ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 5, с. 792–795

УДК 519.63

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛАВУЧЕСТИ[1)]

 В. В. Булатов[1,*], Ю. В. Владимиров[1,]**

([1] 119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1, Институт проблем механики РАН, Россия)

**e-mail: internalwave@mail.ru;*

***e-mail: vladimyura@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.03.2018 г.
Переработанный вариант 11.01.2019 г.
Принята к публикации 11.01.2019 г.

Рассматривается задача о построении асимптотик, описывающих дальние поля внутренних гравитационных волн от осциллирующего точечного источника возмущений, движущегося в стратифицированной полубесконечной по вертикали среде переменной плавучести. Для модельного распределения частоты плавучести получены аналитические решения основной краевой задачи, выражающиеся через функции Уиттекера. Получено интегральное представление для функции Грина и построены асимптотические решения, позволяющие описать амплитудно-фазовые характеристики полей внутренних гравитационных волн в полубесконечной стратифицированной среде с непостоянной частотой Брента-Вейсяля вдали от источника возмущений. Библ. 11.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, переменная частота плавучести, функция Уиттекера.

DOI: 10.1134/S0044466919050053

ВВЕДЕНИЕ

В современных научных исследованиях при анализе динамики внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) широко применяются асимптотические методы исследования аналитических моделей волновой генерации [1]–[6]. Поля ВГВ в этих средах являются принципиально двумерными, а во многих случаях и трехмерными, поэтому в вычислительном плане анализ двумерных и трехмерных нестационарных волновых движений является весьма сложной задачей. Численные модели не позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость. Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнения с решениями модельных задач [4], [6]. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и асимптотическом анализе получаемых решений [5], [7]. Целью настоящей работы является исследование дальних полей ВГВ, возбуждаемых осциллирующим источником возмущений, движущимся в полубесконечной по вертикали стратифицированной среде переменной плавучести.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ

Рассматривается задача о дальних полях ВГВ, возникающих при движении точечного гармонически пульсирующего источника возмущений мощности $Q = q\exp(i\omega t)$, $q = \mathrm{const}$, в полубесконечной по вертикали невязкой стратифицированной среде. Источник движется с постоянной скоростью V в горизонтальном направлении оси x, ось z направлена вверх, глубина залегания источника $-z_0$. Рассматривается установившийся режим волновых колебаний. В движущейся

[1)] Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

системе координат и приближении Буссинеска имеем следующее уравнение, например, для вертикального смещения изопикн $\eta(x,y,z)$ (линий равной плотности с той же временной гармонической зависимостью) [5], [7]

$$\left(i\omega+V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Delta\eta+N^2(z)\Delta_2\eta=Q\left(i\omega+V\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x)\delta(y)\frac{\partial\delta(z-z_0)}{\partial z_0},$$
$$\Delta=\Delta_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad N^2(z)=-\frac{g}{\rho_0(z)}\frac{d\rho_0(z)}{dz}, \tag{1.1}$$

где $N^2(z)$ – квадрат частоты Брента-Вейсяля (частоты плавучести), $\rho_0(z)$ – невозмущенная плотность среды по глубине, g – ускорение свободного падения, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Далее будет использоваться модельное распределение частоты плавучести в виде

$$N^2(z)=-N_0^2(2L/z+L^2/z^2),$$

широко применяемое в океанологических расчетах для изучения динамики ВГВ при наличии постоянного термоклина (слоя скачка плотности). Замечательной особенностью Мирового океана является наличие постоянного слоя скачка плотности – области быстрого изменения температуры и в то же время области большой устойчивости частоты плавучести. Зависимость частоты Брента–Вейсяля от глубины в модельном представлении может отличаться от эмпирических зависимостей, которые, однако, всегда характеризуются наличием максимума $N^2(z)$ в слое скачка плотности морской среды. Данное модельное распределение частоты плавучести, имеющее один максимум, позволяет решить задачу аналитически, в то время как использование эмпирических зависимостей требует применения только численных методов. Однако, как показывают многочисленные исследования, основные качественные результаты по описанию амплитудно-фазовых характеристик ВГВ в океане зависят, как правило, не от конкретной аналитической формы аппроксимации частоты плавучести, а от существования максимума $N^2(z)$ в слое скачка плотности океанической воды [1]–[4], [8].

Граничные условия используются в виде

$$\eta=0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad \eta\to 0 \quad \text{при} \quad z\to-\infty. \tag{1.2}$$

В безразмерных координатах и переменных $x^*=x/L$, $y^*=y/L$, $z^*=z/L$, $\eta^*=q\eta/N_0L^2$, $\omega^*=\omega/N_0$, $t^*=tN_0$, $M=V/N_0L$ уравнение (1.1) перепишется в виде (звездочка далее опускается)

$$\left(i\omega+M\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Delta\eta-(2/z+1/z^2)\Delta_2\eta=\left(i\omega+M\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x)\delta(y)\frac{\partial\delta(z-z_0)}{\partial z_0}. \tag{1.3}$$

Решение задачи (1.2), (1.3) ищется в виде интегралов Фурье

$$\eta(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mu,\nu,z)\exp(-i(\mu x+\nu y))d\mu. \tag{1.4}$$

Тогда для определения функции $\varphi(\mu,\nu,z)$ необходимо решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{k^2}{p^2}(2/z+1/z^2+p^2)\varphi=\frac{i}{p}\frac{\partial\delta(z-z_0)}{\partial z_0},$$
$$\varphi=0 \quad \text{при} \quad z=0,\quad \varphi(\mu,\nu,z)\to 0 \quad \text{при} \quad z\to-\infty,\quad k^2=\mu^2+\nu^2,\quad p=\mu M-\omega. \tag{1.5}$$

Далее будет рассматриваться задача (1.5) с правой частью $\delta(z-z_0)$ (функция Грина).

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим два линейно независимых решения уравнения (1.5) с нулевой правой частью:

$$F_1(p,k,z)=W_{\alpha,\beta}(-2kz),\quad F_2(p,k,z)=M_{\alpha,\beta}(-2kz),$$

где $\alpha=k/p^2$, $\beta=(1/4+k^2/p^2)^{1/2}$, $W_{\alpha,\beta}$, $M_{\alpha,\beta}$ – функции Уиттекера, удовлетворяющие уравнению (см. [9]–[11])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-(\alpha/z+(1/4-\beta^2)/z^2-1/4)u=0.$$

Функция $F_1(p,k,z) \to 0$, при $z \to -\infty$, $F_2(p,k,z) = 0$, при $z = 0$. Тогда характеристическая функция Грина задачи (1.5) имеет вид (см. [9])

$$\varphi(p,k,z) = \frac{F_1(p,k,z_-)F_2(p,k,z_+)}{Wr(p,k)}, \tag{2.1}$$

где

$$z_- = \min(z,z_0), \quad z_+ = \max(z,z_0),$$

$Wr(p,k)$ – вронскиан функций $F_1(p,k,z_-)$, $F_2(p,k,z_+)$, имеющий вид

$$Wr(p,k) = -\frac{2\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1/2)}, \tag{2.2}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера [9]–[11]. Перейдем к интегрированию по переменной μ. Функция $\varphi(p,k,z)$, определяемая выражением (2.1), имеет простые полюса в нулях вронскиана, или в полюсах гамма-функции знаменателя (2.2). Точка $k = 0$ является для $\varphi(p,k,z)$ устранимой особой точкой, и $\Gamma(1+2\beta) \neq 0$. Полюса находятся из условия $\beta - \alpha + 1/2 = n$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, которое определяет соответствующее дисперсионное соотношение:

$$p_n^2(k) = 2k\Big/\left(1 + k + 2n + \sqrt{(1+k)^2 + 4kn}\right).$$

Отметим, что при $p = p_n(k)$ система функций $M_{\alpha,\beta}(-2kz)$ образует систему собственных функций, ортогональных с весом $-(2/z + 1/z^2)$ на интервале $(-\infty, 0]$, при этом $p_n(k)$ – соответствующие собственные значения. Введем далее функцию

$$\lambda(\mu,\nu) = \frac{(\mu^2+\nu^2)^{1/2}}{(\mu M - \omega)^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu^2+\nu^2}{(\mu M - \omega)^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся формулой дополнения для гамма-функции в виде (см. [10], [11])

$$1/\Gamma(-\lambda) = -\Gamma(1+\lambda)\sin\pi\lambda/\pi.$$

Тогда вронскиан (2.2) можно представить в виде

$$Wr(\mu,\nu) = -\frac{2k\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+\lambda)\sin\pi\lambda}{\pi}. \tag{2.3}$$

Нули выражения (2.3) определяются из соотношения

$$\lambda(\mu,\nu) = n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

При отрицательных значениях n выражение $\Gamma(1+\lambda)\sin\pi\lambda$ отлично от нуля при $\lambda \to n$. Уравнение (2.4) эквивалентно уравнению

$$(\mu M - \omega)^2 = p_n^2(k). \tag{2.5}$$

В [7] рассмотрен случай $N^2(z) = \text{const}$ и конечной толщины стратифицированного слоя, где показано, что уравнение типа (2.5) имеет при $M < 1$ от двух до четырех корней. В данном случае уравнение (2.5) может иметь четыре корня и при $M > 1$. Далее будем полагать, что значения ω, M таковы, что дисперсионное уравнение (2.5) имеет два действительных корня $\mu_n^1(\nu)$, $\mu_n^2(\nu)$ для любых значений ν, n, что заведомо выполняется при $M > 1$, $\omega > 1/4$.

Методом возмущений можно показать, что при интегрировании по переменной μ полюса необходимо обходить сверху. Тогда при $x < 0$, замыкая контур интегрирования вверх, получаем, что поле экспоненциально мало, так как действительных полюсов нет. При $x > 0$, замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость и учитывая вычет в полюсах $\mu_n^1(\nu)$, $\mu_n^2(\nu)$, можно получить

$$\eta(x,y,z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1(R_n^j,k,z_-)F_2(R_n^j,k,z_+)}{2k(-1)^{-n}n!\,\Gamma(1+2\beta)\Lambda(\mu_n^j(\nu))}\exp(-i(\mu_n^j(\nu)x + \nu y))d\nu, \tag{2.6}$$
$$R_n^j = \mu_n^j(\nu)(\nu)M - \omega, \quad \Lambda(\mu) = \partial\lambda/\partial\mu.$$

Дальнее полное волновое поле ВГВ состоит из суммы двух серий волновых мод, каждая из которых представлена в виде интеграла по ν, каждый из которых на больших расстояниях от движущегося источника возмущений можно оценить с помощью метода стационарной фазы. Представим выражение (2.6) в виде

$$\eta(x,y,z) = \sum_{m=0}^{\infty}(J_n^1 + J_n^2)$$

и рассмотрим интегралы первой серии J_n^1 с дисперсионными кривыми $\mu_n^1(\nu)$. Обозначим через $A_n^1(\nu, z)$ амплитуду соответствующих подынтегральных выражений в (2.6). Тогда в приближении стационарной фазы можно получить

$$J_n^1 = B_{n+} + B_{n-},$$

$$B_{n\pm} = \frac{A_n^1(\nu_\pm, z)}{\sqrt{2\pi x b_n(\nu_\pm)}}\exp(-i(\mu_n^1(\nu_\pm)x - \nu_\pm y \pm \pi/4)), \quad b_n(\nu) = \frac{\partial^2\mu_n^1(\nu)}{\partial\nu^2},$$

где $\nu_\pm$ – корни уравнения

$$\frac{\partial^2\mu_n^1(\nu)}{\partial\nu} = y/x.$$

Полученное выражение применимо внутри волнового клина, угол полураствора θ каждого из которых определяется из соотношения

$$\theta = \operatorname{arctg}(\mu_n^1(\nu_n^*)),$$

где ν_n^* – корень уравнения $\dfrac{\partial^2\mu_n^1(\nu)}{\partial\nu^2} = 0$. Аналогичные оценки можно получить и для интегралов J_n^2. Асимптотика, описывающая волновые поля ВГВ вдали от источника возмущений, применимая как вблизи, так и вдали от волнового клина (равномерная асимптотика), выражается через функцию Эйри и ее производную (см. [5], [7]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для модельного распределения частоты плавучести с одним максимумом термоклина получены аналитические решения основной краевой задачи уравнения внутренних гравитационных волн, выражающиеся через функции Уиттекера. Эти представления позволяют построить асимптотики амплитудно-фазовых характеристик дальних полей ВГВ в стратифицированной среде с непостоянной частотой Брента–Вейсяля вдали от движущегося осциллирующего источника возмущений. Полученные асимптотики дальних полей ВГВ дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики реальных природных сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эккарт К.* Гидродинамика океана и атмосферы. Москва–Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 328 с.
2. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: Introduction to wave dynamics. Berlin: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Massel S.R.* Internal gravity waves in the shallow seas. Berlin: Springer, 2015. 163 p.
5. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
6. *Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K.* Baroclinic tides. N.Y.: Cambridge University Press, 2005. 372 p.
7. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые движущимся с докритической скоростью осциллирующим источником возмущений // Прикл. механ. и техн. физ. 2017. Т. 58. № 6. С. 50–57.
8. *Рындина В.В.* Собственные частоты внутренних волн в жидкости и частота Брента–Вейсяля. Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2007. 128 с.
9. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 1. М.: Мир, 1978. 547 с.
10. *Никифоров А.Ф, Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: ИД Интеллект, 2008. 344 с.
11. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. В 2-х частях. М.: URSS, 2015. 864 с.