}
4	e^t	6.7×10^{-7}	4.3×10^{-8}	7.0×10^{-11}
5	$\cos(t)$	2.6×10^{-7}	1.6×10^{-8}	2.6×10^{-11}
6	$1/(1+t^2)$	6.0×10^{-6}	3.9×10^{-7}	6.2×10^{-10}
7	$\sin(t)$	2.1×10^{-7}	1.3×10^{-8}	2.2×10^{-11}
8	$\sin(3t)$	2.1×10^{-5}	1.3×10^{-6}	2.1×10^{-9}

Таблица 4. Зависимость погрешности аппроксимации $u(t)$ от величины сеточного параметра h при генерирующей функции $\phi(t) = \left(1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t)\right)^{\mathrm{T}}$

№	$u(t)$	$h_1 = 0.1$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.01$
1	t	7.3×10^{-6}	1.5×10^{-6}	6.6×10^{-8}
2	t^2	1.1×10^{-5}	2.5×10^{-6}	1.0×10^{-7}
3	t^3	5.8×10^{-5}	1.2×10^{-5}	5.1×10^{-7}
4	e^t	3.2×10^{-5}	6.9×10^{-6}	2.9×10^{-7}
5	$\cos(t)$	3.8×10^{-15}	9.3×10^{-14}	1.9×10^{-10}
6	$1/(1+t^2)$	5.5×10^{-6}	7.1×10^{-7}	3.0×10^{-8}
7	$\sin(t)$	3.7×10^{-15}	8.7×10^{-14}	1.9×10^{-10}
8	$\sin(3t)$	1.3×10^{-4}	2.7×10^{-5}	1.1×10^{-6}

и является интерполянтой для заданной функции $u(t)$. В работе [6] показано, что если функции $u(t)$, $\phi_i(t)$, $i = 1,2,3$, принадлежат пространству $C^4(\alpha,\beta)$ и для $\phi(t)$ выполняется условие

$$W(t) = \left|\det(\phi,\phi',\phi'',\phi''')(t)\right| \geq c > 0 \quad \forall t \in (\alpha,\beta), \quad c = \mathrm{const} > 0, \tag{2.9}$$

то аппроксимация (2.8), (2.7) для функции $u(t)$ точна на компонентах $\phi_i(t)$, $i = 1,2,3$, генерирующей функции $\phi(t)$, то есть $\tilde{u}(t) \equiv u(t)$, $u(t) = \phi_i(t)\ \forall t \in (\alpha,\beta)$; кроме того, справедлива оценка

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq Ch^4 \quad \forall t \in (\alpha,\beta), \tag{2.10}$$

где $C = \mathrm{const} > 0$, C зависит от $u(t)$, $\phi(t)$ и их производных до 4-го порядка включительно, а также от значения константы c из предположения (2.9).

В табл. 3 представлены результаты реализации аппроксимирующей функции $\tilde{u}(t)$ по формулам (2.8), (2.7) с различными по величине сеточными параметрами h и генерирующей функцией $\phi(t) = (1, t, t^2, t^3)^{\mathrm{T}}$.

Из табл. 3 видно, что аппроксимация с помощью функции (2.8), (2.7) точна на компонентах t, t^2, t^3 генерирующей функции $\phi(t)$ (уклонение от нуля вызвано ошибками округления). Из этой таблицы также видно, что заданная генерирующая функция при различных значениях h дает хорошую аппроксимацию для многих часто встречающихся на практике гладких функций. Такой выбор генерирующей функции соответствует известной аппроксимации кубическими эрмитовыми сплайнами [4, с. 431].

Таблица 5. Зависимость погрешности аппроксимации $u(t) = \sin(2t)$ при $h = 0.01$ от выбора генерирующей функции $\phi(t)$

№	$\phi(t)$	r
1	$(1, t, t^2, t^3)^{\mathrm{T}}$	4.2×10^{-10}
2	$(1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t))^{\mathrm{T}}$	2.7×10^{-10}
3	$(1, e^t, \sin(t), \cos(t))^{\mathrm{T}}$	3.5×10^{-10}
4	$(1, t, \sin(t), \cos(t))^{\mathrm{T}}$	3.1×10^{-10}

Таблица 6. Зависимость погрешности аппроксимации $u(t) = e^t$ при $h = 0.01$ от выбора генерирующей функции $\phi(t)$

№	$\phi(t)$	r
1	$(1, t, t^2, t^3)^{\mathrm{T}}$	7.0×10^{-11}
2	$(1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t))^{\mathrm{T}}$	2.9×10^{-7}
3	$(1, e^t, \sin(t), \cos(t))^{\mathrm{T}}$	2.5×10^{-12}
4	$(1, t, \sin(t), \cos(t))^{\mathrm{T}}$	1.4×10^{-10}

Таблица 7. Погрешность аппроксимации $u(t)$ при $h = 0.01$ и генерирующей функции $\phi(t) = (1, t, \sin(t), \cos(t))^{\mathrm{T}}$

№	$u(t)$	r
1	$t \cdot \sin(3t)$	1.9×10^{-9}
2	$e^t \cdot \sin(3t)$	6.5×10^{-9}
3	$e^{-t} \cdot \sin(3t)$	2.3×10^{-9}
4	$\cos(0.5t) \cdot \sin(3t)$	2.2×10^{-9}
5	$1/(1 + t^2)$	5.7×10^{-10}
6	$t^2 \cdot \sin(t)$	2.7×10^{-10}
7	t^3	1.6×10^{-10}

В табл. 4 представлены результаты численного исследования аппроксимирующих свойств функции (2.8), (2.7) в случае задания генерирующей функции с неполиномиальными компонентами: $\phi(t) = (1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t),)^{\mathrm{T}}$.

На компонентах $\sin(t)$, $\cos(t)$ генерирующей функции при $h = 0.1$ аппроксимация точна (как и прежде уклонение от нуля вызвано ошибками округления). При уменьшении сеточного параметра h точность вычислений может снижаться из-за ошибок округления. Сравнение величины погрешности для функций t, t^2, $1/(1 + t^2)$, e^t, $\sin(3t)$ в табл. 1 и табл. 4 позволяет заключить, что аппроксимация эрмитова типа на 2 порядка лучше, чем аппроксимациия лагранжева типа.

В табл. 5 и табл. 6 представлены численные результаты аппроксимации модельных функций $u(t) = \sin(2t)$ и $u(t) = e^t$ соответственно. В них иллюстрируется зависимость погрешности аппроксимации эрмитова типа от выбора генерирующей функции $\phi(t)$ при сеточном параметре $h = 0.01$.

В строке 2 табл. 5 и в строке 3 табл. 6 указаны результаты численной аппроксимации функций $u(t)$, совпадающих с одной из компонент генерирующей вектор-функции $\phi(t)$. Как уже отмечалось, на величину погрешности могут существенно влиять ошибки округления. Поэтому при вычислениях на компьютере в этих случаях точного совпадения аппроксимируемой и аппроксимирующей функций нет. Однако из табл. 5 и 6 видно, что рассмотренные модельные потоки хорошо аппроксимируются функциями вида (2.8), (2.7) при различных генерирующих функциях $\phi(t)$. Очевидно, что если известна предварительная информация о характере поведения функции $u(t)$, то можно задать наиболее подходящую генерирующую функцию $\phi(t)$. Если предварительной информации о поведении $u(t)$ нет, то представляется целесообразным в качестве генерирующей функции взять $\phi(t) = (1, t, \sin(t), \cos(t))^{\text{т}}$.

Из табл. 7 видно, что для разнообразных входных функций при выбранной генерирующей вектор-функции обеспечивается хорошая аппроксимация с погрешностью не менее $C \times 10^{-9}$, $C = \text{const}$, $C \in (0;10)$.

В заключение отметим, что новый подход построения аппроксимирующей функции на основе сплайн-всплесковых разложений, описанный в [4], позволил разработать экономичную реализацию неполиномиальных сплайн-всплесковых аппроксимаций лагранжева и эрмитова типов высокой точности. Преимуществом рассматриваемых аппроксимаций является их точность на компонентах генерирующей функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. *Малоземов В.Н., Певный А.Б.* Полиномиальные сплайны. Л.: 1986. 120 с.
3. *Бурова И.Г., Демьянович Ю.К.* Теория минимальных сплайнов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. 317 с.
4. *Демьянович Ю.К.* Теория сплайн-всплесков. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 526 с.
5. *Демьянович Ю.К.* Минимальные сплайны лагранжева типа // Сб. Проблемы математического анализа Вып. 50. 2010. С. 21–64.
6. *Демьянович Ю.К., Ле Т.Н.Б.* Об аппроксимации сплайнами эрмитова типа // Пробл. матем. анализа. Вып. 73. 2013. С. 89–94.