

УДК 517.63

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ТИПА КУЭТТА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОКЕАНУ¹⁾

© 2019 г. С. Л. Скороходов^{1,*}, Н. П. Кузьмина^{2,**}

¹⁾ 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия;

²⁾ 117997 Москва, Нахимовский пр-т, 36, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия)

*e-mail: sskorokhodov@gmail.com

**e-mail: kuzmina@ocean.ru

Поступила в редакцию 24.12.2018 г.

Переработанный вариант 11.01.2019 г.

Принята к публикации 11.01.2019 г.

Построен метод исследования уравнения эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса для анализа устойчивости малых возмущений океанских течений с линейным вертикальным профилем основного течения. Задача зависит от нескольких безразмерных параметров и сводится к решению спектральной несамосопряженной задачи, содержащей малый параметр при старшей производной. Особенностью задачи является вхождение спектрального параметра как в уравнение, так и в граничные условия. В зависимости от типов краевых условий исследованы две задачи I и II, отличающиеся заданием либо возмущения давления, либо его второй производной. Найдены асимптотические разложения собственных функций (СФ) и собственных значений (СЗ) при малых значениях волнового числа k . Получено, что в задаче I при $k \rightarrow +0$ существуют два конечных СЗ и счетное множество неограниченно растущих СЗ, лежащих на прямой $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$. В задаче II при $k \rightarrow +0$ существуют лишь неограниченно растущие СЗ. Разработан высокоточный аналитико-численный метод расчета СФ и СЗ обеих задач для широкого диапазона изменения физических параметров задачи и волнового числа k . Показано, что при изменении числа k некоторые пары СЗ образуют двойные СЗ, которые при увеличении числа k распадаются на простые СЗ, симметричные относительно прямой $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$. Вычислено с высокой точностью большое количество простых и двойных СЗ, исследованы траектории СЗ при изменении числа k и проведен анализ зависимости неустойчивости течения от параметров задачи. Библ. 20. Фиг. 6.

Ключевые слова: спектральная несамосопряженная задача, вронскиан системы, метод Ньютона, асимптотические разложения, двойные собственные значения.

DOI: 10.1134/S0044466919050144

ВВЕДЕНИЕ

Продолжая исследования неустойчивости течений (см. [1]–[6]) с учетом вертикальной диффузии массы и импульса, мы рассмотрим модельное течение типа Куэтта, т.е. течение с линейным вертикальным профилем скорости или с постоянным вертикальным сдвигом, которое является типичным для океана. Для описания динамики возмущений такого течения использовалось линейное уравнение потенциального вихря в квазигеострофическом приближении. Вывод основных уравнений модели подробно представлен в [3]–[5].

Особое внимание в работе уделено разработке аналитико-численного метода решения спектральных задач типа Орра–Зоммерфельда и построению асимптотического разложения собственных функций (СФ) и собственных значений (СЗ) при малых волновых числах. Это позво-

¹⁾Работа выполнена в рамках гос. задания ФИЦ “Информатика и Управление” РАН и гос. задания Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН (тема № 0149-2019-0013).

лило создать высокоэффективный метод расчета и исследовать неустойчивость модельных течений в широком диапазоне физических параметров.

Задача ставится следующим образом. Область, в которой исследуется течение, является бесконечным (вдоль направления течения) горизонтальным слоем с верхней и нижней границами z_0 и z_1 и боковыми границами y_0 и y_1 . Для описания этого слоя введем вертикальную переменную $z \in [z_0, z_1]$, поперечную переменную $y \in [y_0, y_1]$ и переменную x , направленную вдоль течения, $x \in (-\infty, \infty)$.

Следуя [3], [4], представим возмущение безразмерного давления p в виде полуволны по оси y и бегущей волны вдоль оси x с неизвестной скоростью c ,

$$p(x, y, z; t) = \sin\left(\pi \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right) e^{ik(x-ct)} F(z), \quad (0.1)$$

где k – волновое число возмущения вдоль координаты x , а $F(z)$ – искомый вертикальный профиль возмущения давления. Основным потоком, на фоне которого возникают исследуемые возмущения, будем считать течение типа Куэтта с линейным вертикальным профилем скорости $U(z) = z$, в отличие от течения типа Пуазейля (см. [3], [4]) с профилем

$$U(z) = 1 - z^2, \quad z \in [-1, 1].$$

Тогда задача нахождения профиля $F(z)$ сводится к решению на отрезке $z \in [0, 1]$ уравнения для комплекснозначной функции $F = F(z)$:

$$\frac{1}{ikR} [F^{(IV)} - \text{PrBu}(\pi^2 + k^2)F'''] = (z - c)[F''' - \text{Bu}(\pi^2 + k^2)F], \quad (0.2)$$

где $R = \text{Re } H/L$, Re – число Пекле (аналог числа Рейнольдса), H – вертикальный масштаб слоя, $L = y_1 - y_0$ – поперечный масштаб течения, Pr – число Прандтля, Bu – число Бургера, i – мнимая единица.

Два крайних условия задают отсутствие протекания на горизонтальных границах слоя $z = 0$ и $z = 1$,

$$\frac{1}{ikR} F'''(z) = (z - c)F'(z) - F(z), \quad z = \{0, 1\}. \quad (0.3)$$

Еще два условия на этих границах задают равенство нулю потоков плавучести

$$F''(0) = F''(1) = 0, \quad (0.4)$$

либо равенство нулю возмущения давления,

$$F(0) = F(1) = 0. \quad (0.5)$$

Таким образом, здесь возникают две спектральные задачи на отрезке $z \in [0, 1]$ для бесконечнодифференцируемых функций $F(z)$.

Задача I. Найти собственные функции (СФ) $F(z)$ и соответствующие им собственные значения (СЗ) c – решения уравнения (0.2) с крайними условиями (0.3), (0.4).

Задача II. Найти собственные функции $F(z)$ и соответствующие им СЗ c – решения уравнения (0.2) с крайними условиями (0.3), (0.5).

Необходимо отметить, что оператор задач I и II является несамосопряженным, он содержит малый параметр $(kR)^{-1}$ при старшей производной (величина kR для реальных течений может быть очень большой), а спектральный параметр c входит как в уравнение (0.2), так и в краевое условие (0.3). Собственных функций $F_n(z)$ и соответствующих им СЗ c_n будет счетное множество, а неустойчивость по времени возмущений давления $p(x, y, z; t)$ возникает для тех СФ, которым соответствует СЗ c_n , имеющее мнимую часть $\text{Im}(c_n) > 0$, что следует из представления (0.1).

Обзор литературы и современное состояние исследований спектра подобных операторов содержится в [7]; обзор методов вычисления СЗ таких задач дан в [8]–[10]. В [11], [4], [5] изложен метод, позволивший эффективно вычислить СФ и СЗ уравнений типа Орра–Зоммерфельда с высокой точностью. В настоящей работе этот метод использован для решения задач I и II.

1. СИММЕТРИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Докажем свойство симметрии СЗ c_n задач I и II.

Теорема. Собственные значения c_n задачи (0.2), (0.3), (0.4) и задачи (0.2), (0.3), (0.5) при вещественных параметрах k, R, Pr, Bu обладают симметрией относительно прямой $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$. Если c_n является СЗ задачи (0.2), (0.3), (0.4), то

$$\hat{c}_n = 1 - \operatorname{Re}(c_n) + i \operatorname{Im}(c_n)$$

также является СЗ этой задачи I.

Если c_n является СЗ задачи (0.2), (0.3), (0.5), то

$$\hat{c}_n = 1 - \operatorname{Re}(c_n) + i \operatorname{Im}(c_n)$$

также является СЗ этой задачи II.

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу (0.2), (0.3), (0.4), и пусть она имеет решение в виде СФ $F(z)$ и соответствующего СЗ c , причем $\operatorname{Re}(c) \neq \frac{1}{2}$. Обозначим вещественную и мнимую части СФ и СЗ следующим образом:

$$F(z) = g(z) + ih(z), \quad z \in [0, 1], \quad c = p + iq. \quad (1.1)$$

Подставим выражение (1.1) в уравнение (0.2) и запишем его для вещественных и мнимых частей:

$$(kR)^{-1} [g^{(IV)} - PrBu(\pi^2 + k^2)g''] = q[g'' - Bu(\pi^2 + k^2)g] - (z - p)[h'' - Bu(\pi^2 + k^2)h], \quad (1.2)$$

$$(kR)^{-1} [h^{(IV)} - PrBu(\pi^2 + k^2)h''] = (z - p)[g'' - Bu(\pi^2 + k^2)g] + q[h'' - Bu(\pi^2 + k^2)h].$$

Краевые условия (0.3) в точках $z = 0$ и $z = 1$ при этом примут следующий вид:

$$\frac{g'''(0)}{kR} = ph'(0) + qg'(0) + h(0), \quad \frac{h'''(0)}{kR} = -pg'(0) + qh'(0) - g(0), \quad (1.3)$$

$$\frac{g'''(1)}{kR} = -(1 - p)h'(1) + qg'(1) + h(1), \quad \frac{h'''(1)}{kR} = (1 - p)g'(1) + qh'(1) - g(1), \quad (1.4)$$

а условия (0.4) – вид

$$g''(0) = g''(1) = 0, \quad h''(0) = h''(1) = 0. \quad (1.5)$$

Теперь рассмотрим другую комплекснозначную функцию $\hat{F}(\bar{z})$ и другой комплексный параметр \hat{c} ,

$$\hat{F}(\bar{z}) = \hat{g}(\bar{z}) + i\hat{h}(\bar{z}), \quad \hat{c} = \hat{p} + i\hat{q}, \quad (1.6)$$

которые определим через $F(z)$ и c следующим образом:

$$\hat{g}(\bar{z}) = g(z), \quad \hat{h}(\bar{z}) = -h(z), \quad \bar{z} = 1 - z, \quad (1.7)$$

$$\hat{p} = 1 - p, \quad \hat{q} = q. \quad (1.8)$$

Теперь учтем соотношения для производных, следующие из (1.7):

$$\frac{d^n g(z)}{dz^n} = \frac{d^n \hat{g}(\bar{z})}{d\bar{z}^n}, \quad \frac{d^n h(z)}{dz^n} = -\frac{d^n \hat{h}(\bar{z})}{d\bar{z}^n}, \quad n = 2, 4, \quad (1.9)$$

$$\frac{d^n g(z)}{dz^n} = -\frac{d^n \hat{g}(\bar{z})}{d\bar{z}^n}, \quad \frac{d^n h(z)}{dz^n} = \frac{d^n \hat{h}(\bar{z})}{d\bar{z}^n}, \quad n = 1, 3, \quad (1.10)$$

а также соотношение

$$z - p = -(\bar{z} - \hat{p}), \quad (1.11)$$

вытекающее из (1.7), (1.8). Заменяя в уравнениях (1.2) производные $g^{(n)}(z)$ и $h^{(n)}(z)$, $n = 0, 2, 4$, на значения $\hat{g}^{(n)}(\bar{z})$ и $\hat{h}^{(n)}(\bar{z})$ в соответствии с равенствами (1.9), (1.10) и (1.7), а также заменяя множи-

тель $(z - p)$ на соотношение (1.11), убеждаемся в справедливости уравнения (0.2) для функции $\hat{F}(\tilde{z})$ и спектрального параметра \hat{c} ,

$$\hat{c} = 1 - \operatorname{Re}(c) + i \operatorname{Im}(c).$$

Аналогично этому, с учетом соотношений (1.7), (1.8), (1.10), заменяем в краевых условиях (1.3), (1.4) значения функций $g(z)$ и $h(z)$ и их производных соответственно на значения функций $\hat{g}(\tilde{z})$ и $\hat{h}(\tilde{z})$ и их производных. В итоге получаем, что два краевых условия (1.3) для функций $g(z)$, $h(z)$ и спектрального параметра c переходят в два краевых условия (1.4) для функций $\hat{g}(\tilde{z})$ и $\hat{h}(\tilde{z})$ и параметра \hat{c} . Аналогично этому, два краевых условия (1.4) для функций $g(z)$, $h(z)$ и параметра c переходят в два краевых условия (1.3) для функций $\hat{g}(\tilde{z})$ и $\hat{h}(\tilde{z})$ и параметра \hat{c} .

Далее проводим соответствующую замену в краевых условиях (1.5) и убеждаемся в их справедливости для функций $\hat{g}(\tilde{z})$ и $\hat{h}(\tilde{z})$. Таким образом, справедливость теоремы для задачи I доказана.

Аналогичная замена в задаче II с краевым условием (0.5) также доказывает справедливость теоремы. Таким образом, СФ исследуемых задач обладают симметрией относительно точки $z = \frac{1}{2}$, а СЗ при этом обладают симметрией относительно прямой $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$. Это завершает доказательство теоремы.

2. МЕТОД РАСЧЕТА СФ И СЗ

Вычисление СФ $F(z)$ и соответствующих СЗ c основано на методе (см. [11], [12], [5], [4]), который использует степенные разложения $F(z)$ в граничных точках $z = 0$, $z = 1$ и их гладкую сшивку в некоторой точке $z_* \in (0, 1)$.

Пусть зафиксирован спектральный параметр c . Тогда $F(c; z)$ – решение уравнения (0.2) – представим в виде следующих разложений в точках $z = 1$ и $z = 0$:

$$F(c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(c)(z-1)^n, \quad (2.1)$$

$$F(c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(c)z^n, \quad (2.2)$$

где коэффициенты a_n и b_n зависят от фиксированных параметров задачи $k, R, \operatorname{Pr}, \operatorname{Bu}$ и выбранного спектрального параметра c . Разложения (2.1), (2.2) сходятся при всех $|z| < \infty$, поскольку уравнение (0.2) не имеет конечных особых точек.

Подставляя ряды (2.1), (2.2) в уравнение (0.2), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_n и b_n :

$$a_{n+4} = \{(n+1)(n+2)[\operatorname{Pr}\operatorname{Bu}(\pi^2 + k^2) + (1-c)ikR]a_{n+2} + ikRn(n+1)a_{n+1} + ikR\operatorname{Bu}(\pi^2 + k^2)(c-1)a_n - ikR\operatorname{Bu}(\pi^2 + k^2)a_{n-1}\}[(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]^{-1}, \quad (2.3)$$

$$b_{n+4} = \{(n+1)(n+2)[\operatorname{Pr}\operatorname{Bu}(\pi^2 + k^2) - ikRc]b_{n+2} + ikRn(n+1)b_{n+1} + ikRc\operatorname{Bu}(\pi^2 + k^2)b_n - ikR\operatorname{Bu}(\pi^2 + k^2)b_{n-1}\}[(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]^{-1}. \quad (2.4)$$

Далее учтем краевые условия. Первое из них, (0.3), задает связь коэффициентов a_0 , a_1 и a_3 , а также b_0 , b_1 и b_3 :

$$a_3 = \frac{ikR}{6}[(1-c)a_1 - a_0], \quad b_3 = -\frac{ikR}{6}(cb_1 + b_0). \quad (2.5)$$

При решении задачи I краевое условие (0.4) приводит к равенствам для a_2 и b_2 :

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad (2.6)$$

а при решении задачи II краевое условие (0.5) приводит к равенствам для a_0 и b_0 :

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0. \quad (2.7)$$

Сначала построим решение задачи I. Определим функцию $F_1(c; z)$ в виде разложения (2.1), задав $a_0^{(1)}$ и $a_1^{(1)}$ следующими:

$$a_0^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = 0,$$

коэффициенты $a_2^{(1)}$ и $a_3^{(1)}$ определим из (2.6) и (2.5), а все последующие $a_n^{(1)}$ вычислим из соотношения (2.3), где дополнительно полагаем $a_{-1}^{(1)} = 0$.

Аналогично этому построим вторую функцию $F_2(c; z)$ в виде такого же разложения (2.1), но задав $a_0^{(2)}$ и $a_1^{(2)}$ следующими:

$$a_0^{(2)} = 0, \quad a_1^{(2)} = 1.$$

Тогда общее решение $F(c; z)$ уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.3), (0.4) лишь в точке $z = 1$ есть линейная комбинация $F_1(c; z)$ и $F_2(c; z)$,

$$F(c; z) = t_1 F_1(c; z) + t_2 F_2(c; z), \quad (2.8)$$

с произвольными весовыми коэффициентами t_1 и t_2 .

Теперь построим две функции $F_3(c; z)$ и $F_4(c; z)$ в виде разложений (2.2), задав коэффициенты $b_0^{(1)}$, $b_1^{(1)}$ и $b_0^{(2)}$, $b_1^{(2)}$ следующими:

$$b_0^{(1)} = 1, \quad b_1^{(1)} = 0, \quad b_0^{(2)} = 0, \quad b_1^{(2)} = 1,$$

положив b_2 , в соответствии с (2.6), нулевыми, b_3 вычислив из (2.5), а все последующие коэффициенты b_n для обоих разложений вычислив из соотношения (2.4) с учетом равенства $b_{-1}^{(1)} = b_{-1}^{(2)} = 0$.

Тогда общее решение $F(c; z)$ уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.3), (0.4) лишь в точке $z = 0$ есть линейная комбинация $F_3(c; z)$ и $F_4(c; z)$:

$$F(c; z) = t_3 F_3(c; z) + t_4 F_4(c; z), \quad (2.9)$$

с произвольными весовыми коэффициентами t_3 и t_4 .

Для построения СФ и нахождения СЗ задачи I выберем произвольную точку z_* на интервале $(0, 1)$ и потребуем совпадения в этой точке функций (2.8) и (2.9), а также их первых трех производных по z , т.е.

$$t_1 F_1^{(p)}(c; z_*) + t_2 F_2^{(p)}(c; z_*) - t_3 F_3^{(p)}(c; z_*) - t_4 F_4^{(p)}(c; z_*) = 0, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

В силу исходного уравнения (0.2) четвертого порядка мы заключаем, что в точке z_* все производные более высокого порядка разложений $t_1 F_1(c; z) + t_2 F_2(c; z)$ и $t_3 F_3(c; z) + t_4 F_4(c; z)$ также совпадают. Это обеспечит гладкость искомого решения $F(c; z)$ задачи I во всех точках $z \in [0, 1]$.

Нетривиальное решение системы (2.10) возможно только в случае равенства нулю вронскиана $W(F_1, F_2, F_3, F_4)$:

$$W(F_1, F_2, F_3, F_4; c; z_*) = 0. \quad (2.11)$$

Решая это уравнение, мы находим искомую комплексную скорость бегущей волны c , зависящую от параметров исследуемой задачи I.

При решении задачи II необходимо также построить две функции $F_1(c; z)$ и $F_2(c; z)$ в виде разложений (2.8) и две функции $F_3(c; z)$ и $F_4(c; z)$ в виде разложений (2.9), но вместо нулевых условий (2.6) для коэффициентов a_2 и b_2 необходимо взять условия (2.7) для a_0 и b_0 и для a_1, a_2 положить

$$a_1^{(1)} = 1, \quad a_2^{(1)} = 0, \quad a_1^{(2)} = 0, \quad a_2^{(2)} = 1,$$

а для b_1, b_2 положить

$$b_1^{(1)} = 1, \quad b_2^{(1)} = 0, \quad b_1^{(2)} = 0, \quad b_2^{(2)} = 1.$$

Для нахождения искомого СЗ задачи II здесь также возникает уравнение (2.11). Его решение будем строить с помощью метода Ньютона

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - W(\dots; c^{(q)}; z_*) \left[\frac{\partial W(\dots; c^{(q)}; z_*)}{\partial c} \right]^{-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (2.12)$$

а начальные приближения $c^{(0)}$ будем брать на основе метода продолжения по параметру k и из представленных ниже асимптотических разложений при $k \rightarrow 0$.

Необходимая для метода Ньютона производная $\partial W(\dots; c; z_*)/\partial c$ от вронскиана (2.11) системы (2.10) находилась с помощью явного дифференцирования по спектральному параметру c всех производных $F_1^{(p)}(c; z_*)$, $F_2^{(p)}(c; z_*)$, $F_3^{(p)}(c; z_*)$, $F_4^{(p)}(c; z_*)$ для $p = 0, 1, 2, 3$. Например, смешанные производные $\partial F_1^{(p)}(c; z_*)/\partial c$ и $\partial F_2^{(p)}(c; z_*)/\partial c$ вычислялись дифференцированием рядов (2.1),

$$\frac{\partial F^{(p)}(c; z_*)}{\partial c} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a'_n(c) (z_* - 1)^{n-p}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

а необходимые для разложений (2.13) производные $a'_n = a'_n(c)$ находились дифференцированием по c соотношений (2.3) и (2.5),

$$\begin{aligned} a'_{n+4} &= \{(n+1)(n+2)[\text{PrBu}(\pi^2 + k^2) + (1-c)ikR]a'_{n+2} - (n+1)(n+2)ikRa_{n+2} + ikRn(n+1)a'_{n+1} + \\ &+ ikR\text{Bu}(\pi^2 + k^2)[(c-1)a'_n + a_n] - ikR\text{Bu}(\pi^2 + k^2)a'_{n-1}\}[(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]^{-1}, \\ a'_3 &= \frac{ikR}{6}[-a_1 + (1-c)a'_1 - a'_0], \end{aligned}$$

где значения a'_0, a'_1 и a'_2 , в силу независимости a_0, a_1 и a_2 от c , полагались нулевыми. Построенное разложение для $\partial W(\dots; c; z_*)/\partial c$ позволяет избежать использования конечно-разностной производной

$$\frac{W(\dots; c + \Delta c; z_*) - W(\dots; c; z_*)}{\Delta c}$$

и связанной с ней потери точности при малых $|\Delta c|$.

3. АСИМПТОТИКА СФ И СЗ ЗАДАЧИ I ПРИ $k \rightarrow 0$

Построим при $k \rightarrow 0$ асимптотическое разложение СФ и СЗ при фиксированных и ненулевых физических параметрах Pr , Bu , Pr . Здесь необходимо отдельно рассмотреть два варианта – случай конечных СЗ и случай неограниченных СЗ.

3.1. Ограниченные СЗ

Исследуем сначала асимптотическое разложение при $k \rightarrow 0$ для СФ и СЗ задачи I при условии, что СЗ имеет конечный предел.

Используя методы асимптотического анализа [13], [14], представим СФ $F(k; z)$ и соответствующее ей СЗ $c(k)$ в виде разложения по степеням малого параметра k :

$$F(k; z) = \varphi_0(z) + k\varphi_1(z) + k^2\varphi_2(z) + \dots, \quad (3.1)$$

$$c(k) = \gamma_0 + k\gamma_1 + k^2\gamma_2 + \dots, \quad k \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Подстановка (3.1), (3.2) в уравнение (0.2) и краевые условия (0.3), (0.4) и приравнивание соответствующих слагаемых при степенях k^p , $p = 0, 1, \dots$, приводит к цепочке краевых задач для $\varphi_p(z)$ на отрезке $z \in [0, 1]$. Первая из них, для $\varphi_0(z)$, имеет вид

$$\varphi_0''''(z) - \text{Pr Bu } \pi^2 \varphi_0''(z) = 0, \quad (3.3)$$

$$\varphi_0''(0) = \varphi_0''(1) = 0, \quad \varphi_0'(0) = \varphi_0'(1) = 0. \quad (3.4)$$

Решением (3.3), (3.4) является линейная функция

$$\varphi_0(z) = A_0 + B_0 z \quad \forall A_0, B_0. \quad (3.5)$$

Далее, для функции $\varphi_1(z)$ и константы γ_0 имеем уравнение

$$\varphi_1''''(z) - \text{Pr Bu } \pi^2 \varphi_1''(z) = i \text{R Bu } \pi^2 (\gamma_0 - z) \varphi_0(z) \quad (3.6)$$

и краевые условия

$$\varphi_1''(z) = i \text{R} [(z - \gamma_0) \varphi_0'(z) - \varphi_0(z)], \quad \varphi_1'(z) = 0, \quad z = \{0, 1\}. \quad (3.7)$$

Решение уравнения (3.6) ищем в виде суммы $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$, где φ_h — общее решение однородного уравнения, а φ_{nh} — частное решение неоднородного уравнения. Учитывая вид (3.5) для φ_0 , выводим следующее представление для функции $\varphi_{nh}(z)$:

$$\varphi_{nh}(z) = D_2 z^2 + D_3 z^3 + D_4 z^4, \quad (3.8)$$

где

$$D_2 = \frac{i \text{R}}{\text{Pr}^2 \text{Bu } \pi^2} B_0 - \frac{i \text{R}}{2 \text{Pr}} \gamma_0 A_0, \quad D_3 = \frac{i \text{R}}{6 \text{Pr}} (A_0 - \gamma_0 B_0), \quad D_4 = \frac{i \text{R}}{12 \text{Pr}} B_0. \quad (3.9)$$

Для решения $\varphi_h(z)$ запишем представление в удобной форме:

$$\varphi_h(z) = A_1 \sinh \lambda \left(z - \frac{1}{2} \right) + B_1 \cosh \lambda \left(z - \frac{1}{2} \right) + D_0 + D_1 z, \quad \lambda = \pi \sqrt{\text{Pr Bu}}, \quad (3.10)$$

с произвольными константами A_1 , B_1 , D_0 и D_1 . Тогда, подставляя решение $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$ в краевые условия (3.7), получаем систему для искомым коэффициентов A_1 и B_1 :

$$\begin{aligned} \lambda^2 B_1 \cosh \frac{\lambda}{2} + 2D_2 + 3D_3 + 6D_4 = 0, \quad \lambda^2 A_1 \sinh \frac{\lambda}{2} + 3D_3 + 6D_4 = 0, \\ \lambda^3 A_1 \cosh \frac{\lambda}{2} + 6D_3 + 12D_4 + i \text{R} (\gamma_0 B_0 + A_0) = 0, \quad \lambda^3 B_1 \sinh \frac{\lambda}{2} + 12D_4 = 0. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3.9) и разрешая эту систему относительно A_1 и B_1 , получаем систему относительно коэффициентов A_0 и B_0 в представлении $\varphi_0(z)$ из (3.5):

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{1}{2} - \gamma_0 \right) \sinh \frac{\lambda}{2} A_0 + \left[\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \gamma_0 \right) \sinh \frac{\lambda}{2} - \cosh \frac{\lambda}{2} \right] B_0 = 0, \\ \left[\frac{\lambda}{2} \cosh \frac{\lambda}{2} - (1 + \text{Pr}) \sinh \frac{\lambda}{2} \right] A_0 + \left[\frac{\lambda}{2} (1 - \gamma_0) \cosh \frac{\lambda}{2} + (\gamma_0 - 1 - \gamma_0 \text{Pr}) \sinh \frac{\lambda}{2} \right] B_0 = 0. \end{aligned}$$

Нетривиальность решения этой системы требует равенства нулю ее детерминанта, что приводит к трансцендентному уравнению для искомой величины γ_0 :

$$\gamma_0^2 - \gamma_0 + Q = 0, \quad Q = \frac{U}{V}, \quad (3.11)$$

где

$$U = \frac{\text{Pr} + 2}{2} \sinh \lambda - \frac{\lambda}{2} - \frac{\text{Pr} + 1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{2}{\lambda} \right) (\cosh \lambda - 1), \quad (3.12)$$

$$V = -\frac{\lambda^2}{4} \sinh \lambda - \lambda \frac{\text{Pr} - 1}{2} (\cosh \lambda - 1). \quad (3.13)$$

Решение уравнения (3.11) запишем в форме, учитывающей знак величины $Q - 1/4$:

$$\gamma_{0,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - Q}, \quad Q \leq \frac{1}{4}, \quad (3.14)$$

$$\gamma_{0,2} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{Q - \frac{1}{4}}, \quad Q \geq \frac{1}{4}. \quad (3.15)$$

Отсюда получаем, что при $Q > \frac{1}{4}$ одно из значений γ_0 лежит в полуплоскости $\text{Im } \gamma_0 > 0$, а значит, при малых параметрах k , в силу представления (3.2), обеспечивает условие $\text{Im } c > 0$, что приводит к неустойчивости исследуемого течения.

При $Q < \frac{1}{4}$ оба значения $\gamma_{0,2}$, как видно из (3.14), лежат на оси $\text{Im } \gamma_0 = 0$, а значит, при $k \rightarrow +0$ это практически соответствует нейтральности возмущений с точностью до первого члена разложения (3.2).

Теперь рассмотрим случай достаточно широких течений, которым соответствуют значения параметра $\text{Bu} \ll 1$; при этом значения $\text{Pr} \sim 1$. Тогда, учитывая определение $\lambda = \pi\sqrt{\text{BuPr}}$, введенное в (3.10), заключаем, что $\lambda \ll 1$. Разложим выражения U , V и Q из равенств (3.12), (3.13) и (3.11) в ряд по малому параметру Bu и получим

$$Q = \frac{1}{3} + \frac{\pi^2 \text{Bu}}{360} (\text{Pr} - 5) + O(\text{Bu}^2). \quad (3.16)$$

Отсюда заключаем, что при малых Bu получаем $Q > \frac{1}{4}$ и значения $\gamma_{0,2}$ будут вычисляться по формуле (3.15), что обеспечивает неустойчивость течения.

Отдельно рассмотрим случай $Q = \frac{1}{4}$, дающий кратный корень γ_0 в уравнении (3.11) и соответствующий пограничному режиму возмущений между неустойчивостью и нейтральностью при числах $k \rightarrow +0$. Используя (3.11), (3.12), (3.13) и соотношение $\lambda = \pi\sqrt{\text{PrBu}}$, получаем параметрическую зависимость $\text{Pr} = \text{Pr}(\lambda)$ и $\text{Bu} = \text{Bu}(\lambda)$, описывающую эту границу,

$$\text{Pr}(\lambda) = \frac{8(\cosh \lambda - 1) + \lambda^2(1 + 3 \cosh \lambda) - \lambda(8 + \lambda^2/2) \sinh \lambda}{4\lambda \sinh \lambda - (\lambda^2 + 8)(\cosh \lambda - 1)}, \quad (3.17)$$

$$\text{Bu}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{4\lambda \sinh \lambda - (\lambda^2 + 8)(\cosh \lambda - 1)}{8(\cosh \lambda - 1) + \lambda^2(1 + 3 \cosh \lambda) - \lambda(8 + \lambda^2/2) \sinh \lambda}, \quad (3.18)$$

а при малых значениях λ эти зависимости $\text{Pr}(\lambda)$ и $\text{Bu}(\lambda)$ значительно упрощаются:

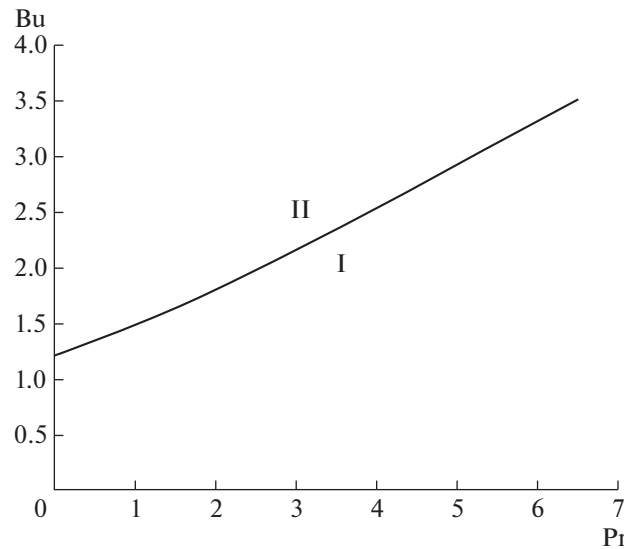
$$\text{Pr}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{12} - \frac{\lambda^4}{720} + O(\lambda^6), \quad \text{Bu}(\lambda) = \frac{12}{\pi^2} + \frac{\lambda^2}{5\pi^2} + O(\lambda^4). \quad (3.19)$$

Если же величина λ не является малой, то функции $\text{Pr}(\lambda)$ и $\text{Bu}(\lambda)$ значительно усложняются. Так, на фиг. 1 в координатах (Pr, Bu) представлена рассчитанная параметрическая зависимость (3.17), (3.18) для $\text{Pr}(\lambda)$ и $\text{Bu}(\lambda)$ при $\lambda \in [0, 15]$.

Точкам снизу под этой кривой (область I) соответствует случай $Q > 1/4$, а точкам сверху (область II) — случай $Q < 1/4$. Таким образом, в течениях с параметрами (Pr, Bu) , соответствующими точкам области I, возникает неустойчивость при малых волновых числах k .

Течения с параметрами (Pr, Bu) , соответствующими точкам области II, требуют построения разложений (3.2) для СЗ с нахождением слагаемого $k\gamma_1$ и выяснения знака величины $\text{Im}(\gamma_1)$, либо численных расчетов при малых k . Проведенные вычислительные эксперименты для этой области параметров (Pr, Bu) выявили условие $\text{Im} c < 0$, что обеспечивает устойчивость исследуемых возмущений течения при малых числах k .

Из фиг. 1 и (3.19) следует, что при значениях $\text{Bu} \leq \frac{12}{\pi^2}$ для любых параметров Pr течение будет неустойчивым при малых k , а при $\text{Bu} > \frac{12}{\pi^2}$ будет существовать некоторый диапазон $\text{Pr} \in (0, \text{Pr}_{\text{Bu}})$,



Фиг. 1. Зависимость $Bu(Pr)$ для случая $Q = \frac{1}{4}$, $\lambda \in [0, 15]$.

при котором возмущения течений являются устойчивыми при малых k . Вне этого диапазона параметров (Pr, Bu) течение становится неустойчивым при малых k . Дальнейший численный анализ полностью подтвердил этот вывод.

3.2. Неограниченные СЗ

Теперь построим асимптотическое разложение при $k \rightarrow 0$ для СФ и СЗ задачи I при условии, что СЗ неограниченно растет. Домножим обе части уравнения (0.2) и краевого условия (0.3) на величину ikR и обозначим произведение $ik\left(c - \frac{1}{2}\right)$ через \tilde{C} , а $z - \frac{1}{2}$ обозначим w :

$$\tilde{C} = ik\left(c - \frac{1}{2}\right), \quad w = z - \frac{1}{2}. \quad (3.20)$$

Тогда уравнение (0.2) для $F(w)$, $w \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, и краевые условия (0.3), (0.4) примут следующий вид:

$$F^{(4)} - PrBu(\pi^2 + k^2)F'' = R(ikw - \tilde{C})[F''' - Bu(\pi^2 + k^2)F], \quad (3.21)$$

$$F'''(w) = -R\tilde{C}F'(w) + ikR[wF'(w) - F(w)], \quad F''(w) = 0, \quad w = \pm \frac{1}{2}.$$

Теперь полагаем, что решение $F(k; w)$ имеет асимптотическое разложение, аналогичное (3.1),

$$F(k; w) = \varphi_0(w) + k\varphi_1(w) + k^2\varphi_2(w) + \dots, \quad (3.22)$$

а величина $\tilde{C}(k)$ имеет разложение

$$\tilde{C}(k) = \chi_0 + k\chi_1 + k^2\chi_2 + \dots, \quad \chi_0 \neq 0, \quad k \rightarrow 0. \quad (3.23)$$

Тогда для функций $\varphi_m(w)$ и искомых констант χ_m опять получаем цепочку краевых задач как и в предыдущем случае; первая из них, для $\varphi_0(w)$ и χ_0 , имеет вид:

$$\varphi_0''''(w) + (R\chi_0 - PrBu\pi^2)\varphi_0''(w) - R\chi_0 Bu\pi^2\varphi_0(w) = 0, \quad (3.24)$$

$$\varphi_0'''(w) = -R\chi_0\varphi_0'(w), \quad \varphi_0''(w) = 0, \quad w = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.25)$$

Дальнейший анализ требует отдельного рассмотрения случаев кратных и не кратных корней возникающего характеристического уравнения. В настоящей работе (в силу ограниченности объема

статьи) мы исследуем лишь случай некрратных корней, а асимптотика кратных СЗ при $k \rightarrow 0$ может быть предметом отдельной работы.

Решение уравнения (3.24) представим в виде

$$\varphi_0(w) = A \cos(\lambda w) + B \sin(\lambda w); \quad (3.26)$$

тогда для λ получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - (R\chi_0 - \text{Pr} \text{Bu} \pi^2) \lambda^2 - R\chi_0 \text{Bu} \pi^2 = 0. \quad (3.27)$$

Некратные корни λ_1^2 и λ_2^2 ($\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$) этого уравнения возникают при условии неравенства нулю его дискриминанта, т.е.

$$(R\chi_0 - \text{Pr} \text{Bu} \pi^2)^2 + 4R\chi_0 \text{Bu} \pi^2 \neq 0; \quad (3.28)$$

в дальнейшем рассмотрении ограничимся этим условием.

Решение уравнения (3.27) запишем относительно величин $q_1 = \lambda_1^2$ и $q_2 = \lambda_2^2$:

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} \left(R\chi_0 - \text{Pr} \text{Bu} \pi^2 \pm \sqrt{(R\chi_0 - \text{Pr} \text{Bu} \pi^2)^2 + 4R\chi_0 \text{Bu} \pi^2} \right). \quad (3.29)$$

Далее рассмотрим случаи четного и нечетного решения $\varphi_0(w)$.

3.2.1. Решения вида $\cos(\lambda w)$. Представим решение $\varphi_0(w)$ уравнения (3.24) в виде

$$\varphi_0(w) = A_1 \cos(\sqrt{q_1} w) + A_2 \cos(\sqrt{q_2} w) \quad (3.30)$$

и отметим, что аналогичная задача для четных СФ возникала в случае асимптотического анализа при $k \rightarrow 0$ для неограниченно растущих СЗ в задаче I для течений типа Пуазейля (см. [4]).

Подстановка (3.30) в краевые условия (3.25) приводит к системе относительно A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 \sqrt{q_1} (q_1 - R\chi_0) \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2} + A_2 \sqrt{q_2} (q_2 - R\chi_0) \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} &= 0, \\ A_1 q_1 \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2} + A_2 q_2 \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Разрешимость системы (3.31) приводит к равенству нулю ее детерминанта, т.е. к уравнению

$$\sqrt{q_2} (q_1 - R\chi_0) \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2} \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_1} (q_2 - R\chi_0) \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2}, \quad (3.32)$$

где q_1 и q_2 определены в (3.29). Решая (3.32) численно и проверяя условие некрратности корней (3.28), получаем счетное множество искомым коэффициентов χ_0 в представлении (3.23).

В частных случаях уравнение (3.32) имеет явные решения. Например, при $\text{Pr} = 1$ из формулы (3.29) находим

$$q_1 = R\chi_0, \quad q_2 = -\text{Bu} \pi^2 \quad (3.33)$$

и, следуя [4], получаем для χ_0 уравнение $\cos \frac{\sqrt{R\chi_0}}{2} = 0$. Множество его решений $\chi_{0,m}$ имеет вид

$$\chi_{0,m} = \frac{\pi^2}{R} (1 + 2m)^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Таким образом, в задаче I для решений вида (3.30) возникает счетное множество СЗ, неограниченно растущих при $k \rightarrow 0$; при $\text{Pr} = 1$ первые члены их асимптотики имеют вид

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} (1 + 2m)^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Далее будет показано, что член $O(1)$ в этой формуле имеет порядок $O(k)$, $k \rightarrow 0$.

3.2.2. Решения вида $\sin(\lambda w)$. Представим решение $\varphi_0(w)$ уравнения (3.24) в виде

$$\varphi_0(w) = B_1 \sin(\sqrt{q_1} w) + B_2 \sin(\sqrt{q_2} w) \quad (3.36)$$

и отметим, что аналогичная задача для нечетных СФ возникала в случае асимптотического анализа при $k \rightarrow 0$ для неограниченно растущих СЗ в задаче I для течений типа Пуазейля (см. [4]).

Подстановка (3.36) в краевые условия (3.25) приводит к системе относительно B_1 и B_2 :

$$\begin{aligned} B_1 \sqrt{q_1} (q_1 - R\chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2} + B_2 \sqrt{q_2} (q_2 - R\chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} &= 0, \\ B_1 q_1 \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2} + B_2 q_2 \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Разрешимость системы (3.37) дает условие равенства нулю ее детерминанта,

$$\sqrt{q_2} (q_1 - R\chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2} \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_1} (q_2 - R\chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2}, \quad (3.38)$$

где q_1 и q_2 определены в (3.29). Решая (3.38) численно и проверяя условие некрайности корней (3.28), получаем счетное множество искомым коэффициентов χ_0 в представлении (3.23).

В частных случаях уравнение (3.38) имеет явные решения. Например, при $\text{Pr} = 1$, аналогично п. 3.2.1, для χ_0 получаем уравнение $\sin \frac{\sqrt{R\chi_0}}{2} = 0$. Множество его решений $\chi_{0,m}$ имеет вид

$$\chi_{0,m} = \frac{\pi^2}{R} (2m)^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

Таким образом, в задаче I для решений вида (3.36) возникает счетное множество СЗ, неограниченно растущих при $k \rightarrow 0$; при $\text{Pr} = 1$ первые члены их асимптотики имеют вид

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} (2m)^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

Далее будет показано, что член $O(1)$ в этой формуле имеет порядок $O(k)$, $k \rightarrow 0$.

Объединяя вместе результаты (3.35) и (3.40), получаем, что в задаче I при $\text{Pr} = 1$ первые члены асимптотики множества неограниченно растущих СЗ имеют вид

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} m^2 + \frac{1}{2} + O(k), \quad m = 1, 2, \dots, \quad k \rightarrow 0. \quad (3.41)$$

3.3. Коэффициент χ_1 в представлении (3.23)

Для нахождения константы χ_1 в разложении (3.23) запишем уравнение для функции $\varphi_1(w)$ в представлении (3.1)

$$\varphi_1''''(w) + (R\chi_0 - \text{Pr} \text{Vu} \pi^2) \varphi_1''(w) - R\chi_0 \text{Vu} \pi^2 \varphi_1(z) = R(iw - \chi_1)(\varphi_0''(w) - \text{Vu} \pi^2 \varphi_0(w)) \quad (3.42)$$

со следующими краевыми условиями для задачи I:

$$\varphi_1'''(w) + R\chi_0 \varphi_1'(w) = R[iw - \chi_1] \varphi_0'(w) - i \varphi_0(w), \quad \varphi_1''(w) = 0, \quad w = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.43)$$

Теперь учтем, что функции $\varphi_0(z)$ имеют вид (3.30) либо (3.36), т.е. являются четными или нечетными.

3.3.1. Пусть сначала $\varphi_0(w)$ будет четной, т.е. $\varphi_0(w)$ вида (3.30). Правая часть уравнения (3.42) есть сумма нечетной

$$f_{od}(w) = Riw(\varphi_0''(w) - \text{Vu} \pi^2 \varphi_0(w))$$

и четной

$$f_{ev}(w) = -R\chi_1(\varphi_0''(w) - \text{Vu} \pi^2 \varphi_0(w))$$

функций.

Решение $\varphi_1(w)$ однородного уравнения (3.42) представляем в виде суммы четной функции вида (3.30) с неизвестными коэффициентами \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 и нечетной функции вида (3.36) с неизвестными коэффициентами \tilde{B}_1, \tilde{B}_2 .

Частное решение неоднородного уравнения (3.42) представляем теперь как сумму нечетной $g_{od}(w)$ и четной $g_{ev}(w)$ функций в виде

$$\begin{aligned} g_{od}(w) &= w[D_1 \cos(\sqrt{q_1}w) + D_2 \cos(\sqrt{q_2}w)] + w^2[E_1 \sin(\sqrt{q_1}w) + E_2 \sin(\sqrt{q_2}w)], \\ g_{ev}(w) &= R\chi_1 w[G_1 \sin(\sqrt{q_1}w) + G_2 \sin(\sqrt{q_2}w)], \end{aligned} \quad (3.44)$$

где величины q_1, q_2 определены в (3.29), а константы $D_1, D_2, E_1, E_2, G_1, G_2$ выражаются явно через коэффициенты A_1 и A_2 в представлении (3.30) для $\varphi_0(z)$.

Таким образом, для искомого решения $\varphi_1(w)$ мы имеем в качестве неизвестных 5 коэффициентов: $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2$ в представлении общего решения $\varphi_1(w)$ однородного уравнения (3.42) и χ_1 в формуле (3.44). Четыре краевых условия (3.43) приводят к равенствам $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 0$ и к соотношению

$$\chi_1 = 0, \quad (3.45)$$

что обеспечивает нечетность правой части уравнения (3.42) и четность правой части краевых условий (3.43). Коэффициенты \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 при этом связаны линейным образом, а решение $\varphi_1(w)$ является нечетной функцией.

3.3.2. Пусть теперь $\varphi_0(w)$ будет нечетной, т.е. $\varphi_0(z)$ вида (3.36). Правая часть уравнения (3.42) есть сумма четной

$$f_{ev}(w) = Ri w(\varphi_0''(w) - \text{Ву} \pi^2 \varphi_0(w))$$

и нечетной

$$f_{od}(w) = -R\chi_1(\varphi_0''(w) - \text{Ву} \pi^2 \varphi_0(w))$$

функций.

Решение однородного уравнения (3.42) опять представляем как сумму четной и нечетной функций вида (3.30), (3.36) с неизвестными коэффициентами $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2$.

Частное решение неоднородного уравнения (3.42) представляем теперь как сумму четной $g_{ev}(w)$ и четной $g_{od}(w)$ функций в виде

$$\begin{aligned} g_{ev}(w) &= w[D_1 \sin(\sqrt{q_1}w) + D_2 \sin(\sqrt{q_2}w)] + w^2[E_1 \cos(\sqrt{q_1}w) + E_2 \cos(\sqrt{q_2}w)], \\ g_{od}(w) &= R\chi_1 w[G_1 \cos(\sqrt{q_1}w) + G_2 \cos(\sqrt{q_2}w)], \end{aligned}$$

где константы $D_1, D_2, E_1, E_2, G_1, G_2$ выражаются явно через коэффициенты B_1 и B_2 в представлении (3.36) для $\varphi_0(z)$.

Для искоемых коэффициентов $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2$ и χ_1 краевые условия (3.43) приводят к равенствам $\tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 = 0$, к линейной связи коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 и к прежнему соотношению (3.45); решение $\varphi_1(w)$ является при этом четной функцией.

Приведем качественные соображения о выводе равенства (3.45). Из рассмотрения краевой задачи (3.42), (3.43) для функции $\varphi_1(w)$, симметрии краевых условий $\varphi_1''\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi_1''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ относительно точки $w = 0$ и четности или нечетности входящей функции $\varphi_0(w)$ следует следующее. Если функция $\varphi_0(w)$ четная, то чтобы уравнение (3.42) и первые два краевых условия (3.43) обладали аналогичной симметрией, необходимо выполнение $\chi_1 = 0$, и тогда функция $\varphi_1(w)$ будет нечетной. Если же $\varphi_0(w)$ нечетная, то опять симметрия уравнения (3.42) и всех краевых условий требуют равенства $\chi_1 = 0$ и четности $\varphi_1(w)$.

Теперь, учитывая представления (3.23), (3.20) и полученное равенство (3.45), окончательно запишем разложение для неограниченно растущих СЗ c_m задачи I:

$$c_m = -i \frac{\chi_{0,m}}{k} + \frac{1}{2} + O(k), \quad k \rightarrow 0, \quad (3.46)$$

где константы $\chi_{0,m}$ в случаях 3.2.1 и 3.2.2 вычисляются из уравнений (3.32) и (3.29) либо (3.38) и (3.29).

В частном случае $\text{Pr} = 1$ разложение (3.46) принимает вид (3.41).

4. АСИМПТОТИКА СФ И СЗ ЗАДАЧИ II ПРИ $k \rightarrow 0$

4.1. Ограниченные СЗ

Асимптотический анализ задачи II при $k \rightarrow 0$, т.е. задачи (0.2), (0.3), (0.5), показывает, что конечных СЗ в этом случае не существует, поэтому далее будем рассматривать случай неограниченно растущих СЗ.

4.2. Неограниченные СЗ

Представим асимптотическое разложение при $k \rightarrow 0$ для СФ и СЗ задачи (0.2), (0.3), (0.5) в виде (3.22), (3.23), где аргумент w и спектральный параметр \tilde{C} связаны с z и СЗ c соотношениями (3.20). Это приводит, как и в п. 3.2, к цепочке краевых задач для функций $\varphi_m(w)$ и искомым констант χ_m . Первая из них, для $\varphi_0(w)$ и χ_0 , определяется уравнением (3.24) и краевыми условиями

$$\varphi_0'''(w) = -R\chi_0\varphi_0'(w), \quad \varphi_0(w) = 0, \quad w = \frac{1}{2}. \quad (4.1)$$

Представляя решение $\varphi_0(w)$ в виде (3.26), для λ опять получаем характеристическое уравнение (3.27). Ограничиваясь случаем некрратных корней, находим их в виде (3.29), где $q_{1,2} = \lambda_{1,2}^2$.

Уравнение (3.24) и краевые условия (4.1), как и в п. 3.2, обладают симметрией относительно точки $w = 0$, что позволяет искать решение $\varphi_0(w)$ в виде $\cos(\sqrt{q}w)$ либо $\sin(\sqrt{q}w)$.

4.2.1. Решения вида $\cos()$. Аналогично случаю задачи I, представим решение $\varphi_0(w)$ в виде (3.30) и для искомым констант A_1 и A_2 получим систему

$$\begin{aligned} A_1\sqrt{q_1}(q_1 - R\chi_0)\sin\frac{\sqrt{q_1}}{2} + A_2\sqrt{q_2}(q_2 - R\chi_0)\sin\frac{\sqrt{q_2}}{2} &= 0, \\ A_1\cos\frac{\sqrt{q_1}}{2} + A_2\cos\frac{\sqrt{q_2}}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Разрешимость системы (4.2) дает условие равенства нулю ее детерминанта,

$$\sqrt{q_1}(q_1 - R\chi_0)\sin\frac{\sqrt{q_1}}{2}\cos\frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_2}(q_2 - R\chi_0)\sin\frac{\sqrt{q_2}}{2}\cos\frac{\sqrt{q_1}}{2}, \quad (4.3)$$

где q_1 и q_2 определены в (3.29). Решая (4.3) численно и проверяя условие некрратности корней (3.28), получаем счетное множество искомым коэффициентов χ_0 в представлении (3.23) задачи II.

В частных случаях уравнение (4.3) имеет явные решения. Например, при $\text{Pr} = 1$ находим (3.33) и для χ_0 получаем, как и в задаче I, уравнение $\cos\frac{\sqrt{R\chi_0}}{2} = 0$. Его решения даны в (3.34) и тогда множество СЗ задачи II в этом случае имеет асимптотику, главный член которой совпадает с разложением (3.35) для СЗ задачи I.

4.2.2. Решения вида $\sin()$. Аналогично случаю задачи I, представим решение $\varphi_0(w)$ в виде (3.36) и для искомым констант B_1 и B_2 получим систему

$$\begin{aligned} B_1 \sqrt{q_1}(q_1 - R\chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2} + B_2 \sqrt{q_2}(q_2 - R\chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} &= 0, \\ B_1 \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2} + B_2 \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Разрешимость системы (4.4) приводит к равенству

$$\sqrt{q_1}(q_1 - R\chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2} \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_2}(q_2 - R\chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2}, \quad (4.5)$$

где q_1 и q_2 определены в (3.29). Решая (4.5) численно и проверяя условие не кратности корней (3.28), получаем счетное множество искомым коэффициентов χ_0 в представлении (3.23) задачи II.

В частном случае $\text{Pr} = 1$ уравнение (4.5) имеет, как и в задаче I, явное решение (3.39). Тогда множество СЗ задачи II в этом случае имеет асимптотику, главный член которой совпадает с разложением (3.40) для СЗ задачи I.

4.3. Коэффициент χ_1 в представлении (3.23)

Получение значения χ_1 в этой задаче II аналогично случаю 3.3. и приводит к прежнему уравнению (3.42) для $\varphi_1(w)$ и краевым условиям вида

$$\varphi_1'''(w) + R\chi_0 \varphi_1'(w) = R[(iw - \chi_1)\varphi_0'(w) - i\varphi_0(w)], \quad \varphi_1(w) = 0, \quad w = \pm \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны пп. 3.3.1 и 3.3.2 и приводят также к равенству (3.45). Качественные рассуждения о справедливости (3.45) здесь также опираются на симметричность краевых условий (4.6) и уравнения (3.42) относительно точки $w = 0$. Таким образом, асимптотика СЗ этой задачи описывается равенством (3.46), где константы $\chi_{0,m}$ в случаях 4.2.1 и 4.2.2 вычисляются из уравнений (4.3) и (3.29) либо (4.5) и (3.29). В частном случае $\text{Pr} = 1$ асимптотика СЗ этой задачи имеет вид (3.41).

5. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Для проверки метода вычисления СЗ и СФ задач I и II были проведены многочисленные расчеты в широком диапазоне физических параметров Pr , Vi , R и волновых чисел k . При этом варьировалась длина обрываемых разложений (2.1) и (2.2) и их производных по z и по c , значительно увеличивалась мантисса `Digits` в используемой арифметике, изменялась точка сшивки $z_* \in (0, 1)$ разложений в системе (2.10). Итерационный метод Ньютона (2.12) строился так, что начальное приближение $c^{(0)}$ при малых k бралось из асимптотических разложений, построенных в пп. 3 и 4, а при увеличении k использовался метод продолжения по параметру. Дополнительным инструментом проверки наличия СЗ в некоторой области D на комплексной плоскости “ c ” служил обобщенный принцип аргумента (см. [15])

$$K = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{W'(\dots; c; z_*)}{W(\dots; c; z_*)} dc, \quad \sum_{p=1}^K c_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} c \frac{W'(\dots; c; z_*)}{W(\dots; c; z_*)} dc, \quad (5.1)$$

где $W(\dots; c; z_*)$ – вронкиан (2.11) четырех независимых решений, вычисляемых в точке сшивки z_* , K – число комплексных нулей функции $W(\dots; c; z_*)$ внутри области \mathcal{D} , $\sum_{p=1}^K c_p$ – сумма координат этих нулей. Формула (5.1) справедлива, поскольку из структуры определителя Вронского $W(\dots; c; z_*)$ следует, что единственная особая точка функции $W(\dots; c; z_*)$ в плоскости “ c ” находится на бесконечности, $c = \infty$. В качестве области \mathcal{D} в формуле (5.1) выбирался круг в комплексной плоскости спектрального параметра “ c ”, а интегрирование по контуру $\partial \mathcal{D}$ проводилось с помощью квадратур Гаусса.

Помимо этого, как будет показано ниже, среди множества СЗ c_m , рассматриваемых как функции волнового числа k , возможно образование двойных СЗ при $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$. Это означает, что есть два соседних СЗ $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$, совпадающих при некоторых величинах k_* , а функции $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$ в точке k_* имеют ветвление второго порядка (2-листное ветвление). Рассматривая функции $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$ как функции комплексного числа k , получаем, что при обходе в плоскости k вокруг точки k_* по кругу малого радиуса функция $c_m(k)$ при аналитическом продолжении переходит в $c_{m+1}(k)$, а функция $c_{m+1}(k)$ переходит в $c_m(k)$. Аналогичное поведение СЗ в задаче Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта описано в [11], [12].

В окрестности этих значений k_* метод Ньютона (2.12) начинает сходиться очень медленно, что связано с тем, что и вронсиан $W(c)$ (см. (2.11)), и его производная $W'(c)$ в точке ветвления $c_m(k_*)$ обращаются в ноль. Исключение этой неопределенности типа $0/0$ приводит к необходимости использования модификации метода Ньютона со второй производной:

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - T \pm \sqrt{T^2 - \frac{2W(c^{(q)})}{W''(c^{(q)})}}, \quad T = \frac{W'(c^{(q)})}{W''(c^{(q)})}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

причем знаки \pm выбираются так, чтобы обеспечить непрерывность обеих ветвей двух функций $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$.

Учитывая второй порядок ветвления функций $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$ в окрестности точки k_* , их можно представить в виде

$$c_m(k) = \sqrt{k - k_*} \Psi(k) + \Phi(k), \quad c_{m+1}(k) = -\sqrt{k - k_*} \Psi(k) + \Phi(k), \quad (5.2)$$

где $\Psi(k)$ и $\Phi(k)$ – регулярные в некоторой окрестности точки k_* функции, причем $\Psi(k_*) \neq 0$.

Использование (5.2) позволяет сделать вывод, что квадрат разности функций $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$ в окрестности точки k_* является регулярной функцией $S(k)$, имеющей в k_* ноль первого порядка:

$$S(k) = [c_m(k) - c_{m+1}(k)]^2 = (k - k_*)4\Psi^2(k).$$

Поэтому, используя для нахождения нулей функции $S(k)$ в окрестности точки k_* классический метод Ньютона, находим значение k_* и двойное СЗ $c_m(k_*) = c_{m+1}(k_*)$ с высокой точностью.

Совокупность описанных методов позволила гарантированно вычислять СЗ и СФ, а также двойные СЗ $c_m(k_*)$ с относительной точностью не менее 20–40 верных дес. знач. цифр.

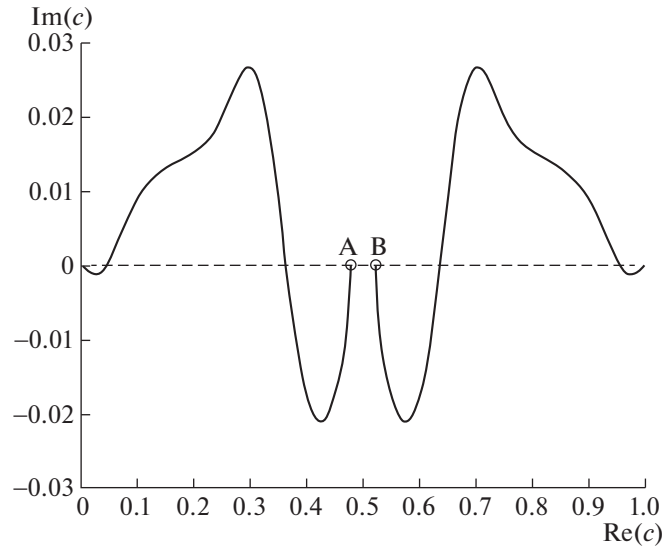
6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем результаты расчетов спектра задач I и II для различных физических параметров Pr , Nu , R и волновых чисел k . Картина траекторий СЗ $c_m(k)$ при изменении k будет иметь много общего с траекториями СЗ задачи Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта (см. [11], [12]).

6.1. Траектории СЗ задачи I

Как было показано в п. 3.2.1, в задаче I при $k \rightarrow 0$ существуют два конечных СЗ, описываемых асимптотикой (3.2), и счетное множество неограниченно растущих СЗ, описываемых разложением (3.46).

В зависимости от параметров Pr и Nu эти два конечных СЗ лежат в комплексной плоскости “ c ” симметрично относительно точки $c = \frac{1}{2}$, причем либо на вещественной оси $\operatorname{Im}(c) = 0$ (см. (3.14)), либо на прямой $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$ (см. (3.15)). Первый из этих вариантов соответствует, как было отмечено в п. 3.1., устойчивым возмущениям при $k \rightarrow 0$; второй же вариант включает первое СЗ c_1 со значением $\operatorname{Im}(c_1) > 0$, что описывает неустойчивое по времени течение.



Фиг. 2. Траектории $c_1(k)$ и $c_2(k)$ для $Bu = 1.5$, $Pr = 1$, $R = 1000$ при увеличении $k \in (0, 2500]$.

Рассмотрим траектории первых двух СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ задачи I для $Bu = 1.5$, $Pr = 1$, $R = 1000$ и при увеличении $k \in (0, 2500]$. Как следует из фиг. 1, выбранным величинам Bu и Pr соответствует устойчивый характер течения при малых k .

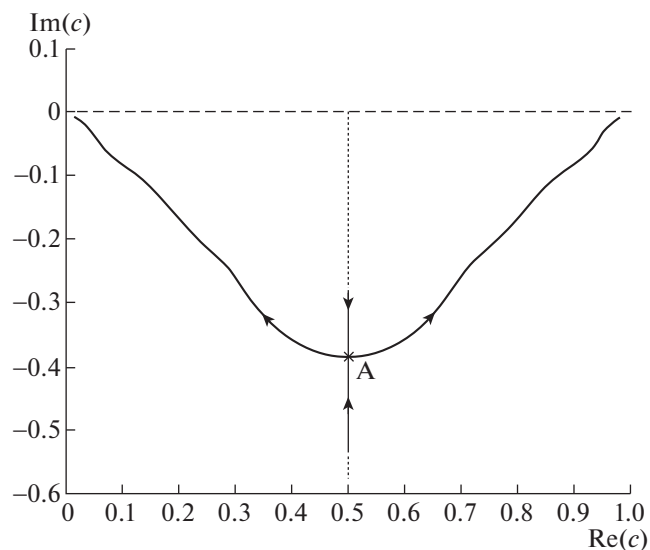
На фиг. 2 в плоскости “ c ” приведены эти симметричные траектории $c_1(k)$ и $c_2(k)$, начинающиеся в точках $A = c_1(0) = 0.479\dots$ и $B = c_2(0) = 0.520\dots$ (отмечены кружочками), если формально положить $k = 0$ при реализации алгоритма.

При $k \in (0, 0.074)$ эти СЗ движутся в нижней полуплоскости, при $k \in (0.074, 25.41)$ они переходят в верхнюю полуплоскость, а при $k \in (25.41, 2500]$ эти СЗ опять движутся в нижней полуплоскости. Такое поведение СЗ показывает сложный характер устойчивых и неустойчивых возмущений для разных волновых чисел k , т.е. устойчивость возмущений для 1-го и 3-го интервалов изменения k и неустойчивость возмущений для 2-го интервала.

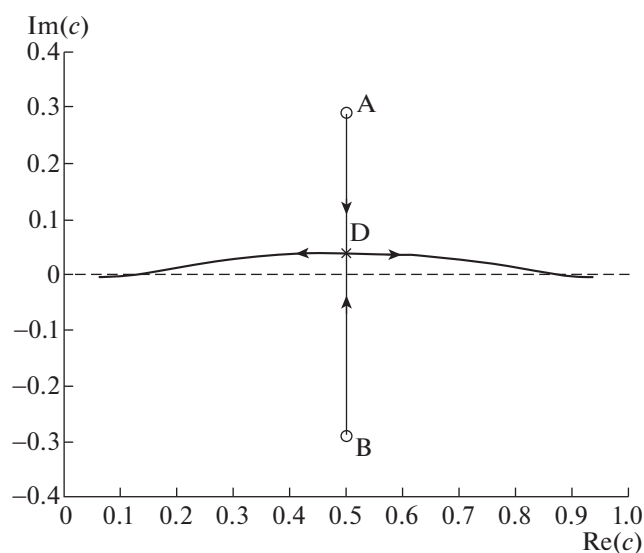
Все остальные СЗ для выбранных параметров $Bu = 1.5$, $Pr = 1$ и $R = 1000$ при всех расчетных числах $k \in (0, 2500]$ движутся в нижней полуплоскости. При малых k их поведение описывается асимптотикой (3.15), а при увеличении k эти СЗ поднимаются снизу по прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$, причем немонотонно.

Рассмотрим поведение пары СЗ $c_3(k)$ и $c_4(k)$ на фиг. 3. При увеличении $k \in (0, 0.0487]$ значение $c_3(k)$ поднимается до точки $c_3 = \frac{1}{2} - 0.28103i$, а при дальнейшем увеличении $k \in (0.0487, k_*)]$, где $k_* = 0.069386$, это СЗ $c_3(k)$ опускается до точки $A = \frac{1}{2} - 0.38552i$, в которой оно “сталкивается” с $c_4(k)$ и образует первое двойное СЗ. На фиг. 3 точка A показана крестиком, прямая $Re(c) = \frac{1}{2}$ отмечена пунктиром, а направление движения $c_3(k)$ и $c_4(k)$ по этой прямой при увеличении числа k показано стрелками.

При дальнейшем росте $k \in (k_*, 2500]$ это двойное СЗ “распадается” на два простых СЗ, движущихся вправо и влево вдоль симметричных траекторий на фиг. 3 в направлении стрелок. Поскольку в окрестности точки k_* функции $c_3(k)$ и $c_4(k)$ описываются соотношением (5.2), то отсюда следует, что при переходе k через точку $k = k_*$ траектории $c_3(k)$ и $c_4(k)$ поворачиваются на угол $\frac{\pi}{2}$.



Фиг. 3. Траектории $c_3(k)$ и $c_4(k)$ для $Bu = 1.5$, $Pr = 1$, $R = 1000$ при увеличении k .



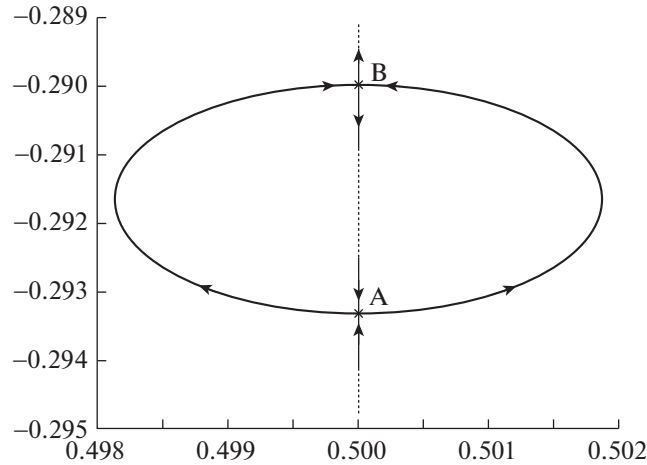
Фиг. 4. Траектории $c_1(k)$ и $c_2(k)$ для $Bu = 10^{-4}$, $Pr = 1$, $R = 1$ при увеличении $k \in (0, 2500)$.

Глаголы “сталкивается” и “распадается” здесь использованы, чтобы указать, что скорости $c_3'(k)$ и $c_4'(k)$ движения СЗ $c_3(k)$ и $c_4(k)$ в точке $k = k_*$ обращаются в бесконечность. Это следует из представления (5.2) при его дифференцировании по k . Нумерацию этих СЗ при $k > k_*$ уже нельзя указать, если не принять дополнительных соглашений.

При стремлении $k \rightarrow +\infty$ эта пара СЗ $c_3(k)$ и $c_4(k)$ приближается к точкам $c = 0$ и $c = 1$, как показано на фиг. 3.

Все последующие пары СЗ $c_{2m+1}(k)$ и $c_{2m+2}(k)$, $m = 2, 3, \dots$, при выбранных параметрах $Bu = 1.5$, $Pr = 1$ и $R = 1000$ ведут себя аналогично рассмотренной паре $c_3(k)$ и $c_4(k)$.

Однако при других параметрах Bu , Pr и R траектории $c_m(k)$ ведут себя иначе. На фиг. 4 показаны траектории первых двух СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ для значений $Bu = 10^{-4}$, $Pr = 1$, $R = 1$ при изменении волнового числа k . Если $k \rightarrow 0$, то эти два СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ являются парой сопряженных чисел



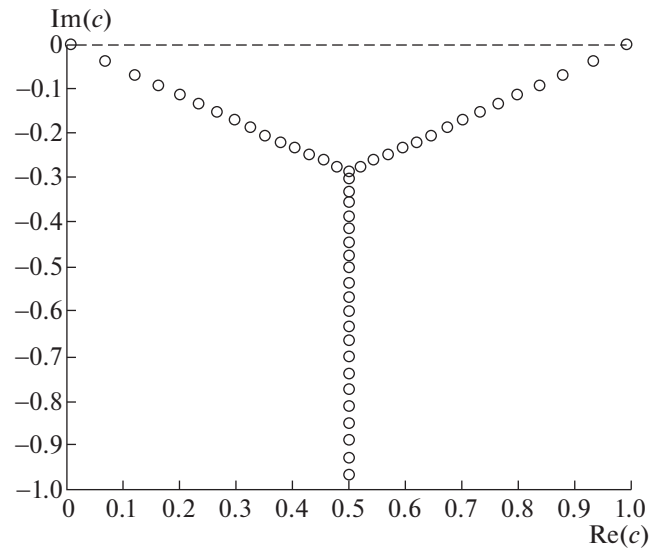
Фиг. 5. Траектории $c_2(k)$ и $c_3(k)$ для $Vu = 10^{-4}$, $P\gamma = 4$, $R = 1$ при увеличении $k \in [39.2174, 40.572]$.

$\frac{1}{2} \pm 0.288656i$, отмеченных на фиг. 4 точками A и B . При увеличении $k > 0$ эти СЗ движутся навстречу друг другу по вертикальной прямой $\text{Re}(c) = \frac{1}{2}$, при $k = k_{*,2} = 244.9281$ они “сталкиваются” в точке $D = \frac{1}{2} + 0.0378i$ и образуют двойное СЗ, отмеченное на фиг. 4 крестиком. При последующем росте $k \in [244.9281, 2500]$ это СЗ распадается на два простых СЗ, движущихся симметрично относительно прямой $\text{Re}(c) = \frac{1}{2}$ и стремящихся к точкам $c = 0$ и $c = 1$.

Последующие СЗ $c_m(k)$, $m = 3, 4, \dots$, при увеличении k движутся по траекториям, аналогичным указанным на фиг. 3. Так, СЗ $c_3(k)$ и $c_4(k)$ сначала движутся по прямой $\text{Re}(c) = \frac{1}{2}$ в соответствии с асимптотикой (3.46). При $k_{*,1} = 82.089$ они “сталкиваются” в точке $c = \frac{1}{2} - 0.36737i$ и образуют двойное СЗ. При последующем росте $k > k_{*,1}$ это СЗ “распадается” на два симметричных СЗ, а линии их движения подобны траекториям на фиг. 3. Все последующие пары СЗ $c_{2m+1}(k)$ и $c_{2m+2}(k)$, $m = 2, 3, \dots$, ведут себя аналогично СЗ $c_3(k)$ и $c_4(k)$.

Возможна также еще более сложная картина поведения траекторий $c_m(k)$. Пусть $Vu = 10^{-4}$, $P\gamma = 4$ и $R = 1$. При $k \rightarrow 0$ имеем $c_1(k) \rightarrow \frac{1}{2} + 0.28867i$ и $c_2(k) \rightarrow \frac{1}{2} - 0.28867i$, а также множество $c_m(k)$, $m = 3, 4, \dots$, описываемых асимптотикой (3.46). При увеличении k СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ сначала движутся вниз по прямой $\text{Re}(c) = \frac{1}{2}$, а все остальные СЗ движутся вверх.

На фиг. 5 приведен фрагмент траекторий $c_2(k)$ и $c_3(k)$ при $k \in [39.2174, 40.572]$ между двумя двойными СЗ; прямая $\text{Re}(c) = \frac{1}{2}$ отмечена пунктиром. При $k = k_{*,1} = 39.2174$ СЗ $c_2(k)$ и $c_3(k)$ “сталкиваются” в точке $A = \frac{1}{2} - 0.2933i$ (она отмечена крестиком) и образуют первое двойное СЗ. При увеличении $k > k_{*,1}$ это СЗ “распадается” на пару простых СЗ, движущихся симметрично относительно прямой $\text{Re}(c) = \frac{1}{2}$, но уже не по траекториям, подобным указанным на фиг. 3 или фиг. 4, а по некоторому малому овалу с поперечником $d \approx 0.0036$. При $k = k_{*,2} = 40.572$ эта пара СЗ опять “сталкивается” в точке $B = \frac{1}{2} - 0.2899i$ (она также отмечена крестиком на фиг. 5) и образует второе двойное СЗ.



Фиг. 6. Первые СЗ c_n , $n = 1, 2, \dots, 52$, для $Vu = 10^{-2}$, $Pr = 1$, $R = 10$, $k = 2500$.

При дальнейшем росте $k > k_{*,2}$ это СЗ “распадется” на два простых СЗ, идущих вверх и вниз по прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$. Идущее вниз СЗ при $k = k_{*,3} = 80.7106$ затем “столкнется” с $c_4(k)$ в точке $c = \frac{1}{2} - 0.3901i$ и образует третье двойное СЗ, которое при росте $k > k_{*,3}$ “распадется” на два простых СЗ, идущих по траекториям, аналогичным указанным на фиг. 3.

Идущее же вверх СЗ при $k > k_{*,2}$ затем “столкнется” при $k = k_{*,4} = 271.725$ с СЗ $c_1(k)$ в точке $c = \frac{1}{2} + 0.0458i$ и образует четвертое двойное СЗ. Его дальнейший “распад” и траектории двух симметричных СЗ аналогичны указанным на фиг. 4.

Следующее двойное СЗ образуется из пары $c_5(k)$ и $c_6(k)$ при $k = k_{*,5} = 562.786$ в точке $c = \frac{1}{2} - 0.34136i$, а их траектории аналогичны указанным на фиг. 3. Все последующие пары СЗ $c_{2m+1}(k)$ и $c_{2m+2}(k)$, $m = 3, 4, \dots$, ведут себя аналогично этой паре СЗ.

Таким образом, при возрастании k на прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$ образуется и распадается конечное число двойных СЗ так, что для каждого k конечное число СЗ будет лежать на плоскости “ c ” симметрично относительно прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$, а счетное множество остальных СЗ будет лежать на этой прямой с точкой сгущения $c = \frac{1}{2} - i\infty$.

На фиг. 6 кружочками показаны СЗ c_m для следующих величин параметров: $R = 10$, $Pr = 1$, $Vu = 10^{-2}$ при волновом числе $k = 2500$. Приведены первые 52 СЗ, для которых $Im(c) > -1$; 15 пар из них симметричны относительно прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$, а остальные 22 СЗ лежат на прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$. Такая картина расположения СЗ аналогична распределению СЗ задачи Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта (см. [11], [12]) и называется “спектральный галстук”.

6.2. Траектории СЗ задачи II

Для задачи II траектории СЗ $c_m(k)$ имеют характер, аналогичный случаю задачи I, но с тем отличием, что при $k \rightarrow 0$ не существует конечных СЗ, а асимптотика всех $c_m(k)$ описывается соот-

ношением (3.46). При увеличении $k > 0$, в зависимости от параметров R , Pr и Bu , траектории $c_m(k)$ могут иметь такой же сложный характер, как и в задаче I.

Например, для значений $R = 10$, $Pr = 1$ и $Bu = 10^{-3}$ при росте $k > 0$ все СЗ сначала поднимаются по прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$ в соответствии с асимптотикой (3.46). При $k = 5.85$ первое СЗ $c_1(k)$ переходит в верхнюю полуплоскость $Im(c) > 0$, что обеспечивает неустойчивость течения. При $k = 32.01$ это СЗ достигает значения $c_1(k) = \frac{1}{2} + 0.2292i$ и затем опускается. При $k = k_{*,1} = 80.738$ пара СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ “сталкивается” в точке $c = \frac{1}{2} + 0.0597i$ и образует двойное СЗ. Дальнейший “распад” и симметричное движение этой пары СЗ аналогично случаю, показанному на фиг. 4.

Все последующие СЗ $c_m(k)$, $m = 3, 4, \dots$, уже находятся в полуплоскости $Im(c) < 0$ и при росте k образуют двойные СЗ из пар $c_{2n+1}(k)$ и $c_{2n+2}(k)$, $n = 1, 2, \dots$. Траектории их движения аналогичны указанным на фиг. 3.

Для других значений $R = 10$, $Pr = 10$ и $Bu = 10^{-3}$ при росте $k > 0$ все СЗ опять сначала поднимаются по прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$ в соответствии с асимптотикой (3.46), затем $c_2(k)$ опускается и при $k_{*,1} = 13.598$ “сталкивается” с $c_3(k)$, образуя первое двойное СЗ. Затем это СЗ “распадается” на пару простых СЗ, движущихся симметрично в плоскости “ c ” по некоторому овалу, аналогично показанному на фиг. 5. При $k_{*,2} = 21.135$ эта пара СЗ опять “сталкивается” и образует второе двойное СЗ. При дальнейшем росте k это СЗ “распадается” на два простых СЗ, идущих вверх и вниз по прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$. Идущее вниз СЗ “сталкивается” с $c_4(k)$ при $k_{*,3} = 27.928$ и образует третье двойное СЗ. А идущее вверх СЗ “сталкивается” с $c_1(k)$ при $k_{*,4} = 64.824$ и образует четвертое двойное СЗ.

Все последующие СЗ $c_m(k)$, $m = 5, 6, \dots$, при росте k образуют двойные СЗ из пар соседних СЗ $c_{2n+1}(k)$ и $c_{2n+2}(k)$, $n = 2, 3, \dots$, которые также “распадаются” на пары простых СЗ. При этом СЗ попадают в верхнюю полуплоскость $Im(c) > 0$ лишь при $k \in (9.89, 60.67)$, что обеспечивает неустойчивость течения.

При фиксированных параметрах R , Pr , Bu и достаточно большом значении волнового числа k распределение СЗ задачи II будет аналогично распределению СЗ в задаче I – конечное число симметричных СЗ будет располагаться в полуполосах $\left\{c : Im(c) < 0, Re(c) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}$, и $\left\{c : Im(c) < 0, Re(c) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$, а счетное множество СЗ будет лежать на прямой $Re(c) = \frac{1}{2}$, аналогично спектральному портрету на фиг. 6.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проводится анализ устойчивых и неустойчивых возмущений геострофического течения с линейным вертикальным профилем скорости с учетом вертикальной диффузии плавучести и трения. Такой анализ проводится с помощью метода малых возмущений на основе уравнения эволюции потенциального вихря.

Для возникающей спектральной несамосопряженной задачи разработан и реализован эффективный аналитико-численный метод решения для ОДУ 4-го порядка с малым параметром при старшей производной и с вхождением спектрального параметра как в уравнение, так и в краевые условия. В зависимости от двух типов краевых условий рассмотрены две спектральные задачи I и II. Метод их решения основан на использовании степенных разложений для линейно-независимых решений ОДУ, удовлетворяющих части краевых условий, и на построении подходящей комбинации этих решений.

Для анализа зависимости СФ и СЗ этих задач от физических параметров R , Pr , Bu построены асимптотики СФ и СЗ при малых значениях волнового числа k . Показано, что при $k \rightarrow +0$ в задаче I существуют 2 ограниченных СЗ и счетное множество неограниченно растущих СЗ с пре-

дельной точкой $c = \frac{1}{2} - i\infty$. В задаче II при $k \rightarrow 0$ ограниченных СЗ нет, а все неограниченно растущие СЗ имеют главные члены асимптотического разложения, совпадающие со случаем задачи I.

Высокоточный расчет СЗ задач I и II основан на итерационном методе Ньютона с выбором начального значения, исходя из построенных асимптотик и с использованием метода продолжения по параметру k .

Проведенный численный анализ показал, что в обеих спектральных задачах при определенных значениях волнового числа k из пар простых СЗ образуются двойные СЗ, лежащие на прямой $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$. При увеличении числа k эти СЗ распадаются на простые СЗ, лежащие в полосе

$\operatorname{Re}(c) \in (0, 1)$ и симметричные относительно прямой $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$. На самой прямой $\operatorname{Re}(c) = \frac{1}{2}$ при этом находится счетное множество простых СЗ. Такую картину распределения СЗ можно назвать, по аналогии с задачей Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта, “спектральный галстук”, см. [16]–[18], [11].

В окрестности двойных СЗ классический итерационный метод Ньютона теряет свою эффективность, поэтому здесь был использован модифицированный метод Ньютона с учетом второй производной. Это позволило с высокой точностью вычислить большое количество СЗ, двойных СЗ и построить траектории СЗ $c_m(k)$ при увеличении волнового числа k . Участки этих траекторий $c_m(k)$, попадающие в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(c) > 0$, описывают неустойчивые по времени возмущения.

Суммируя сказанное, можно отметить, что диапазон изменения волнового числа k неустойчивых возмущений исследуемого течения весьма сложным образом зависит от значений физических параметров задачи. Полученные результаты представляют интерес для интерпретации данных натурных наблюдений интрузий и вихрей в зонах океанских фронтальных течений, в частности, в зонах течений Арктического бассейна, см. [19], [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмина Н.П. Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // Фундаментальная и прикл. гидрофизика. 2016. Т. 9. № 2. С. 15–26.
2. Kuzmina N.P. Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: An analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // Ocean Science. 2016. V. 12. P. 1269–1277. doi 10.5194/os-12-1269-2016
3. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.
4. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 1022–1039.
5. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Эффективный метод решения модифицированной задачи Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в Арктическом бассейне // Таврический вестник информатики и матем. 2016. № 3 (32). С. 88–97.
6. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. Спектральная задача типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в Арктическом бассейне // Международная научно-техническая конференция “Современные проблемы термогидромеханики океана” (СПТО-2017), 28–30 ноября 2017, М.: ИО РАН, Сб. тезисов. С. 87–90.
7. Demuth M., Hansmann M., Katriel G. Eigenvalues of non-selfadjoint operators: a comparison of two approaches // Operator Theory: Advances and Applications. 2013. V. 232. P. 107–163.
8. Reddy S.C., Schmid P.J., Henningson D.S. Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld operator // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. № 1. P. 15–47.
9. Trefethen L.N. Pseudospectra of linear operators // SIAM Review. 1997. V. 39. № 3. P. 383–406.
10. Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В. Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. М.: Ин-т компьютер. исследований, 2006.
11. Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 10. С. 1672–1691.

12. *Скорыходов С.Л.* Точки ветвления собственных значений оператора Орра–Зоммерфельда // Докл. АН. 2007. Т. 416. № 5. С. 600–605.
13. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Наука, 1976. 474 с.
14. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
15. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
16. *Orszag S.A.* Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. Pr 4. P. 689–703.
17. *Шкаликов А.А.* Линии Стокса и “спектральный галстук” в проблеме Орра–Зоммерфельда // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 4. С. 140.
18. *Шкаликов А.А.* Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 3. С. 89–112.
19. *Kuzmina N., Rudels B., Zhurbas V., Stipa T.* On the structure and dynamical features of intrusive layering in the Eurasian Basin in the Arctic Ocean // J. Geophys. Res. 2011. V. 116. C00D11. doi 10.1029/2010JC006920
20. *Кузьмина Н.П., Скорыходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* О неустойчивости геострофического течения с постоянным вертикальным сдвигом скорости с учетом диффузии массы и импульса // Международный симпозиум “Мезомасштабные и субмезомасштабные процессы в гидросфере и атмосфере” (МСП-2018), 30 октября–2 ноября 2018, М.: ИО РАН, Труды конф. С. 205–208. doi 10.29006/978-5-990149-4-1-2018-57