ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2019, том 59, № 5, с. 822–828

УДК 519.676

УЛУЧШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ РАНДОМИЗИРОВАННЫХ АЛГОРИТМОВ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО С “РАСЩЕПЛЕНИЕМ”[1)]

© 2019 г. Г. А. Михайлов[1,2]

([1] 630090 Новосибирск-90, пр-т акад. Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук СО РАН, Россия;
[2] 630090 Новосибирск-90, ул. Пирогова, 1, Новосибирский государственный университет, Россия)
e-mail: gam@sscc.ru

Поступила в редакцию 19.11.2018 г.
Переработанный вариант 11.01.2019 г.
Принята к публикации 11.01.2019 г.

Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло строятся путем совместной реализации базовой вероятностной модели задачи и ее случайных параметров (случайной среды) с целью исследования параметрического распределения линейных функционалов. В настоящей работе используются статистическая ядерная оценка многомерной плотности распределения с “равномерным” ядром и метод расщепления, состоящий в том, что для каждой реализации среды моделируется некоторое число n базовых траекторий. Строится оценка оптимального значения n по критерию трудоемкости вычислений, сформулированному в настоящей работе. С помощью довольно сложных выкладок получены аналитические оценки соответствующей вычислительной эффективности. Библ. 17.

Ключевые слова: вероятностная модель, метод Монте-Карло, статистическое моделирование, рандомизированный алгоритм, метод двойной рандомизации, случайная среда, метод расщепления, статистическая ядерная оценка, трудоемкость функциональной оценки.

DOI: 10.1134/S0044466919050119

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы Монте-Карло строятся на основе естественных или искусственно сформулированных вероятностных моделей, которые численно статистически реализуются с помощью известных алгоритмов (см., например, [1]–[3]). Они могут быть сравнительно эффективными, когда базовые модели содержат случайные параметры и для оценки искомых величин используется совместное статистическое моделирование базовых и параметрических распределений, то есть фактически реализуется произведение соответствующих вероятностных пространств (возможно, многократное). Соответствующие алгоритмы метода Монте-Карло в настоящей работе называются рандомизированными. Формулируемый таким образом метод ”двойной рандомизации” можно пояснить, рассматривая интеграл

$$J(\sigma) = \int\limits_W g(w;\sigma)P(dw;\sigma)$$

со случайным, возможно функциональным, параметром σ. Здесь $P(dw;\sigma)$ – вероятностная мера в W с параметром σ. Пусть необходимо оценить математическое ожидание $J = EJ(\sigma)$. Если определена достаточно точная оценка $J(\sigma) \approx \hat{J}(\sigma)$, то численное построение выборки $\{\sigma_i\}$ дает статистические оценки требуемых величин. Однако для реальных задач такой алгоритм может быть слишком трудоемким. При этом целесообразно использовать двойную рандомизацию, моделируя для выбранного σ лишь сравнительно небольшое число n точек ω соответственно распределению $P(dw;\sigma)$ с вычислением и осреднением полученных значений $g(\omega;\sigma)$. Оптимальное по критерию трудоемкости вычислений значение n здесь оценивается по формулам стохастического метода “расщепления” [4] (см. далее п. 1).

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 17-01-00823, 18-01-00356 (раздел 1)).

В настоящей работе решается более сложная задача оптимизации рандомизированного алгоритма для случая, когда $J(\sigma) := J(x,\sigma)$ и необходимо оценить функцию $f(x) = EJ(x,\sigma)$.

1. ЧИСЛЕННО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОЦЕНКА, ЕЕ ТРУДОЕМКОСТЬ

1. Для построения функциональной оценки рассматриваются линейные функционалы вида

$$J_k(\sigma) = \int\limits_{R^m} f(x;\sigma)h_k(x;\sigma)dx.$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$; σ – случайный, возможно функциональный, параметр задачи ("случайная среда"); $f(x;\sigma) \in L_1(R^m)$ – решение задачи с параметром σ, определяемое компьютерно реализуемой вероятностной моделью, т.е. базовым ансамблем траекторий $\{\Omega\}$ в фазовом пространстве R^m; $h_k(x;\sigma) \in L_\infty(R^m)$.

Методом Монте-Карло строятся несмещенные оценки $\xi_k(\Omega;\sigma)$ функционалов $J_k(\sigma)$, то есть при фиксированном σ имеем: $E_\Omega\xi_k(\Omega;\sigma) = J_k(\sigma)$. Для иллюстрации такой схемы можно рассматривать задачу переноса частиц – квантов излучения – с рассеянием и поглощением через среду со случайной плотностью $\sigma(r)$, $r \in R^3$ (см., например, [5], [6]); здесь $\{\Omega\}$ – ансамбль траекторий квантов, который можно определить однородной цепью Маркова столкновений квантов с элементами вещества [7]. Отметим, что методом Монте-Карло при этом осуществляется осреднение функционалов от решения интегро-дифференциального уравнения переноса излучения через случайную среду. Формулировки рандомизированных алгоритмов далее будут связываться с такой задачей переноса частиц, хотя они применимы также для любых численно реализуемых ансамблей $\{\Omega\}$ и параметров σ.

Метод двойной рандомизации определяется легко проверяемым соотношением (см. [8])

$$J_k = EJ_k(\sigma) = E_{(\Omega,\sigma)}\xi_k(\Omega;\sigma). \quad (1)$$

Здесь Ω – траектория кванта излучения, построенная для реализации среды с плотностью σ.

Согласно правилу повторного осреднения (то есть фактически по теореме Фубини) соотношение (1) реализуется следующим образом: строится реализация случайной среды (то есть, вообще говоря, поля σ) и затем в этой фиксированной среде строится траектория Ω, которая дает вклад в статистическую оценку величины (1).

Практически весьма важно, что при построении несмещенной оценки момента (1) для данной реализации σ достаточно строить лишь одну элементарную оценку функционала. Отметим, что при попадании траектории Ω в подобласть среды с уже выбранными значениями σ их нельзя выбирать заново, иначе возникает "ошибка перевыбора" [6]. Согласно теореме Фубини, правая часть соотношения (1) должна оставаться конечной после замены $\xi(\Omega;\sigma)$ на $|\xi(\Omega;\sigma)|$. При $\xi(\Omega;\sigma) \geq 0$ соотношение (1) выполняется в любом случае.

2. Трудоемкость алгоритма двойной рандомизации для оценки величины $EJ(\sigma) = E_{(\Omega;\sigma)}\xi(\Omega;\sigma)$ можно уменьшить, используя серию условно-независимых траекторий $\{\Omega_k\}_{k=1,\ldots,n}$, которые строятся для фиксированного σ, то есть используя оценку метода "расщепления" (см. [4])

$$\zeta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi(\Omega_k;\sigma).$$

При этом

$$D\zeta_n = d_0 + d_1/n, \quad \text{где} \quad d_0 = D_\sigma E_\Omega\xi(\Omega;\sigma), \quad d_1 = E_\sigma D_\Omega\xi(\Omega;\sigma).$$

Среднее число вычислительных операций здесь определяется формулой $T_n = t_0 + nt_1$, где t_0 соответствует реализации σ, а t_1 – реализации Ω. Минимизирующее (с точностью до перехода к целой части) величину трудоемкости $S_n = D\varsigma_n \times T_n$ [4] значение n равно

$$n_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t_0}{t_1}\frac{d_1}{d_0}}, \quad (2)$$

причем

$$S_{n_{\text{opt}}} = (\sqrt{t_0 d_0} + \sqrt{t_1 d_1})^2 \le S_1. \tag{3}$$

В реальных задачах аналитические оценки коэффициентов в формуле (2) затруднительны, поэтому их целесообразно оценивать, как указано в [5], на основе предварительной статистический оценки величин $D\zeta_n$, T_n для двух значений $n = n_1, n_2$ (по возможности близких к n_{opt}), то есть путем решения уравнений

$$d_0 + \frac{d_1}{n_i} = \hat{D}\zeta_{n_i}, \quad t_0 + n_i t_1 = \hat{T}_{n_i}, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Методика, основанная на (2), требует уточнения в тех случаях, когда “достраивание” реализации σ происходит при последовательном моделировании траекторий Ω_k [9]. При этом величина трудоемкости S_n нелинейно, и в реальных задачах сложно,зависит от n так, что эффективное значение отношения t_0/t_1, и тем самым n_{opt}, уменьшается. Однако можно предположить, что в представлении $T_n = t_0 + n \times \varphi(n) \times t_1$ функция $\varphi(n)$ в некоторой окрестности n_{opt} меняется существенно слабее, чем n; следовательно, уравнения (4) с выражением (2) могут эффективно уточнять оценку величины n_{opt}. Например, если после моделирования траектории Ω_k число операций для построения Ω_{k+1} уменьшается на сравнительно малую величину t_2, то можно положить $\varphi(n) = 1 - t_2(n-1)/2$, причем n_{opt} уменьшается вследствие связанного с этим преобразованием уменьшения t_0.

3. Рассмотрим теперь оценку плотности распределения $f(x)$ с помощью численного моделирования параметра σ и соответствующих траекторий Ω. Практически эффективной для этой цели может быть универсальная статистическая ядерная оценка Парзена–Розенблатта [10] с прямоугольным (“равномерным”) ядром (см. также [11]). Она строится на основе статистической оценки функционалов вида

$$J_\Delta = \int f(x) I_\Delta(x)dx = E\int f(x) I_\Delta(x)dx,$$

где $I_\Delta(x)$ – индикатор гиперинтервала $\Delta = \left\{\left(x_i - \frac{\delta}{2}, x_i + \frac{\delta}{2}\right)\right\}$, $i = 1, \ldots, m$. Предполагается, что постановка задачи допускает построение бернуллиевской оценки функционала J_Δ путем подсчета числа траекторий Ω, невозвратно “посетивших” интервал Δ. В задачах теории переноса частиц $f(x)$ – это, в частности, стохастическая плотность распределения числа частиц в точках их “гибели”, например, вследствие невозвратного вылета из среды. Имеет место статистическая оценка

$$J_\Delta \approx \frac{n_\Delta}{N},$$

где n_Δ – число траекторий частиц, “посетивших” интервал Δ в выборке $\{(\sigma_i, \Omega_i)\}$ $(i = 1, \ldots, N)$, так как $En_\Delta = NJ_\Delta$.

Средний квадрат погрешности оценки $f(x) \approx n_\Delta/(N\delta^m)$ равен (см., например, [11])

$$\begin{gathered}\varepsilon^2(x; N, \delta) = E\left[f(x) - \frac{n_\Delta}{N\delta^m}\right]^2 = D\left(\frac{n_\Delta}{N\delta^m}\right) + \left(f(x) - \frac{J_\Delta}{\delta^m}\right)^2 \approx \frac{f(x)}{N\delta^m} + F(x)\delta^4, \\ F(x) = \left(\sum_{i=1}^m f_i(x)\right)^2 \Big/ 576\end{gathered} \tag{5}$$

с относительной погрешностью, убывающей до нуля при $\delta \to 0$ и $N\delta^m \to \infty$. Минимизируя (5) соответственно [11], получаем

$$\delta_0^{m+4}(x) = \frac{mf(x)}{4NF_m(x)}, \quad \varepsilon^2(x; N, \delta_0) = \delta_0^{-m}\frac{f(x)}{N}\frac{4+m}{4} \asymp N^{-\frac{4}{4+m}}.$$

Отметим, что в [12] для оценки $f(x)$ и $f''(x)$ при $m = 1$ была использована наилучшая в метрике L_2 квадратическая аппроксимация функции $f(x)$ в интервале $\Delta_0 \supset \Delta$ с помощью полиномов Лежандра порядка 0, 1, 2. Так же, как в [13], в работе [12] для оптимизации одномерной ядерной оценки была использована “микрогруппированная” выборка с шагом $h \ll \varepsilon / \max_x |f'(x)|$. При этом среднее число операций в алгоритме практически не зависит от δ.

4. Пусть ξ – несмещенная оценка величины J, соответствующая определенной численно-статистической процедуре, среднее число операций для которой равно t. В теории методов Монте-Карло трудоемкость S такой оценки определяется величиной $tD\xi$ [1]–[4], так как для достижения среднеквадратической погрешности ε необходимо $N = D\xi/\varepsilon^2$ реализаций указанной процедуры.

В настоящей работе аналогичным образом определяется трудоемкость статистической функциональной оценки следующим утверждением.

Лемма 1. *Если средний квадрат погрешности статистической функциональной оценки равен $DN^{-\alpha}$, где N – объем выборки, а среднее число операций для вычисления выборочного значения оценки равно t, то трудоемкость S оценки определяется выражением*

$$S = D^{1/\alpha}t.$$

Доказательство. По определению (см. [14]), трудоемкость вычислений – это среднее число S вычислительных операций, необходимых для достижения заданной погрешности ε. В условиях леммы $\varepsilon^2 = DN^{-\alpha}$, откуда $N = D^{1/\alpha}\varepsilon^{-2/\alpha}$ и

$$S = D^{1/\alpha}t\varepsilon^{-2/\alpha}.$$

Лемма 1 доказана.

Следующее утверждение определяет соответствующий критерий оптимальности статистической функциональной оценки.

Лемма 2. *Если средний квадрат погрешности статистической функциональной оценки с параметром β равен $D(\beta)N^{-\alpha}$, а среднее число операций для вычисления выборочного значения оценки равно $t(\beta)$, где N – объем выборки, то оптимальное (по критерию трудоемкости вычислений) значение β равно*

$$\arg\min_\beta D^{1/\alpha}(\beta)t(\beta) = \arg\min_\beta D(\beta)t^\alpha(\beta). \tag{6}$$

2. ОПТИМИЗАЦИЯ РАНДОМИЗИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ

В случае дополнительного осреднения методом двойной рандомизации в выражении (5) можно полагать $f(x) = Ef(x;\sigma)$. Целью настоящего раздела работы является минимизация трудоемкости оценки соответственно этому выражению рассмотренным в разд. 1 методом расщепления с параметром n. Здесь целесообразно осреднить соотношение (5) по x, то есть по аналогии с [15] рассматривать величину

$$\varepsilon^2(N,\delta) = \int \varepsilon^2(x;N,\delta)dx = \frac{d}{N\delta^m} + f_0\delta^4,$$

где

$$d = \int f(x)dx, \quad f_0 = \int \sum_{i=1}^m (f_i''(x))^2 dx/576,$$

заменив N на Nn в предположении асимптотической ограниченности n.

Теорема 1. *Минимальное значение величины*

$$S^*(n,\delta) = \varepsilon^2(N\cdot n,\delta)T_n = \left(\frac{d}{Nn\delta^m} + f_0\delta^4\right)(t_0 + nt_1)$$

достигается при

$$\delta = \delta^* = \left(\frac{m^2}{16}\frac{t_1 d}{t_0 f_0^{(m)}}\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{4+m}}, \quad n = n^* = \left(\frac{t_0}{t_1}\frac{d}{f_0}\frac{1}{(\delta^*)^{4+m}N}\right)^{1/2} = \frac{4}{m}\frac{t_0}{t_1},$$

причем

$$\varepsilon^2(Nn^*, \delta^*) = \frac{t_1 dm(4+m)}{16 t_0 N(\delta^*)^m} \asymp N^{-\frac{4}{(4+m)}}.$$

Доказательство. Поскольку предполагается независимость t_0, t_1 от δ, то согласно (3) величина δ^* после несложных выкладок получается из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\sqrt{f_0\delta^4 t_0} + \sqrt{\frac{t_1 d}{N\delta^m}}\right)^2 = 0.$$

Значение n^* получается из (2) при $d_0 = f_0(\delta^*)^4$, $d_1 = d/(N(\delta^*)^m)$. Это завершает доказательство теоремы 1.

Напомним, что в случае аналоговой бернуллиевской оценки функционала J_Δ используется значение $d = \int f(x)dx$. Для несмещенной весовой модификации моделирования здесь, соответственно [12], $f(x)$ заменяется на плотность распределения квадрата веса $f_{w^2}(x)$, если вспомогательный вес частицы w ограничен, то есть $w \le C < +\infty$. Заметим, что в задаче о переносе частиц можно не "разыгрывать" поглощение; при этом вспомогательный вес равен $\exp(-\tau_c)$, где τ_c – "оптическая" длина траектории относительно коэффициента поглощения (см., например, [6], [7]).

Перейдем теперь к точной формулировке задачи оптимизации рассматриваемой рандомизированной ядерной оценки. Вследствие леммы 2 справедлива

Теорема 2. *Трудоемкость рандомизированной ядерной оценки функции $f(x)$ асимптотически по N определяется параметрами n_0^*, δ_0^*, минимизирующими величину*

$$S(n, \delta_0) = \varepsilon^2(Nn, \delta_0)^{(4+m)/4}(t_0 + nt_1). \tag{7}$$

При этом сохраняется асимптотика $\varepsilon^2(Nn_0^*, \delta_0^*) \asymp N^{-4/(4+m)}$.

Представленную в теореме 2 задачу минимизации можно решать численно. В первом приближении $n_0^* \approx n^*$, $\delta_0^* \approx \delta^*$, так как $(t_0 + nt_1)^{m/(4+m)}$ – сравнительно слабо меняющаяся функция аргумента n при $m = 1, 2$.

Отметим, что в случае указанной в п. 1 нелинейной зависимости величины $T_n = t_0 + nt_1$ от n значение n^* и, тем самым, отношение t_0/t_1 можно уточнить с помощью численной оптимизации алгоритма расщепления для функционала $J = \int f(x)dx$ на основе соотношений (4).

Полученные результаты соответствуют случаю "равномасштабных" координат вектора $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$. В противном случае следует, как обычно, использовать масштабирование: $\delta^{(i)} = c_i\delta$ $(i = 1, \ldots, m)$. При этом в полученных соотношениях $f(x)$ заменяется на $f(x)\Big/\prod_{i=1}^m c_i$, а $f_i''(x)$ – на $c_i^2 f''(x)$.

Заметим, что предложенный Н.Н. Ченцовым для использования в рамках численного статистического моделирования рандомизированный проекционный метод [16] соответственно (1) переносится на оценку осредненных распределений. Однако, как показывают расчеты, этот метод может быть практически эффективным лишь в случае достаточной гладкости оцениваемой одномерной функции или ее отношения к некоторой вспомогательной плотности вероятностей (см., например, [17]). Многомерное обобщение при этом весьма затруднительно.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАСЩЕПЛЕНИЯ С $n = n^*$

Для исследования эффективности расщепления с параметром n^* следует вычислить относительное значение трудоемкости соответствующей оценки, которое в обозначениях из (7) определяется отношением $S(1,\delta_0)/S(n^*,\delta^*)$.

Теорема 3. *Выполняется равенство*

$$\frac{S(1,\delta_0)}{S(n^*,\delta^*)} = \frac{4}{4+m}\left(1+\frac{t_0}{t_1}\right).$$

Доказательство. Согласно сказанному выше, имеем

$$\varepsilon^2(N,\delta_0) = \frac{4+m}{4}\frac{d}{\delta_0^m N}, \qquad \delta_0^{m+4} = \frac{m}{4}\frac{d}{f_0}\frac{1}{N}.$$

Отсюда, используя теорему 1, получаем

$$\left(\frac{\varepsilon(1,\delta_0)}{\varepsilon(n^*,\delta^*)}\right)^2 = \frac{\frac{4+m}{4}\frac{d}{N}\left(\frac{m}{4}\frac{d}{f_0}\frac{1}{N}\right)^{-\frac{m}{4+m}}}{\frac{t_1\cdot d\cdot m(4+m)}{16\cdot t_0\cdot N}\left(\frac{m^2}{16}\frac{t_1}{t_0}\frac{d}{f_0}\frac{1}{N}\right)^{-\frac{m}{4+m}}} = \left(4\frac{t_0}{t_1}\frac{1}{m}\right)^{\frac{4}{4+m}}.$$

Далее,

$$\frac{S(1,\delta_0)}{S(n^*,\delta^*)} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)^{2\frac{4+m}{4}}\frac{t_0+t_1}{\frac{4+m}{m}t_0} = \frac{4}{4+m}\left(1+\frac{t_0}{t_1}\right),$$

таким образом, теорема 3 доказана.

Удивительным является тот факт, что сложные выкладки здесь привели к столь простому выражению для сравнительной трудоемкости. Для более точной численной оптимизации расщепления может быть полезной следующая теорема, устанавливающая соотношение величин n_0^* и n^*.

Теорема 4. *Выполняется соотношение* $n_0^* > n^*$.

Доказательство. Можно полагать, что $\delta = \delta_0(n)$ и заменить $S(n,\delta)$ на $S(n)$, причем, согласно теореме 1, имеем

$$S^{*\prime}(n^*) = \left.\frac{dS^*(n)}{dn}\right|_{n=n^*} = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$S_0(n) = S^{\frac{4}{4+m}}(n) = S^*(n)(t_0+nt_1)^{-\frac{m}{4+m}}.$$

Опуская для краткости аргументы, дифференцированием по n получаем

$$S' = \frac{4+m}{4}S_0^{m/4}S_0', \quad S_0' = S^{*\prime}(t_0+nt)^{-m/(4+m)} - \frac{m}{4+m}S^*(t_0+nt_1)^{-(4+2m)/(4+m)}.$$

Отсюда с учетом равенства (8) получаем неравенство $S'(n^*) < 0$, что завершает доказательство теоремы 4.

В заключение заметим, что полученные результаты непосредственно распространяются на случай оценки осредненной по σ плотности распределения вектора $\eta_1(\Omega;\sigma), \ldots \eta_k(\Omega;\sigma)$, $k \le m$, с помощью использования соответствующего индикатора $J_\Delta(x)$. Пусть, например, необходимо оценить функцию $f(x) = Ef(x;\sigma)$, причем $f(x;\sigma)$ – условная плотность распределения случайной величины $\mu = (\omega,\mathbf{n})$, где ω – направление частицы, вылетающей из среды со случайной плотностью σ, а $\mathbf{n}$ – граничная нормаль. Здесь в качестве $J_\Delta(x)$ следует использовать индикатор интервала $\Delta = (\mu - \delta/2 < \mu(x) < \mu + \delta/2)$, где x – фазовые координаты точки вылета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 296 с.
2. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
3. *Kalos M.H., Whitlock P.A.* Monte Carlo methods. N.Y.: John Wiley and Sons, 1986.
4. *Kahn H.* Use of different Monte Carlo sampling techniques. In: Symposium on Monte Carlo methods (Ed. H.A. Meyer), N.Y.: Wiley, 1956. P. 146–190.
5. *Михайлов Г.А.* Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987. 283 с. [Engl. transl.: Springer-Verlag, 1980].
6. *Амбос А.Ю., Михайлов Г.А.* Эффективное осреднение стохастических радиационных моделей на основе статистического моделирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 896–908.
7. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.* Методы Монте-Карло в атмосферной оптике. Под ред. Г.И. Марчука. Новосибирск: Наука, 1976. 239 с. [Engl. transl.: Springer-Verlag, 1992].
8. *Михайлов Г.А.* Эффективные алгоритмы метода Монте-Карло для вычисления корреляционных характеристик условных математических ожиданий // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17. 1. С. 246–249.
9. *Амбос А.Ю.* Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и задачи переноса излучения // Сиб. журн. вычисл. матем. 2016. Т. 19. № 1. С. 19–32.
10. *Parsen E.* On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. 1962. № 35. P. 1065–1076.
11. *Епаничников В.А.* Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теор. вероятности и ее применения. 1969. Т. 14. Вып. 1. С. 156–161.
12. *Mikhailov G.A., Prigarin S.M. Rozhenko S.A.* Comparative analysis of vector algorithms for statistical modelling of radiative transfer process // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. 2018. V. 33. № 4. P. 220–229.
13. *Lotova G.Z.* Monte Carlo algorithms for calculation of diffusive characteristics of an electron avalanche in gases // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. 2011. V. 31. № 6. P. 369–377.
14. *Михайлов Г.А., Войтишек А.В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: Учеб. пособие. М.: Изд. центр “Академия”, 2006. 367 с.
15. *Боровков А.А.* Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997. 772 с.
16. *Ченцов Н.Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972. 520 с.
17. *Михайлов Г.А., Трачева Н.В., Ухинов С.А.* Рандомизированный проекционный метод для оценки угловых распределений поляризованного излучения на основе численного статистического моделирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1560–1570.