

УДК 517.958

КЛАСС ЗАДАЧ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ¹⁾

© 2019 г. В. В. Карачик

454080 Челябинск, пр-т Ленина, 76, ЮУ гос. ун-т, Россия

e-mail: karachik@susu.ru

Поступила в редакцию 18.02.2019 г.

Переработанный вариант 18.02.2019 г.

Принята к публикации 18.09.2019 г.

Получен набор необходимых условий разрешимости класса задач типа Неймана $\mathcal{N}_k$ для полигармонического уравнения в единичном шаре при полиномиальной правой части. Эти условия имеют вид ортогональности однородных гармонических полиномов линейным комбинациям граничных функций с коэффициентами из целочисленного треугольника Неймана, возмущенных определенного вида производными от правой части уравнения. Библ. 19.

Ключевые слова: задачи типа Неймана, полигармоническое уравнение, необходимые условия разрешимости.

DOI: 10.31857/S0044466919120123

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из классических уравнений в частных производных эллиптического типа высокого порядка является полигармоническое уравнение, а классическими задачами для этого уравнения являются задачи Дирихле (см., например, [1], [2]) и Неймана (см., например, [3]–[5]). Условия разрешимости этих задач исследованы в классической теории краевых задач для эллиптических уравнений и систем уравнений, удовлетворяющих так называемому условию дополнителности. Установлено, что все задачи данного типа фредгольмовы и поэтому их разрешимость для неоднородных краевых условий гарантируется ортогональностью правых частей всем решениям однородного сопряженного уравнения. В работе [6] была рассмотрена более общая краевая задача для полигармонического уравнения, содержащая многочлены высокого порядка от нормальных производных в граничных условиях. Была доказана теорема о разрешимости этой краевой задачи и представлении ее решения. В работе [7] также были исследованы условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения в шаре с нормальными производными в граничных условиях. Условия разрешимости в указанных выше работах имели вид ортогональности некоторых вектор-функций, зависящих от данных задачи, или равенства рангов специальных матриц высокого порядка. Чтобы установить, при каких граничных условиях конкретная задача такого типа разрешима, необходимо выполнить непростые вычисления.

Рассмотренный в настоящей работе класс задач является естественным обобщением классической постановки задачи Неймана для полигармонического уравнения. Поэтому для таких задач хорошо бы иметь условия разрешимости этих задач в легко проверяемом виде. Нахождению множества необходимых условий разрешимости задач типа Неймана и посвящена данная работа. Приведены иллюстративные примеры.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, а $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. В единичном шаре S рассмотрим следующий класс краевых задач типа Неймана $\mathcal{N}_k$, зависящий от параметра $k \in \mathbb{N}$ для неоднородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = f(x), \quad x \in S; \quad (1.1)$$

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \right|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \left. \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}} \right|_{\partial S} = \varphi_2(s), \dots, \left. \frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial \nu^{k+m-1}} \right|_{\partial S} = \varphi_m(s), \quad s \in \partial S, \quad (1.2)$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — внешняя нормальная производная к единичной сфере, функции $f(x)$ и $\varphi_i(s)$ при $i = 1, \dots, m$ определены на S и ∂S соответственно. Класс задач $\mathcal{N}_k$ является частным случаем краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными высокого порядка в граничных условиях, рассмотренных в [6]. Задача $\mathcal{N}_0$ является задачей Дирихле [8], которая безусловно разрешима, а задача $\mathcal{N}_1$ совпадает с задачей Неймана [4]. Исследования разрешимости различных постановок задач типа Неймана и их обобщений в единичном шаре для бигармонического уравнения (в частности, задачи $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$) и полигармонического уравнения можно найти в работах [7], [9]–[12]. В работе [13] для краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными в граничных условиях получено достаточное условие фредгольмовости этих задач и приведена формула их индекса. В [14] исследовались полиномиальные решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения при полиномиальных данных и приведены формулы, позволяющие легко построить полиномиальное решение задачи.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $P_m(t) = \sum_{i=0}^m p_i t^i$ — некоторый полином степени m с действительными коэффициентами $p_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, m$. Линейное пространство таких полиномов обозначим $\mathcal{P}$. Рассмотрим факториальную степень переменной t порядка i в виде $t^{[i]} = t(t-1)\dots(t-i+1)$, причем $t^{[0]} \equiv 1$. Введем факториальный полином, соответствующий полиному $P_m(t)$, равенством

$$P_{[m]}(t) = \sum_{i=0}^m p_i t^{[i]}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим линейное отображение $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, задаваемое в виде $\Phi[P_m(t)] = P_{[m]}(t)$. В [15, лемма 1] показано, что отображение $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ — изоморфизм.

Пусть $l \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$. Рассмотрим полиномы

$$H_i^{(l)}(t) = (t-l)(t-2-l)\dots(t-2i+2-l)$$

при $i \in \mathbb{N}$. Обозначим их прообразы при изоморфизме Φ как

$$P_k^{(l)}(t) = \Phi^{-1}[H_i^{(l)}(t)], \quad i \in \mathbb{N},$$

и, значит, $H_i^{(l)}(t) = P_{[i]}^{(l)}(t)$. Будем считать, что $P_i^{(0)}(t) \equiv P_i(t)$. Для полиномов $P_i^{(l)}(t)$ верно равенство [15, лемма 7]

$$P_i^{(l)}(t) + 2iP_{i-1}^{(l)}(t) = P_i^{(l-2)}(t), \quad i \geq 2, \quad (2.2)$$

где следует считать, что $P_0^{(l)}(t) = 1$, $P_1^{(l)}(t) = t-l$. Кроме того, полиномы $P_i(t)$ и $P_i^{(l)}(t)$ удовлетворяют рекуррентным равенствам [15, лемма 4 и (36)]

$$P_i(t) + (2i-3)P_{i-1}(t) = t^2 P_{i-2}(t), \quad P_i^{(l)}(t) + (2i-1)P_{i-1}^{(l)}(t) = t^2 P_{i-2}^{(l)}(t), \quad i \geq 2, \quad (2.3)$$

и $P_{i+1}(t) = tP_i^{(1)}(t)$, $i \in \mathbb{N}$.

Линейную оболочку бесконечной системы полиномов $\{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l)}(t), P_{m+2}^{(l)}(t), \dots\}$, начинающейся с полинома $P_m^{(l)}(t)$ при $m \in \mathbb{N}$, обозначим через $\mathcal{L}_m^{(l)}$, т.е.

$$\mathcal{L}_m^{(l)} = \text{lin} \{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l)}(t), P_{m+2}^{(l)}(t), \dots\}. \quad (2.4)$$

Коэффициенты полиномов $P_i(t)$, $l \in \mathbb{N}$ (у них нет свободных членов) поместим слева направо от 1 до i в порядке возрастания индекса в i -ю строку следующего целочисленного треуголь-

ника [16], который назовем *треугольником* Неймана, поскольку он играет важную роль в исследовании задач $\mathcal{N}_k$,

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cccccc} & & & & 1 & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & 3 & -3 & 1 \\ & & -15 & 15 & -6 & 1 \\ 105 & -105 & 45 & -10 & 1 & \\ & & \dots & & & \\ \dots & p_j^{(i)} & = & p_{j-1}^{(i-1)} & + & (j-2i+2)p_j^{(i-1)} \dots \end{array}, \quad (2.5)$$

где $p_j^{(i)}$ при $1 \leq j \leq i$, $i \in \mathbb{N}$ — элемент i -й строки треугольника Неймана $\mathbb{P}$, стоящий на j -м месте слева, и $p_1^{(1)} = 1$ — начальное условие, а $p_j^{(i)} = 0$ при $j > i$ и $0 \geq j$ — граничные условия для приведенного рекуррентного уравнения. Доказано, что верно равенство

$$p_j^{(i)} = (-1)^{i-j} \binom{2i-j-1}{j-1} \frac{(2i-2j+1)!!}{2i-2j+1} \quad (2.6)$$

и установлено, что степень полинома $P_i(t)$ равна i , а низшая степень одночленов, входящих в $P_i(t)$, равна 1. В силу определения $P_i(t)$ и факториального многочлена верно равенство

$$P_{|i|}(t) \equiv \sum_{j=1}^i p_j^{(i)} t^{[j]} = (t, -2)_i \equiv t(t-2) \dots (t-2i+2), \quad (2.7)$$

где $t^{[i]} = t(t-1) \dots (t-i+1)$ — факториальная степень t , а

$$(a, b)_i = a(a+b) \dots (a+(i-1)b)$$

есть обобщенный символ Похгаммера [6] с соглашением $(a, b)_0 = 1$. Очевидно, что $t^{[i]} = (t, -1)_i$. В соответствии с треугольником Неймана $\mathbb{P}$ из (2.5) несколько полиномов $P_i(t)$ можно записать в явном виде

$$\begin{aligned} P_1(t) &= t, & P_2(t) &= -t + t^2, & P_3(t) &= 3t - 3t^2 + t^3, \\ P_4(t) &= -15t + 15t^2 - 6t^3 + t^4, & P_5(t) &= 105t - 105t^2 + 45t^3 - 10t^4 + t^5. \end{aligned}$$

Пусть

$$P_i^{(l)}(t) = \sum_{j=0}^i a_j^{(i,l)} t^j,$$

тогда для коэффициентов $a_j^{(i,l)}$ верно следующее рекуррентное равенство [15, лемма 5]

$$a_j^{(i,l)} = a_{j-1}^{(i-1,l)} + (j-2i+2-l)a_j^{(i-1,l)}, \quad 0 \leq j \leq i, \quad i \geq 2,$$

где $a_0^{(1,l)} = -l$, $a_1^{(1,l)} = 1$ — начальные условия и $a_j^{(i,l)} = 0$ при $j > i$ и $0 > j$ — граничные условия. Исходя из этого нетрудно написать первые четыре полинома $P_i^{(l)}(t)$, $l \in \mathbb{N}_0$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} P_0^{(l)}(t) &= l, & P_1^{(l)}(t) &= -l + t, & P_2^{(l)}(t) &= l(l+2) - (2l+1)t + t^2, \\ P_3^{(l)}(t) &= -l(l+2)(l+4) + 3(l^2 + 3l+1)t - 3(l+1)t^2 + t^3. \end{aligned}$$

Полиномы $P_i^{(l)}(t)$ играют важную роль в полученных ниже результатах. В работе [15, следствие 3] на основании результатов из [17] установлено следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть t -гармоническая в S функция $u \in C^p(\bar{S})$ удовлетворяет на ∂S равенствам

$$Q_i \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) u \Big|_{\partial S} = \varphi_i(s), \quad i = 1, \dots, q, \quad (2.8)$$

где $Q_i(t)$ — некоторые полиномы над $\mathbb{R}$ и $p = \max_i \deg Q_i(t)$. Тогда, если

$$\mathcal{L}_Q^{(l)} \equiv \mathcal{L}_m^{(l)} \cap \text{lin}\{Q_1(t), \dots, Q_q(t)\} \neq \{0\},$$

то функции $\varphi_1(s), \dots, \varphi_q(s)$ должны удовлетворять равенствам

$$\int_{\partial S} H_l(x) \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(j)} \varphi_i(x) ds_x = 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

где $r = \dim \mathcal{L}_Q^{(l)}$, числа $\alpha_i^{(j)}$ таковы, что полиномы $S_j(t) = \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(j)} Q_i(t)$ при $j = 1, \dots, r$ образуют базис в $\mathcal{L}_Q^{(l)}$, а $H_l(x)$ — произвольный однородный гармонический полином степени l .

Следствие 1. Если в условиях леммы 1

$$R(t) = \sum_{i=1}^q \alpha_i Q_i(t) \in \mathcal{L}_Q^{(l)},$$

то для функций $\varphi_i(s)$ должно быть выполнено равенство

$$\int_{\partial S} H_l(x) \sum_{i=1}^q \alpha_i \varphi_i(s) ds_x = 0. \quad (2.9)$$

Доказательство. Действительно, если полиномы $R_j(t) = \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(j)} Q_i(t)$ при $j = 1, \dots, r$ образуют базис в $\mathcal{L}_Q^{(l)}$ и $R(t) = \sum_{j=1}^r \beta_j R_j(t) \in \mathcal{L}_Q^{(l)}$, то по свойству базиса

$$\sum_{j=1}^r \beta_j R_j(t) = \sum_{j=1}^r \beta_j \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(j)} Q_i(t) = \sum_{i=1}^q Q_i(t) \sum_{j=1}^r \alpha_i^{(j)} \beta_j \equiv \sum_{i=1}^q \alpha_i Q_i(t)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} H_l(x) \sum_{i=1}^q \alpha_i \varphi_i(s) ds_x &= \int_{\partial S} H_l(x) \sum_{i=1}^q \varphi_i(s) \sum_{j=1}^r \alpha_i^{(j)} \beta_j ds_x = \\ &= \int_{\partial S} H_l(x) \sum_{j=1}^r \beta_j \sum_{i=1}^q \alpha_i^{(j)} \varphi_i(s) ds_x = 0, \end{aligned}$$

что доказывает (2.9).

Кроме этого, воспользуемся еще одним утверждением из [15, теорема 5], которое основано на рекуррентных равенствах (2.2) и (2.3).

Лемма 2. Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $P_i(t) \equiv P_i^{(0)}(t)$, тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{(2l)} = \text{lin} \{ &P_m^{(2l)}(t), P_{m+1}^{(2l-2)}(t), \dots, P_{m+l}^{(2l-2)}(t), t^2 P_{m+l-1}^{(2l-2)}(t), t^4 P_{m+l-2}^{(2l-2)}(t), \dots, \\ &\dots, t^{2l-2} P_{m+1}^{(2l-2)}(t), t^{2l} P_m^{(2l-2)}(t), t^{2l+2} P_{m-1}^{(2l-2)}(t), \dots, t^{2m+2l-2} P_1^{(2l-2)}(t), t^{2m+2l}, t^{2m+2l+1}, \dots \}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

и с учетом (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{(2l-1)} = \text{lin} \{ &P_m^{(2l-1)}(t), P_{m+1}^{(2l-3)}(t), \dots, P_{m+l}^{(2l-3)}(t), t^2 P_{m+l-2}^{(2l-3)}(t), t^4 P_{m+l-3}^{(2l-3)}(t), \dots, \\ &t^{2l-2} P_m^{(2l-3)}(t), t^{2l} P_{m-1}^{(2l-3)}(t), t^{2l+2} P_{m-2}^{(2l-3)}(t), \dots, t^{2m+2l-2} P_0^{(2l-3)}(t), t^{2m+2l-1}, t^{2m+2l}, \dots \}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Исследуем необходимые условия разрешимости вида (2.9) для класса задач $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$, для однородного полигармонического уравнения.

Теорема 1. Пусть $f(x) = 0$ и функции $\varphi_i(s)$ при $i = 1, 2, \dots, m$ такие, что решение $u(x)$ задачи $\mathcal{N}_k$ для однородного полигармонического уравнения (1.1) существует и оно такое, что $u \in C^{k+m-1}(\bar{S})$.

Тогда, при всяком $l \in \mathbb{N}_0$ таком, что $l < k$ должны быть выполнены следующие условия ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)) ds_x &= 0, \\ \lambda &= \lambda_0, \dots, \min\{k-l, m\} - 1, \\ \int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x &= 0, \quad i = \max\{2m+l-k, 0\} + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\lambda_0 = [(k-l)/2]$, $H_l(x)$ — произвольный однородный гармонический полином степени l , $p_j^{(i)}$ — коэффициенты полинома $P_i(t)$ из (2.5), имеющие вид (2.6),

$$\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1, \quad \sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1. \quad (3.2)$$

Число условий (3.1) при $l < k$ равно

$$N_{m,k,l} = \min\{k-l-\lambda_0, m\} = \min\{[(k-l+1)/2], m\}.$$

В формулировке теоремы 1 следует иметь в виду следующее общепринятое соглашение для формул с индексами: если в формуле нижняя граница области изменения индекса становится больше верхней границы, то эту формулу не следует принимать в расчет. Например, первая формула в (3.1) действительна при $k > l$ и $[(k-l)/2] + 1 \leq m$, а вторая при $k > m+l$.

Доказательство. Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$, которое назовем *индексом* задачи $\mathcal{N}_k$ и пусть решение этой задачи существует. Применим к задаче $\mathcal{N}_k$ леммы 1 и 2. Условия (1.2) представим в виде (2.8). Для этого положим $Q_i(t) = t^{k+i-1}$ при $i = 1, \dots, m$ и $q = m$. Кроме того, обозначим

$$\mathcal{D}_k = \text{lin}\{t^k, t^{k+1}, \dots, t^{m+k-1}\}, \quad \mathcal{L}_{N_k}^{(l)} \equiv \mathcal{L}_Q^{(l)} = \mathcal{L}_m^{(l)} \cap \mathcal{D}_k.$$

Поскольку полиномы из $\mathcal{D}_k$ имеют максимальную степень $m+k-1$, то

$$\mathcal{L}_{N_k}^{(l)} = \mathcal{D}_k \cap \text{lin}\{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l)}(t), P_{m+2}^{(l)}(t), \dots, P_{m+k-1}^{(l)}(t)\}.$$

1⁰. Пусть $k \leq l$. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 3. При $k \leq l$ верно равенство $\mathcal{L}_{N_k}^{(l)} = \{0\}$.

Доказательство. Пусть при некоторых $\alpha_m, \dots, \alpha_{k+m-1} \in \mathbb{R}$

$$\hat{P}_{k+m-1}(t) \equiv \alpha_m P_m^{(l)}(t) + \dots + \alpha_{k+m-1} P_{k+m-1}^{(l)}(t) \in \mathcal{D}_k.$$

Применим к полиному $\hat{P}_{k+m-1}(t)$ преобразование Φ из (2.1). Тогда получим

$$\hat{P}_{[k+m-1]}(t) \in \text{lin}\{t^{[k]}, t^{[k+1]}, \dots, t^{[m+k-1]}\}$$

и, значит, полином $\hat{P}_{[k+m-1]}(t)$ должен иметь корни $0, 1, \dots, k-1$. В силу равенства $P_{[i]}^{(l)}(t) = H_i^{(l)}(t) = (t-l, -2)_i$ будем иметь

$$\hat{P}_{[k+m-1]}(t) = \alpha_m (t-l, -2)_m + \dots + \alpha_{k+m-1} (t-l, -2)_{k+m-1}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты $\alpha_m, \dots, \alpha_{k+m-1}$ должны удовлетворять следующей системе однородных уравнений:

$$\begin{pmatrix} (0-l, -2)_m & (0-l, -2)_{m+1} & \dots & (0-l, -2)_{k+m-1} \\ (1-l, -2)_m & (1-l, -2)_{m+1} & \dots & (1-l, -2)_{k+m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1-l, -2)_m & (k-1-l, -2)_{m+1} & \dots & (k-1-l, -2)_{k+m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \alpha_{m+1} \\ \dots \\ \alpha_{k+m-1} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.3)$$

Обозначим определитель этой системы Δ_k и вычислим его. Тогда поскольку $(a, b)_{i+j} = (a, b)_i(a + ib)_j$ будем иметь

$$\Delta_k = (-l, -2)_m(1-l, -2)_m \dots (k-1-l, -2)_m \times \\ \times \begin{vmatrix} 1 & (-l-2k, -2)_1 & \dots & (-l-2k, -2)_{k-1} \\ 1 & (1-l-2k, -2)_1 & \dots & (1-l-2k, -2)_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (k-1-l-2k, -2)_1 & \dots & (k-1-l-2k, -2)_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\lambda = -l - 2k$ и $C_k = (-l, -2)_m(1-l, -2)_m \dots (k-1-l, -2)_m \neq 0$. Тогда

$$\Delta_k = C_k \begin{vmatrix} 1 & (\lambda, -2)_1 & \dots & (\lambda, -2)_{k-1} \\ 1 & (1+\lambda, -2)_1 & \dots & (1+\lambda, -2)_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (k-1+\lambda, -2)_1 & \dots & (k-1+\lambda, -2)_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Умножим $(k-1)$ -й столбец определителя на $\lambda - 2(k-2)$ и вычтем его из k -го столбца, затем $(k-2)$ -й столбец определителя умножим на $\lambda - 2(k-3)$ и вычтем его из $(k-1)$ -го столбца и т.д. и наконец умножим первый столбец на λ и вычтем его из 2-го столбца, затем разложим полученный определитель по первой строке и вынесем из i -й строки полученного определителя i

$$\Delta_k = C_k \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & (1+\lambda, -2)_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k-1 & \dots & (k-1)(k-1+\lambda, -2)_{k-2} \end{vmatrix} = \\ = (k-1)! C_k \begin{vmatrix} 1 & (1+\lambda, -2)_1 & \dots & (1+\lambda, -2)_{k-2} \\ 1 & (2+\lambda, -2)_1 & \dots & (2+\lambda, -2)_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (k-1+\lambda, -2)_1 & \dots & (k-1+\lambda, -2)_{k-2} \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель отличается от предыдущего заменой $\lambda + 1$ на λ и уменьшением размерности на 1, а поэтому по индукции

$$\Delta_k = (k-1)(k-2)! \dots 2! C_k \begin{vmatrix} 1 & (k-2+\lambda, -2)_1 \\ 1 & (k-1+\lambda, -2)_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому при $k \leq l$ система (3.3) имеет только нулевое решение $\alpha_m = \dots = \alpha_{k+m-1} = 0$, а значит, $\hat{P}_{k+m-1}(t) = 0$ и лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что задача $\mathcal{N}_k$ при $k \leq l$ не имеет необходимых условий разрешимости вида (2.9).

2⁰. Пусть $l+1 \leq k \leq m+l$ или $1 \leq k-l \leq m$. Рассмотрим сначала случай $k = l+1$. Заметим, что множество $\mathcal{L}_m^{(l)}$ из (2.4), в силу леммы 2, можно находить также по формулам (2.10) и (2.11), которые, как нетрудно видеть, можно единообразно записать в виде

$$\mathcal{L}_m^{(l)} = \text{lin} \left\{ P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l-2)}(t), \dots, P_{m+[l/2]-1}^{(2)}(t), P_{m+[l/2]}^{(\theta_l)}(t), t^2 P_{m+[l/2]-1}^{(\theta_l)}(t), \dots \right. \\ \left. \dots, t^{2[l/2]-2} P_{m+1}^{(\theta_l)}(t), t^{2[l/2]} P_m^{(\theta_l)}(t), t^{2[l/2]+2} P_{m-1}^{(\theta_l)}(t), \dots, t^{2m+2[l/2]-2} P_1^{(\theta_l)}(t), t^{2m+2[l/2]}, \dots \right\} \quad (3.4)$$

где $\theta_l = 0$, если l четное и $\theta_l = 1$, если l нечетное.

Следствие 2. Нетривиальная линейная комбинация l полиномов вида

$$P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l-2)}(t), \dots, P_{m+[l/2]}^{(0)}(t), t^2 P_{m+[l/2]-1}^{(0)}(t), \dots, t^{2[l/2]-2} P_{m+1}^{(0)}(t)$$

при четном l и полиномов вида

$$P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l-2)}(t), \dots, P_{m+2\lfloor l/2 \rfloor}^{(1)}(t), t^2 P_{m+2\lfloor l/2 \rfloor-1}^{(1)}(t), \dots, t^{2\lfloor l/2 \rfloor} P_m^{(1)}(t)$$

при нечетном l не может иметь $t = 0$ нулем l -го порядка.

Действительно, из рекуррентных равенств (2.2), (2.3) и леммы 3 при $k = 2\lfloor l/2 \rfloor = l$, когда l четное следует, что если

$$\begin{aligned} \alpha_0 P_m^{(l)}(t) + \alpha_1 P_{m+1}^{(l-2)}(t) \dots + \alpha_{2\lfloor l/2 \rfloor-1} t^{2\lfloor l/2 \rfloor-2} P_{m+1}^{(0)}(t) = \\ = \hat{\alpha}_0 P_m^{(l)}(t) + \hat{\alpha}_1 P_{m+1}^{(l)}(t) + \dots + \hat{\alpha}_{2\lfloor l/2 \rfloor-1} P_{m+2\lfloor l/2 \rfloor-1}^{(l)}(t) \in \mathcal{D}_l, \end{aligned}$$

то $\hat{\alpha}_0 = \dots = \hat{\alpha}_{2\lfloor l/2 \rfloor-1} = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \dots = \alpha_{2\lfloor l/2 \rfloor-1} = 0$. Аналогичное утверждение верно, когда l нечетное. В этом случае $k = 2\lfloor l/2 \rfloor + 1 = l$. Следствие доказано.

Пусть l четное. Поскольку полиномы из $\mathcal{D}_k$ имеют максимальную степень $m + k - 1$, то из (3.4) найдем

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}_{l+1}}^{(l)} = \mathcal{D}_{l+1} \cap \text{lin}\{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l-2)}(t), \dots, t^{2\lfloor l/2 \rfloor-2} P_{m+1}^{(0)}(t), t^{2\lfloor l/2 \rfloor} P_m^{(0)}(t)\}. \quad (3.5)$$

Далее, нетрудно заметить, что

$$t^{2\lfloor l/2 \rfloor} P_m^{(0)}(t) \in \mathcal{D}_{l+1} = \text{lin}\{t^{l+1}, t^{l+2}, \dots, t^{m+l}\},$$

поскольку, как отмечалось в разд. 2, степень полинома $P_m(t)$ равна m , а низшая степень одночленов, входящих в $P_m(t)$, равна 1. Теперь воспользуемся следствием 2. Так как линейные комбинации первых l полиномов из (3.5) не могут входить в $\mathcal{D}_{l+1}$, то будем иметь

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}_{l+1}}^{(l)} = \text{lin}\{t^{2\lfloor l/2 \rfloor} P_m^{(0)}(t)\} = \text{lin}\{t^l P_m(t)\}.$$

Если l нечетное, тогда аналогично случаю четного l имеем

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}_{l+1}}^{(l)} = \mathcal{D}_{l+1} \cap \text{lin}\{P_m^{(l)}(t), P_{m+1}^{(l-2)}(t), \dots, t^{2\lfloor l/2 \rfloor} P_m^{(1)}(t), t^{2\lfloor l/2 \rfloor+2} P_{m-1}^{(1)}(t)\}.$$

В силу того, что по следствию 2 линейные комбинации первых l полиномов выше не могут входить в $\mathcal{D}_{l+1}$ и поскольку

$$t^{2\lfloor l/2 \rfloor+2} P_{m-1}^{(1)}(t) \in \mathcal{D}_{l+1} = \text{lin}\{t^{l+1}, t^{l+2}, \dots, t^{m+l}\},$$

то будем иметь равенство, аналогичное случаю четного l

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}_{l+1}}^{(l)} = \text{lin}\{t^{2\lfloor l/2 \rfloor+2} P_{m-1}^{(1)}(t)\} = \text{lin}\{t^{l+1} P_{m-1}^{(1)}(t)\} = \text{lin}\{t^l P_m(t)\}.$$

В силу полученного равенства по следствию 1 должно выполняться условие

$$\int_{\partial S} H_l(x) \sum_{i=1}^m p_i^{(m)} \varphi_i(s) ds_x = 0,$$

где $p_i^{(m)}$ — коэффициенты полинома $P_m(t)$, имеющие вид (2.6).

Пусть $1 \leq k - l \leq m$. Как показано выше, в цепочке полиномов из (3.4) при любом l встретится полином вида $t^l P_m(t)$. Поэтому, учитывая структуру полиномов из (3.4), в силу следствия 2, и, учитывая, что $k + m - 1 \leq 2m + l - 1$, запишем

$$\mathcal{L}_{\mathcal{N}_k}^{(l)} = \mathcal{D}_k \cap \text{lin}\{t^l P_m(t), t^{l+2} P_{m-1}(t), \dots, t^{2m+l-2} P_1(t)\}. \quad (3.6)$$

Например, полином из (3.4), следующий в цепочке за $t^l P_m(t)$, в случае четного l будет $t^{l+2} P_{m-1}(t)$, а в случае нечетного l имеет такой же вид $t^{2\lfloor l/2 \rfloor+4} P_{m-2}^{(\theta_l)}(t) = t^{l+3} P_{m-2}^{(1)}(t) = t^{l+2} P_{m-1}(t)$. Поэтому найдем все полиномы вида $t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)$, где $0 \leq \lambda \leq m - 1$ из линейной оболочки выше, которые входят также и в $\mathcal{D}_k$. Низшая степень одночленов, входящих в $t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)$ равна $l + 2\lambda + 1$, а старшая степень этих одночленов равна $l + 2\lambda + m - \lambda = l + \lambda + m$. Поэтому, если выполнены неравенства $l + 2\lambda + 1 < k$ или $k + m - 1 < l + \lambda + m$, что эквивалентно $k - 1 < l + \lambda$, то полином $t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)$ не может быть линейной комбинацией одночленов из $\mathcal{D}_k$, а значит, не может входить

в $\mathcal{D}_k$. Поэтому условие принадлежности полинома $t^{l+2\lambda}P_{m-\lambda}(t)$ множеству $\mathcal{D}_k$ имеет вид $l+2\lambda+1 \geq k$ и $k+m-1 \geq l+\lambda+m$ или $l+\lambda \leq k-1 \leq l+2\lambda$, где $0 \leq \lambda \leq m-1$, т.е.

$$t^{l+2\lambda}P_{m-\lambda}(t) \in \mathcal{D}_k \Leftrightarrow \lambda \leq k-l-1 \leq 2\lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq m-1. \quad (3.7)$$

2.1⁰. Пусть индекс k еще такой, что $[(k-l)/2] \leq m-1$, где $[a]$ — целая часть числа a . Тогда обозначим $\lambda_0 = [(k-l)/2]$. При таком $\lambda = \lambda_0$ верно неравенство $k-l-1 \leq 2\lambda_0 = 2[(k-l)/2]$ (при нечетном $k-l$ имеем равенство, а при четном $k-l$ — неравенство), а также справедливо другое неравенство $\lambda_0 = [(k-l)/2] \leq k-l-1$. Следовательно, условия из (3.7) выполнены. Поэтому при $\lambda_0 = [(k-l)/2]$ полином

$$t^{l+2\lambda_0}P_{m-\lambda_0}(t) = t^{l+2[(k-l)/2]}P_{m-[(k-l)/2]}(t)$$

входит в $\mathcal{D}_k$. Если рассмотреть значение $\lambda = \lambda_0 - 1 = [(k-l)/2] - 1$, то верно неравенство $k-l-1 > 2\lambda = 2[(k-l)/2] - 2$, или эквивалентное ему неравенство $k-l+1 > 2[(k-l)/2]$, т.е. условия (3.7) не выполнены, а значит, полином $t^{l+2\lambda_0-2}P_{m-\lambda_0+1}(t)$ не входит в $\mathcal{D}_k$. Таким образом, если двигаться по системе полиномов из (3.6) слева направо, то полином

$$t^{l+2\lambda_0}P_{m-\lambda_0}(t) = t^{2[(k-l)/2]}P_{m-[(k-l)/2]}(t)$$

будет первым полиномом из этой системы, принадлежащим $\mathcal{D}_k$. Полином $t^{l+2\lambda_0}P_{m-\lambda_0}(t)$ возьмем первым полиномом для базиса в $\mathcal{L}_{\mathcal{N}_k}^{(l)}$. При $k=l$ получаем $\lambda_0 = 0$. Найдем коэффициенты $\alpha_i^{(l)}$ из (2.9) для полинома $t^{l+2\lambda_0}P_{m-\lambda_0}(t)$. Поскольку $Q_i(t) = t^{k+i-1}$ при $i = 1, \dots, m$, то рассмотрим равенство

$$t^{l+2\lambda_0}P_{m-\lambda_0}(t) = \sum_{i=1}^{m-\lambda_0} p_i^{(m-\lambda_0)} t^{i+l+2\lambda_0}, \quad (3.8)$$

где $p_i^{(m-\lambda_0)}$ — коэффициенты полинома $P_{m-\lambda_0}(t)$. По построению $t^{i+l+2\lambda_0} \in \mathcal{D}_k$ при $i = 1, \dots, m-\lambda_0$. Поэтому (3.8) и есть представление первого базисного полинома из $\mathcal{L}_{\mathcal{N}_k}^{(l)}$. Если обозначить $\delta = 2\lambda_0 - k + l + 1$ и $\sigma = k - l - \lambda_0 - 1$, то, полагая $j = i + 2\lambda_0 - k + l + 1$ в (3.8), получаем

$$t^{l+2\lambda_0}P_{m-\lambda_0}(t) = \sum_{j=\delta+1}^{m-\sigma} p_{j-2\lambda_0+k-l-1}^{(m-\lambda_0)} t^{k+j-1}.$$

Поэтому, согласно следствию 1, первое условие вида (2.9) можно записать в виде

$$\int_{\partial S} H_l(x) \sum_{j=\delta+1}^{m-\sigma} p_{j-2\lambda_0+k-l-1}^{(m-\lambda_0)} \Phi_j(s) ds_x = 0.$$

Построим другие линейно независимые полиномы, входящие во множество $\mathcal{L}_{\mathcal{N}_k}^{(l)}$. Рассмотрим полиномы вида $t^{l+2\lambda}P_{m-\lambda}(t)$ при $\lambda_0 \leq \lambda \leq m-1$. Согласно (3.7) такие полиномы будут принадлежать множеству $\mathcal{D}_k$, если $\lambda \leq k-l-1 \leq 2\lambda$. Поскольку правое неравенство выполнено при $\lambda_0 \leq \lambda$, то остается условие $\lambda \leq k-l-1$. Очевидно, что справедливо равенство, аналогичное (3.8)

$$t^{l+2\lambda}P_{m-\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{m-\lambda} p_i^{(m-\lambda)} t^{i+l+2\lambda},$$

где $p_i^{(m-\lambda)}$ — коэффициенты полинома $P_{m-\lambda}(t)$. Аналогично предыдущему случаю, если воспользоваться обозначениями (3.2) $\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1$ и $\sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1$, то получим

$$t^{l+2\lambda}P_{m-\lambda}(t) = \sum_{j=\delta_\lambda+1}^{m-\sigma_\lambda} p_{j-2\lambda+k-l-1}^{(m-\lambda)} t^{k+j-1}.$$

Следовательно, в соответствии с замечанием 1, условие вида (2.9) с номером λ , в предположении, что $\lambda \leq k - l - 1$ и $\lambda_0 \leq \lambda \leq m - 1$ или в эквивалентном виде $\lambda_0 \leq \lambda \leq \min\{k - l, m\} - 1$ можно записать в виде

$$\int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_{\lambda+1}}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_{\lambda}}(s)) ds_x = 0. \quad (3.9)$$

Наконец, так как в рассматриваемом случае $\min\{k - l, m\} = k - l$, то при $\lambda \leq k - l - 1$ неравенство $\lambda \leq m - 1$ тоже выполнено и мы имеем $k - l - \lambda_0$ условий вида (3.9) при $\lambda = \lambda_0, \dots, k - l - 1$.

3⁰. Пусть $m < k - l$ и, значит, $\min\{k - l, m\} = m$. Тогда мы имеем $m - \lambda_0$ условий вида (3.9) при $\lambda = \lambda_0, \dots, m - 1$, но будут еще и другие условия такого же вида. Вернемся к условию (3.7) и рассмотрим случай, когда $\lambda \leq k - l - 1$ (это обязательное условие для включения полинома $t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)$ в $\mathcal{L}_{N_k}^{(l)}$), но когда неравенство $0 \leq \lambda \leq m - 1$ не выполнено, т.е. $m \leq \lambda \leq k - l - 1$. В этом случае полином $P_{m-\lambda}(t)$ не определен, но, как нетрудно заметить, из (3.4) следует

$$\mathcal{L}_{N_k}^{(l)} = \mathcal{D}_k \cap \text{lin}\{t^l P_m(t), t^{l+2} P_{m-1}(t), \dots, t^{2m+l-2} P_1(t), t^{2m+l}, \dots, t^{k+m-1}\} \quad (3.10)$$

и, значит, при $m \leq \lambda$ вместо полинома $t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)$ в $\mathcal{L}_m^{(l)}$ входит одночлен вида $t^{l+m+\lambda}$, который также принадлежит $\mathcal{D}_k$ при $\lambda \leq k - l - 1$. Следовательно, этот одночлен принадлежит $\mathcal{L}_{N_k}^{(l)}$, когда $m \leq \lambda \leq k - l - 1$. Поэтому условие ортогональности вида (2.9) при λ , удовлетворяющем условию $m \leq \lambda \leq k - l - 1$, можно записать в виде

$$\int_{\partial S} H_l(x) \varphi_{m+\lambda-k+l+1}(s) ds_x = 0,$$

или при $i = m + \lambda - k + l + 1$ в виде

$$\int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x = 0, \quad i = 2m - k + l + 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Таких условий будет $k - l - m$. В итоге, если $m < k - l$, то будем иметь также $(m - \lambda_0) + (k - l - m) = k - l - \lambda_0$ условий ортогональности вида (3.1).

4⁰. Наконец, рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = [(k - l)/2] \geq m$. В этом случае $k - l \geq 2[(k - l)/2] \geq 2m$ и, значит, любой полином вида $t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)$ при $0 \leq \lambda \leq m - 1$ не имеет одночленов, входящих в $\mathcal{D}_k = \text{lin}\{t^k, t^{k+1}, \dots, t^{m+k-1}\}$, а значит, в силу (3.4) имеем $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{L}_m^{(l)}$. Поэтому будем иметь только условия ортогональности вида (3.11)

$$\int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Обе полученные формулы (3.9) и (3.11) можно объединить в форме (3.1) и общее число найденных условий при $l < k$ равно $N_{m,k,l} = \min\{k - l - \lambda_0, m\}$.

Теперь заметим, что при $k - l < m$, согласно (6.4), полиномы вида

$$\{t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t) : \lambda_0 \leq \lambda \leq m - 1\} \cup \{t^{l+m+\lambda} : m \leq \lambda \leq k - l - 1\} \quad (3.12)$$

являются образующими полиномами из $\mathcal{L}_m^{(l)}$, принадлежащими также $\mathcal{D}_k$. Они являются линейно независимыми полиномами, поскольку имеют возрастающие степени по λ . Более того, никакой другой образующий полином из $\mathcal{L}_m^{(l)}$ не может входить в $\mathcal{D}_k$: либо его степень выше $m + k - 1$, либо наименьшая степень его одночленов меньше k . Поэтому полиномы из (3.12) являются базисом в $\mathcal{L}_{N_k}^{(l)}$, а значит, формула (3.1) описывает все интегральные условия для данных задачи N_k , вытекающие из леммы 1. Теорема доказана.

Замечание 1. В краевых задачах для полигармонического уравнения на порядок производных в граничных условиях накладывается ограничение (порядок производных на границе меньше порядка уравнения) [2], которое для задачи N_k можно записать в виде $k + m - 1 \leq 2m - 1$ или $k \leq m$. В теореме 1 таких ограничений нет.

Замечание 2. Если из элементов k -й строки треугольника Неймана $\mathbb{P}$ составить следующий вектор $\mathbb{P}_k = (p_1^{(k)}, \dots, p_k^{(k)})$, в котором опущен свободный член, равный нулю, и обозначить

$$\mathbb{F}(s) = (\varphi_1(s), \dots, \varphi_m(s)), \quad \mathbb{F}_{(l, \sigma_\lambda)}^{(r, \delta_\lambda)}(s) = (\varphi_{\delta_\lambda+1}(s), \dots, \varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)),$$

где верхний индекс последнего вектора указывает сдвиг начального индекса вектора $\mathbb{F}(s)$ на δ_λ позиций вправо, а нижний индекс последнего вектора указывает сдвиг конечного индекса вектора $\mathbb{F}(s)$ на σ_λ позиций влево, то равенство (3.9) можно переписать в виде

$$\int_{\partial S} H_l(x) \mathbb{P}_{m-\lambda} \cdot \mathbb{F}_{(l, \sigma_\lambda)}^{(r, \delta_\lambda)}(s) ds_x = 0.$$

Замечание 3. Нетрудно заметить, что при $f = 0$ условия ортогональности (3.1) для задачи $\mathcal{N}_k$ совпадают с условиями ортогональности (3.1) для задачи $\mathcal{N}_{k-l}$, но при $l = 0$ за исключением полиномиального множителя и верно равенство $N_{m,k,l} = N_{m,k-l,0}$.

Предположение 1. Набор из

$$\sum_{l=0}^{k-1} N_{m,k,l} = \sum_{l=0}^{k-1} \min\{(k-l+1)/2, m\} \equiv N_{m,k}$$

необходимых условий (3.1) разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$, полученных из теоремы 1 при $l = 0, \dots, k-1$, является и достаточным условием разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$. Более компактная формула для $N_{m,k}$ приведена в теореме 4.

4. ПРИМЕРЫ

Выпишем динамику возникновения необходимых условий разрешимости задач $\mathcal{N}_k$ для однородного 7-гармонического уравнения при различных $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta^7 u = 0, \quad x \in S;$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \right|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \left. \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}} \right|_{\partial S} = \varphi_2(s), \dots, \left. \frac{\partial^{k+6} u}{\partial \nu^{k+6}} \right|_{\partial S} = \varphi_7(s), \quad s \in \partial S.$$

В нашем случае $m = 7$. Учитывая замечание 3 рассмотрим случай $l = 0$. В соответствии с (3.2) имеем $N_{7,k,0} = \min\{k - \lambda_0, 7\}$ условий (3.1) с коэффициентами полиномов $P_{7-\lambda}(t)$ из (2.6) при $\lambda_0 \leq \lambda \leq \min\{k, 7\} - 1$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - k + 2$, $m - \sigma_\lambda = 8 + \lambda - k$, $\lambda_0 = [k/2]$ и $\max\{2m + l - k, 0\} + 1 \leq i \leq m$, когда $k > m$.

При $k = 1$ получаем $\lambda_0 = 0$ и $N_{7,1,0} = 1$ условие при $0 \leq \lambda \leq 0$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda + 1$, $m - \sigma_\lambda = 7 + \lambda$,

$$\int_{\partial S} (p_1^{(7)} \varphi_1(s) + \dots + p_7^{(7)} \varphi_7(s)) ds_x = 0.$$

При $k = 2$ получаем $\lambda_0 = 1$ и $N_{7,2,0} = 1$ условие при $1 \leq \lambda \leq 1$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda$, $m - \sigma_\lambda = 6 + \lambda$,

$$\int_{\partial S} (p_1^{(6)} \varphi_2(s) + \dots + p_6^{(6)} \varphi_7(s)) ds_x = 0.$$

При $k = 3$ получаем $\lambda_0 = 1$ и $N_{7,3,0} = 2$ условия при $1 \leq \lambda \leq 2$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 1$, $m - \sigma_\lambda = 5 + \lambda$,

$$\int_{\partial S} (p_1^{(6)} \varphi_1(s) + \dots + p_6^{(6)} \varphi_6(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} (p_1^{(5)} \varphi_3(s) + \dots + p_5^{(5)} \varphi_7(s)) ds_x = 0.$$

При $k = 4$ получаем $\lambda_0 = 2$ и $N_{7,4,0} = 2$ условия при $2 \leq \lambda \leq 3$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 2$, $m - \sigma_\lambda = 4 + \lambda$,

$$\int_{\partial S} (p_1^{(5)} \varphi_2(s) + \dots + p_5^{(5)} \varphi_6(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} (p_1^{(4)} \varphi_4(s) + \dots + p_4^{(4)} \varphi_7(s)) ds_x = 0.$$

При $k = 5$ получаем $\lambda_0 = 2$ и $N_{7,5,0} = 3$ условия при $2 \leq \lambda \leq 4$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 3$, $m - \sigma_\lambda = 3 + \lambda$,

$$\int_{\partial S} (p_1^{(5)} \varphi_1(s) + \dots + p_5^{(5)} \varphi_5(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} (p_1^{(4)} \varphi_3(s) + \dots + p_4^{(4)} \varphi_6(s)) ds_x = 0,$$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(3)} \varphi_5(s) + \dots + p_3^{(3)} \varphi_7(s)) ds_x = 0.$$

При $k = 6$ получаем $\lambda_0 = 3$ и $N_{7,6,0} = 3$ условия при $3 \leq \lambda \leq 5$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 4$, $m - \sigma_\lambda = 2 + \lambda$,

$$\int_{\partial S} (p_1^{(4)} \varphi_2(s) + \dots + p_4^{(4)} \varphi_5(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} (p_1^{(3)} \varphi_4(s) + \dots + p_3^{(3)} \varphi_6(s)) ds_x = 0,$$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(2)} \varphi_6(s) + p_2^{(2)} \varphi_7(s)) ds_x = 0.$$

При $k = 7$ получаем $\lambda_0 = 3$ и $N_{7,7,0} = 4$ условия при $3 \leq \lambda \leq 6$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 5$, $m - \sigma_\lambda = 1 + \lambda$,

$$\int_{\partial S} (p_1^{(4)} \varphi_1(s) + \dots + p_4^{(4)} \varphi_4(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} (p_1^{(3)} \varphi_3(s) + \dots + p_3^{(3)} \varphi_5(s)) ds_x = 0,$$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(2)} \varphi_5(s) + p_2^{(2)} \varphi_6(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} p_1^{(1)} \varphi_7(s) ds_x = 0.$$

При $k = 8$ получаем $\lambda_0 = 4$ и $N_{7,8,0} = 4$ условия при $4 \leq \lambda \leq 6$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 6$, $m - \sigma_\lambda = \lambda$ и $7 \leq i \leq 7$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(3)} \varphi_2(s) + \dots + p_3^{(3)} \varphi_4(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} (p_1^{(2)} \varphi_4(s) + p_2^{(2)} \varphi_5(s)) ds_x = 0,$$

$$\int_{\partial S} p_1^{(1)} \varphi_6(s) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \varphi_7(s) ds_x = 0, \quad i = 7.$$

При $k = 9$ получаем $\lambda_0 = 4$ и $N_{7,9,0} = 5$ условий при $4 \leq \lambda \leq 6$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 7$, $m - \sigma_\lambda = \lambda - 1$ и $6 \leq i \leq 7$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(3)} \varphi_1(s) + \dots + p_3^{(3)} \varphi_3(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} (p_1^{(2)} \varphi_3(s) + p_2^{(2)} \varphi_4(s)) ds_x = 0,$$

$$\int_{\partial S} p_1^{(1)} \varphi_5(s) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \varphi_i(s) ds_x = 0, \quad i = 6, 7.$$

При $k = 10$ получаем $\lambda_0 = 5$ и $N_{7,10,0} = 5$ условий при $5 \leq \lambda \leq 6$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 8$, $m - \sigma_\lambda = \lambda - 2$ и $5 \leq i \leq 7$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(2)} \varphi_2(s) + p_2^{(2)} \varphi_3(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} p_1^{(1)} \varphi_4(s) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \varphi_i(s) ds_x = 0, \quad i = 5, 6, 7.$$

При $k = 11$ получаем $\lambda_0 = 5$ и $N_{7,11,0} = 6$ условий при $5 \leq \lambda \leq 6$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 9$, $m - \sigma_\lambda = \lambda - 3$ и $4 \leq i \leq 7$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(2)} \varphi_1(s) + p_2^{(2)} \varphi_2(s)) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} p_1^{(1)} \varphi_3(s) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \varphi_i(s) ds_x = 0, \quad i = 4, \dots, 7.$$

При $k = 12$ получаем $\lambda_0 = 6$ и $N_{7,12,0} = 6$ условий при $6 \leq \lambda \leq 6$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 10$, $m - \sigma_\lambda = \lambda - 4$ и $3 \leq i \leq 7$

$$\int_{\partial S} p_1^{(1)} \varphi_2(s) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \varphi_3(s) ds_x = 0, \quad i = 3, \dots, 7.$$

При $k = 13$ получаем $\lambda_0 = 6$ и $N_{7,13,0} = 7$ условий при $6 \leq \lambda \leq 6$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 11$, $m - \sigma_\lambda = \lambda - 5$ и $2 \leq i \leq 7$

$$\int_{\partial S} p_1^{(1)} \varphi_1(s) ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \varphi_2(s) ds_x = 0, \quad i = 2, \dots, 7.$$

При $k \geq 14$, согласно замечанию после теоремы 1, поскольку условие $[k/2] + 1 \leq 7$ не выполнено, то необходимые условия задачи $\mathcal{N}_k$ нужно брать только из второй формулы (3.1) и их будет $N_{7,k,0} = 7$

$$\int_{\partial S} \varphi_i(s) ds_x = 0, \quad i = 1, \dots, 7.$$

Наконец, из приведенного выше анализа, учитывая замечание 3, нетрудно получить все необходимые условия разрешимости, например, задачи $\mathcal{N}_3$ для однородного 7-гармонического уравнения, даваемые теоремой 1: $\mathcal{N}_3$ при $l = 0$, $\mathcal{N}_3$ при $l = 1 \sim \mathcal{N}_2$ при $l = 0$ и $\mathcal{N}_3$ при $l = 2 \sim \mathcal{N}_1$ при $l = 0$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (p_1^{(6)} \varphi_1(s) + \dots + p_6^{(6)} \varphi_6(s)) ds_x &= 0, & \int_{\partial S} (p_1^{(5)} \varphi_3(s) + \dots + p_5^{(5)} \varphi_7(s)) ds_x &= 0, \\ \int_{\partial S} H_1(x) (p_1^{(6)} \varphi_2(s) + \dots + p_6^{(6)} \varphi_7(s)) ds_x &= 0, & \int_{\partial S} H_2(x) (p_1^{(7)} \varphi_1(s) + \dots + p_7^{(7)} \varphi_7(s)) ds_x &= 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты $p_j^{(i)}$ находятся из (2.6), а $H_l(x)$ — произвольный однородный гармонический полином степени l .

5. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим задачу $\mathcal{N}_k$ для неоднородного уравнения (1).

Пусть $f \in C^1(\bar{S})$ и $f(x) \neq 0$. Рассмотрим объемный потенциал $V[f](x)$ с плотностью $f(x)$

$$V[f](x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

где $E(x, \xi) = (n-2)^{-1} |\xi - x|^{2-n}$ ($n > 2$) — элементарное решение уравнения Лапласа, а ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$V_m[f] = \underbrace{V[\dots V[f]]}_m.$$

Известно, что $f \in C^1(\bar{S}) \Rightarrow V[f] \in C^1(\bar{S}) \cap C^2(S)$ и $\Delta V[f] = f$ в S [3], а поэтому $V_m[f] \in C^1(\bar{\Omega})$ и $\Delta^m V_m[f] = f$. Предположим, что решение $u(x)$ задачи $\mathcal{N}_k$ существует. Представим это решение задачи (1.1), (1.2) в виде суммы $u(x) = V_m[f] + w(x)$. Тогда будем иметь

$$\Delta^m u(x) - f = \Delta^k V_m[f] + \Delta^m w(x) - f = \Delta^m w(x)$$

и, значит, относительно $w(x)$ получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta^m w &= 0, & x &\in S; \\ \frac{\partial^k w}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial S} &= \tilde{\varphi}_1, & \frac{\partial^{k+1} w}{\partial \nu^{k+1}} \Big|_{\partial S} &= \tilde{\varphi}_2, \dots, \frac{\partial^{k+m-1} w}{\partial \nu^{k+m-1}} \Big|_{\partial S} = \tilde{\varphi}_m, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\tilde{\varphi}_i(s) = \varphi_i(s) - \frac{\partial^{k+i-1}}{\partial \nu^{k+i-1}} V_m[f]$$

при $i = 1, \dots, m$. Условия разрешимости полученной задачи $\mathcal{N}_k$ для однородного уравнения, согласно теореме 1, при $l < k$ имеют вид

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \tilde{\varphi}_{\delta_\lambda+1}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \tilde{\varphi}_{m-\sigma_\lambda}(s)) ds_x = \\ &= \int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)) ds_x - \\ &- \int_{\partial S} H_l(x) \left(p_1^{(m-\lambda)} \frac{\partial^{k+\delta_\lambda} V_m[f]}{\partial v^{k+\delta_\lambda}} + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \frac{\partial^{m+k-1-\sigma_\lambda} V_m[f]}{\partial v^{m+k-1-\sigma_\lambda}} \right) ds_x, \end{aligned}$$

где $\lambda_0 \leq \lambda \leq \min\{k-l, m\} - 1$ и

$$0 = \int_{\partial S} H_l(x) \tilde{\varphi}_i(s) ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x - \int_{\partial S} H_l(x) \frac{\partial^{k+i-1} V_m[f]}{\partial v^{k+i-1}} ds_x,$$

где $\max\{2m+l-k, 0\} + 1 \leq i \leq m$.

Рассмотрим однородный оператор $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. В силу справедливости на ∂S равенства [19]

$$\frac{\partial^i w}{\partial v^i} = \Lambda^{[i]} w \equiv \Lambda(\Lambda-1) \dots (\Lambda-i+1),$$

с учетом (3.2), полученные выше условия при $\lambda_0 \equiv [(k-l)/2] \leq \lambda \leq \min\{k-l, m\} - 1$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{2\lambda+l-k+2}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m+l-\lambda-k+1}(s)) ds_x = \\ &= \int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \Lambda^{[2\lambda+l+1]} + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \Lambda^{[\lambda+m+l]}) V_m[f] ds_x, \end{aligned} \quad (5.1)$$

а если $k > m+l$, то к этим условиям добавляются еще условия вида

$$\int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) \Lambda^{[k+i-1]} V_m[f] ds_x, \quad (5.2)$$

где $\max\{2m+l-k, 0\} + 1 \leq i \leq m$. Если рассмотреть многочлен

$$t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{m-\lambda} p_i^{(m-\lambda)} t^{i+l+2\lambda},$$

который, как показано выше, принадлежит $\mathcal{L}_{\mathcal{N}_k}^{(l)}$ и отображение Φ из (2.1), то условие (5.1) можно переписать в виде

$$\int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)) ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) \Phi[t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)] (\Lambda) V_m[f] ds_x. \quad (5.3)$$

Поэтому целесообразно ввести следующий функционал:

$$I_\lambda(f) = \int_{\partial S} H_l(x) \Phi[\Lambda^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(\Lambda)] V_m[f] ds_x,$$

очевидно являющийся линейным по f .

Лемма 4. Пусть $0 \leq \lambda \leq m-1$ и $l \in \mathbb{N}_0$, тогда

$$\Phi[t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)] = (t, -1)_l (t-l-1, -2)_\lambda (t-l, -2)_m, \quad (5.4)$$

где отображение Φ определено в (2.1), а $(a, b)_m$ — обобщенный символ Похгаммера.

Доказательство. Докажем сначала формулу

$$\Phi[t^{l+2\lambda} P_{m-\lambda}(t)] = \begin{cases} (t-1, -2)_{\lambda+[l/2]} (t-2)_{m+[l/2]}, & l \in 2\mathbb{N}_0, \\ (t, -2)_{\lambda+[l/2]+1} (t-1, -2)_{m+[l/2]}, & l \in 2\mathbb{N}_0 + 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Пусть $l = 0$. Проведем индукцию по λ . При $\lambda = 0$ согласно (2.7) имеем $\Phi[P_m(t)] = (t, -2)_m$. В предположении верности (5.5) при $0 \leq \lambda < m - 1$ с помощью (2.3) и (2.7) найдем

$$\begin{aligned}\Phi[t^{2\lambda+2}P_{m-\lambda-1}(t)] &= \Phi[t^{2\lambda}P_{m+1-\lambda}(t) + (2m - 2\lambda - 1)t^{2\lambda}P_{m-\lambda}(t)] = \\ &= \Phi[t^{2\lambda}P_{m+1-\lambda}(t)] + (2m - 2\lambda - 1)\Phi[t^{2\lambda}P_{m-\lambda}(t)] = (t - 1, -2)_\lambda(t, -2)_{m+1} + \\ &+ (2m - 2\lambda - 1)(t - 1, -2)_\lambda(t, -2)_m = (t - 1, -2)_\lambda(t, -2)_m(t - 2m + 2m - 2\lambda - 1) = \\ &= (t - 1, -2)_\lambda(t - 1 - 2\lambda)(t, -2)_m = (t - 1, -2)_{\lambda+1}(t, -2)_m.\end{aligned}$$

Шаг индукции доказан, а вместе с ним случай $l = 0$. Пусть $l = 1$. Опять воспользуемся индукцией по λ . При $\lambda = 0$ согласно (2.3) имеем

$$\begin{aligned}\Phi[tP_m(t)] &= \Phi[t^2P_{m-1}^{(1)}(t)] = \Phi[P_{m+1}^{(1)}(t)] + (2m + 1)\Phi[P_m^{(1)}(t)] = (t - 1, -2)_{m+1} + \\ &+ (2m + 1)(t - 1, -2)_m = (t - 1, -2)_m(t - 1 - 2m + 2m + 1) = t(t - 1, -2)_m,\end{aligned}$$

что совпадает с (5.5) при $l = 1$ и $\lambda = 0$. В предположении верности (5.5) при $0 \leq \lambda < m - 1$ с помощью (2.3) найдем

$$\begin{aligned}\Phi[t^{1+2\lambda+2}P_{m-\lambda-1}(t)] &= \Phi[t^{1+2\lambda}P_{m+1-\lambda}(t) + (2m - 2\lambda - 1)t^{1+2\lambda}P_{m-\lambda}(t)] = \\ &= \Phi[t^{1+2\lambda}P_{m+1-\lambda}(t)] + (2m - 2\lambda - 1)\Phi[t^{1+2\lambda}P_{m-\lambda}(t)] = (t, -2)_{\lambda+1}(t - 1, -2)_{m+1} + \\ &+ (2m - 2\lambda - 1)(t, -2)_{\lambda+1}(t - 1, -2)_m = (t, -2)_{\lambda+1}(t - 1, -2)_m(t - 1 - 2m + 2m - 2\lambda - 1) = \\ &= (t, -2)_{\lambda+1}(t - 1, -2)_m(t - 2\lambda - 2) = (t, -2)_{\lambda+2}(t - 1, -2)_m.\end{aligned}$$

Пусть теперь $l = 2l'$, $l' \in \mathbb{N}_0$. Тогда нетрудно получить (5.5) в четном случае

$$\Phi[t^{l+2\lambda}P_{m-\lambda}(t)] = \Phi[t^{2l'+2\lambda}P_{m+l'-\lambda-l'}(t)] = (t - 1, -2)_{\lambda+l'}(t, -2)_{m+l'}.$$

Аналогично при $l = 2l' + 1$ будем иметь (5.5) в нечетном случае

$$\Phi[t^{l+2\lambda}P_{m-\lambda}(t)] = \Phi[t^{1+2l'+2\lambda}P_{m+l'-\lambda-l'}(t)] = (t, -2)_{\lambda+l'+1}(t - 1, -2)_{m+l'}.$$

Формула (5.5) доказана. Преобразуем ее. Нетрудно видеть, что (5.5) можно переписать в едином виде:

$$\begin{aligned}\Phi[t^{l+2\lambda}P_{m-\lambda}(t)] &= (t - 1 + \theta_l, -2)_{\lambda+[l/2]+\theta_l}(t - \theta_l, -2)_{m+[l/2]} = \\ &= (t - 1 + \theta_l, -2)_{\lambda+[l/2]+\theta_l}(t - \theta_l, -2)_{[l/2]}(t - l, -2)_m,\end{aligned}$$

где $\theta_l = 0$, если l четное и $\theta_l = 1$, если l нечетное. Теперь докажем, что

$$A_{l,\lambda} \equiv (t - 1 + \theta_l, -2)_{\lambda+[l/2]+\theta_l}(t - \theta_l, -2)_{[l/2]} = (t, -1)_l(t - l - 1, -2)_\lambda,$$

а значит, учитывая предыдущее равенство, (5.4) будет доказано. Действительно, если $l = 2l'$, то имеем

$$\begin{aligned}A_{l,\lambda} &= (t - 1, -2)_{\lambda+l'}(t, -2)_{l'} = (t - 1 - 2l', -2)_\lambda(t - 1, -2)_{l'}(t, -2)_{l'} = \\ &= (t - l - 1, -2)_\lambda(t, -1)_{2l'} = (t, -1)_l(t - l - 1, -2)_\lambda,\end{aligned}$$

а если $l = 2l' + 1$, то

$$\begin{aligned}A_{l,\lambda} &= (t, -2)_{\lambda+l'+1}(t - 1, -2)_{l'} = (t - 2l' - 2, -2)_\lambda(t, -2)_{l'+1}(t - 1, -2)_{l'} = \\ &= (t - l - 1, -2)_\lambda(t, -1)_{2l'+1} = (t, -1)_l(t - l - 1, -2)_\lambda.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Используя лемму 4, функционал $I_\lambda(f)$ можно переписать в виде

$$I_\lambda(f) = \int_{\partial S} H_l(x) S_{l,\lambda}(\Lambda)(\Lambda - l, -2)_m V_m[f] ds_x, \quad (5.6)$$

где обозначено

$$S_{l,\lambda}(t) = (t, -1)_l(t - l - 1, -2)_\lambda, \quad (5.7)$$

а условие (5.3) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} H_l(x) (p_1^{(m-\lambda)} \Phi_{\delta_\lambda+1}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \Phi_{m-\sigma_\lambda}(s)) ds_x = \\ = \int_{\partial S} H_l(x) S_{l,\lambda}(\Lambda)(\Lambda - l, -2)_m V_m[f] ds_x. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Это условие действительно, когда $\lambda_0 \equiv [(k-l)/2] \leq \lambda \leq m-1$.

Замечание 4. Пусть $k > m+l$. В этом случае в условиях ортогональности (5.2) возникает полином $t^{[k+i-1]}$, где $i = \max\{2m-k+l, 0\} + 1, \dots, m$. Тогда поскольку

$$\begin{aligned} t^{[k+i-1]} &= (t, -1)_{k+i-1} = (t, -1)_l (t-l-1, -2)_m (t-l-2m, -1)_{i-1-(2m-k+l)} \times \\ &\times (t-l, -2)_m = S'_{i+k-m-1}(t) (t-l, -2)_m, \end{aligned}$$

где обозначено

$$S'_{i+k-m-1}(t) = S_{l,m}(t) (t-l-2m, -1)_{i-1-(2m-k+l)},$$

то условия ортогональности (5.2) можно записать в виде

$$\int_{\partial S} H_l(x) \Phi_i(s) ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) S'_{i+k-m-1}(\Lambda) (\Lambda - l, -2)_m V_m[f] ds_x, \quad (5.9)$$

при $i = \max\{2m-k+l, 0\} + 1, \dots, m$. Из формул выше видно, что

$$S'_{i+k-m-1}(t) = \frac{(t, -1)_{i+k-1}}{(t-l, -2)_m}. \quad (5.10)$$

6. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ПРАВАЯ ЧАСТЬ

Пусть функция $f(x)$ из уравнения (1.1) — полином. Согласно формуле Альманси полином $f(x)$ всегда можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{r,s} |x|^{2r} H_s^{(r)}(x), \quad (6.1)$$

где $H_s^{(r)}(x)$ — однородные гармонические полиномы степени s . В качестве таких полиномов можно взять ортонормальную систему гармонических полиномов из [18]. Для вычисления потенциала $V[f](x)$ воспользуемся теоремой 13 из [19].

Теорема 2. Пусть полином $f(x)$ записан в виде (6.1), тогда справедливо равенство

$$V[f](x) = \sum_{r,s} \frac{|x|^{2r+2} H_s^{(r)}(x)}{(2r+2)(2r+2s+n)} - \sum_{r,s} \frac{H_s^{(r)}(x)}{(2r+2)(2s+n-2)}. \quad (6.2)$$

На основании этой теоремы докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Если полином $f(x)$ записан в виде (6.1) и $[(k-l)/2] + 1 \leq m$, то функционал $I_\lambda(f)$ имеет вид

$$I_\lambda(f) = \sum_r \frac{S_{l,\lambda}(2r+2m+l)}{(2r+2l+n, 2)_m} (H_l, H_l^{(r)}), \quad (6.3)$$

где $[(k-l)/2] \leq \lambda \leq m-1$ и $(H_l, H_s) = \int_{\partial S} H_l(x) H_s(x) ds_x$.

Доказательство. Предположим сначала, что $f(x)$ — полином специального вида $f(x) = H_{r,s}(x) = |x|^{2r} H_s^{(r)}(x)$, где $H_s^{(r)}(x)$ — однородный гармонический полином степени s . Из формулы (6.2) теоремы 2 вытекает, что для $H_{r,s}(x) = |x|^{2r} H_s^{(r)}(x)$ имеет место равенство

$$V_m[H_{r,s}] = V[\dots V[H_{r,s}]] = \frac{|x|^{2r+2m} H_s^{(r)}(x)}{(2r+2, 2)_m (2r+2s+n, 2)_m} + Q_{m-1}(|x|^2) H_s^{(r)}(x), \quad (6.4)$$

где $Q_{m-1}(|x|^2)$ — некоторый полином степени $m-1$ от $|x|^2$, конкретный вид которого не имеет значения. Для сокращения записей обозначим $R(t) = S_{l,\lambda}(t)(t-l, -2)_m$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку для оператора Λ верны равенства

$$\begin{aligned} (\Lambda - \alpha)(Q_{m-1}(|x|^2)H_s^{(r)}(x)) &= H_s^{(r)}(x)(\Lambda - \alpha)Q_{m-1}(|x|^2) + Q_{m-1}(|x|^2)\Lambda H_s^{(r)}(x) = \\ &= ((\Lambda - \alpha)Q_{m-1}(|x|^2) + sQ_{k-1}(|x|^2))H_s^{(r)}(x) = H_s^{(r)}(x)(\Lambda + s - \alpha)Q_{m-1}(|x|^2), \end{aligned}$$

а $R(t)$ представляет собой произведение простых множителей, то

$$\begin{aligned} R(\Lambda)(Q_{m-1}(|x|^2)H_s^{(r)}(x)) &= S_{l,\lambda}(\Lambda) \prod_{i=0}^{m-1} (\Lambda - l - 2i)(Q_{m-1}(|x|^2)H_s^{(r)}(x)) = \\ &= S_{l,\lambda}(\Lambda)H_s^{(r)}(x) \prod_{i=0}^{p-1} (\Lambda - l + s - 2i)Q_{m-1}(|x|^2) = S_{l,\lambda}(\Lambda) \times \\ &\times H_s^{(r)}(x)(\Lambda - l + s, -2)_m Q_{m-1}(|x|^2) = H_s^{(r)}(x)S_{l,\lambda}(\Lambda + s)(\Lambda + s - l, -2)_m \times \\ &\times Q_{m-1}(|x|^2) = H_s^{(r)}(x)R(\Lambda + s)Q_{m-1}(|x|^2) \end{aligned}$$

и аналогично

$$R(\Lambda) \frac{|x|^{2r+2m} H_s^{(r)}(x)}{(2r+2, 2)_m (2r+2s+n, 2)_m} = H_s^{(r)}(x) \frac{R(2r+2m+s)}{(2r+2, 2)_m (2r+2s+n, 2)_m} |x|^{2r+2m}.$$

Поэтому, используя (6.4), будем иметь

$$R(\Lambda)V_m[H_{r,s}] = H_s^{(r)}(x) \frac{R(2r+2m+s)}{(2r+2, 2)_m (2r+2s+n, 2)_m} |x|^{2r+2m} + H_s^{(r)}(x)R(\Lambda+s)Q_{m-1}(|x|^2).$$

Следовательно, из (5.6) следует, что

$$I_\lambda(H_{r,s}) = \left(\frac{R(2r+2m+s)}{(2r+2, 2)_m (2r+2s+n, 2)_m} + R(\Lambda+s)Q_{m-1}(|x|^2) \Big|_{|x|=1} \right) \int_{\partial S} H_l(x)H_s^{(r)}(x)ds_x. \quad (6.5)$$

Отсюда, при $s \neq l$, в силу ортогональности на ∂S гармонических полиномов различной степени, получим $I_\lambda(H_{r,s})(x) = 0$. Если $s = l$, то рассмотрим полином $R(\Lambda+s)Q_{m-1}(|x|^2)$. Пусть одночлен $q_i |x|^{2i}$, $0 \leq i \leq m-1$, входит в $Q_{m-1}(|x|^2)$. В соответствии с определением $R(t) = S_{l,\lambda}(t)(t-l, -2)_m$ будем иметь

$$\begin{aligned} R(\Lambda+s)q_i |x|^{2i} &= q_i S_{l,\lambda}(\Lambda+s)(\Lambda+s-l, -2)_m |x|^{2i} = \\ &= q_i S_{l,\lambda}(\Lambda+l)(\Lambda, -2)_m |x|^{2i} = q_i S_{l,\lambda}(2i+l)(2i, -2)_m |x|^{2i} = 0, \end{aligned}$$

поскольку $0 \leq i \leq m-1$. Поэтому $R(\Lambda+s)Q_{m-1}(|x|^2) = 0$, а значит, из (6.5) при $s = l$, аналогично предыдущему равенству, находим

$$\begin{aligned} I_\lambda(H_{r,l}) &= \frac{S_{l,\lambda}(2r+2m+l)(2r+2m, -2)_m}{(2r+2, 2)_m (2r+2l+n, 2)_m} \int_{\partial S} H_l(x)H_l^{(r)}(x)ds_x = \\ &= \frac{S_{l,\lambda}(2r+2m+l)}{(2r+2l+n, 2)_m} (H_l, H_l^{(r)}). \end{aligned}$$

Поскольку полином $f(x)$ из (6.1) является суммой полиномов вида $|x|^{2r} H_s(x)$ и функционал $I_\lambda(f)$ линеен, то суммируя функционалы $I_\lambda(H_{r,s})$ по r и s , получаем (6.3).

На основании этой теоремы установим необходимые условия существования решения задач Неймана N_k для неоднородного полигармонического уравнения при полиномиальной правой части.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ — полином и функции $\varphi_i(s)$ при $i = 1, 2, \dots, m$ такие, что решение $u(x)$ задачи $\mathcal{N}_k$ для уравнения (1.1) существует и $u \in C^{k+m-1}(\bar{S})$. Тогда, при всяком $l \in \mathbb{N}_0$ таком, что $l < k$ должны быть выполнены следующие условия ортогональности:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)) ds_x = \\ & = \int_S \frac{(1-|x|^2)^{m-1}}{(2m-2)!!} H_l(x) S_{l,\lambda}(\Lambda + 2m) f(x) dx, \quad \lambda = \lambda_0, \dots, \min\{k-l, m\}-1, \\ & \int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x = \int_S \frac{(1-|x|^2)^{m-1}}{(2m-2)!!} H_l(x) S'_{i+k-m-1}(\Lambda) f(x) dx, \\ & i = \max\{2m+l-k, 0\}+1, \dots, m, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $p_i^{(j)}$ из треугольника $\mathbb{P}$, $\lambda_0 = [(k-l)/2]$, $\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1$, $\sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1$ и

$$S_{l,\lambda}(t) = (t, -1)_l (t-l-1, -2)_\lambda, \quad S'_{i+k-m-1}(t) = (t, -1)_{k+i-1} / (t-l, -2)_m.$$

Число условий (6.6) при $l < k$ равно

$$N_{m,k} = [(k+1)/2][(k+2)/2], \quad k \leq 2m, \quad N_{m,k} = m(k-m+1), \quad k \geq 2m.$$

Доказательство. Пусть $u \in C^{k+m-1}(\bar{S})$. Представим полином $f(x)$ в виде (6.1).

Рассмотрим случай $\lambda_0 = [(k-l)/2] \leq m-1$. В силу теоремы 1 необходимые условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$ имеют вид (5.8). По теореме 3 функционал $I_\lambda(f)$ можно преобразовать к виду (6.3)

$$I_\lambda(f) = \sum_r \frac{b_r}{(2r+2l+n, 2)_m} (H_l, H_l^{(r)}),$$

где для краткости обозначено $b_r = S_{l,\lambda}(2r+2m+l)$. По лемме 2 из [15] имеем

$$\frac{1}{(2r+2l+n, 2)_m} = \frac{1}{(2m-2)!!} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \frac{(-1)^i}{2r+2l+n+2i},$$

а значит, используя ортогональность на ∂S гармонических полиномов различной степени, нетрудно получить

$$\begin{aligned} I_\lambda(f) &= \sum_r \frac{b_r}{(2m-2)!!} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \frac{(-1)^i}{2r+2l+n+2i} (H_l, H_l^{(r)}) = \\ &= \sum_{r,s} \frac{b_r}{(2m-2)!!} \int_0^1 \rho^{2r} \int_{|x|=1} \rho^{2l} H_l(x) H_s^{(r)}(x) \sum_{i=0}^{m-1} (-\rho^2)^i \binom{m-1}{i} ds_x \rho^{n-1} d\rho = \\ &= \sum_{r,s} \frac{b_r}{(2m-2)!!} \int_0^1 \rho^{2r} \int_{|x|=\rho} H_l(x) H_s^{(r)}(x) (1-\rho^2)^{m-1} ds_x d\rho = \\ &= \int_{|x|<1} \frac{(1-|x|^2)^{m-1}}{(2m-2)!!} H_l(x) \sum_{r,s} S_{l,\lambda}(2r+2m+l) |x|^{2r} H_s^{(r)}(x) dx = \\ &= \int_{|x|<1} \frac{(1-|x|^2)^{m-1}}{(2m-2)!!} H_l(x) S_{l,\lambda}(\Lambda + 2m) \sum_{r,s} |x|^{2r} H_s^{(r)}(x) dx = \\ &= \int_{|x|<1} \frac{(1-|x|^2)^{m-1}}{(2m-2)!!} H_l(x) S_{l,\lambda}(\Lambda + 2m) f(x) dx. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть формулы (5.8) значение полученного функционала $I_\lambda(f)$, будем иметь первую формулу из (6.6)

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(s) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(s)) ds_x = \\ = \int_S \frac{(1-|x|^2)^{m-1}}{(2m-2)!!} H_l(x) S_{l,\lambda}(\Lambda+2m) f(x) dx, \end{aligned}$$

где $\lambda = \lambda_0, \dots, \min\{k-l, m\}-1$ и $S_{l,\lambda}(t)$ находится из (5.7).

Далее, при $k > m$, согласно замечанию 4, возникают условия ортогональности (5.9)

$$\int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) S'_{i+k-m-1}(\Lambda)(\Lambda-l, -2)_m V_m[f] ds_x,$$

где $i = \max\{2m-k+l, 0\}+1, \dots, m$ и $S'_{i+k-m-1}(t)$ находится из (5.10). Действуя с интегралом справа аналогично предыдущему случаю с заменой многочлена $S_{l,\lambda}(t)$ на многочлен $S'_{i+k-m-1}(t)$ (при выкладках конкретный вид $S_{l,a}(t)$ нигде не был использован) получаем

$$\int_{\partial S} H_l(x) \varphi_i(s) ds_x = \int_S H_l(x) S'_{i+k-m-1}(\Lambda+2m) f(x) dx,$$

где $i = \max\{2m-k+l, 0\}+1, \dots, m$.

Общее число условий ортогональности для заданного k будет (см. теорему 1)

$$N_{m,k} = \sum_{l=0}^{k-1} N_{m,k,l} = \sum_{l=0}^{k-1} \min\{[(k-l+1)/2], m\} = \sum_{l=1}^k \min\{[(l+1)/2], m\},$$

где было использовано равенство $k-l-\lambda_0 = [(k-l+1)/2]$ и замена индекса суммирования $k-l \rightarrow l$. Если $k \leq 2m$, то нетрудно проверить, что

$$N_{m,k} = \sum_{l=1}^k [(l+1)/2] = 1+1+\dots+[(k+1)/2] = [(k+1)/2][(k+2)/2],$$

а при $k \geq 2m$, что $N_{m,k} = N_{m,2m} + m(k-2m) = m(k-m+1)$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу $\mathcal{N}_3$, исследованную в разд. 4, но для неоднородного 7-гармонического уравнения, в котором $f(x)$ — полином

$$\begin{aligned} \Delta^7 u = f(x), \quad x \in S; \\ \left. \frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3} \right|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \left. \frac{\partial^4 u}{\partial \nu^4} \right|_{\partial S} = \varphi_2(s), \dots, \left. \frac{\partial^9 u}{\partial \nu^9} \right|_{\partial S} = \varphi_7(s), \quad s \in \partial S. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Очевидно, что $m = 7$, $k = 3$ и $l = 0, 1, 2$. Воспользуемся результатами вычислений из разд. 4 с учетом замечания 3. Число условий будет $N_{7,3} = [(3+1)/2][(3+2)/2] = 4$.

При $l = 0$ имеем $\lambda_0 = 1$ и $N_{7,3,0} = 2$ условий при $1 \leq \lambda \leq 2$, где $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 1$, $m - \sigma_\lambda = 5 + \lambda$, $S_{0,1}(t) = (t, -1)_0(t-1, -2)_1 = t-1$, $S_{0,2}(t) = (t-1, -2)_2 = (t-1)(t-3)$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(6)} \varphi_1(s) + \dots + p_6^{(6)} \varphi_6(s)) ds_x = \int_S \frac{(1-|x|^2)^6}{12!!} (\Lambda+13) f(x) dx, \quad (6.8)$$

$$\int_{\partial S} (p_1^{(5)} \varphi_3(s) + \dots + p_5^{(5)} \varphi_7(s)) ds_x = \int_S \frac{(1-|x|^2)^6}{12!!} (\Lambda+13)(\Lambda+11) f(x) dx. \quad (6.9)$$

При $l = 1$ имеем $\lambda_0 = 1$ и $N_{7,3,1} = 1$ условия при $1 \leq \lambda \leq 1$, где $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda$, $m - \sigma_\lambda = 6 + \lambda$, $S_{1,1}(t) = (t, -1)_1(t-2, -2)_1 = t(t-2)$

$$\int_{\partial S} H_1(x)(p_1^{(6)}\varphi_2(s) + \dots + p_6^{(6)}\varphi_7(s))ds_x = \int_S \frac{(1-|x|^2)^6}{12!!} H_1(x)(\Lambda+14)(\Lambda+12)f(x)dx. \quad (6.10)$$

При $l = 2$ получаем $\lambda_0 = 0$ и $N_{7,3,2} = 1$ условий при $0 \leq \lambda \leq 0$, где $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda + 1$, $m - \sigma_\lambda = 7 + \lambda$, $S_{2,0}(t) = (t, -1)_2(t-2, -2)_0 = t(t-1)$

$$\int_{\partial S} H_2(x)(p_1^{(7)}\varphi_1(s) + \dots + p_7^{(7)}\varphi_7(s))ds_x = \int_S \frac{(1-|x|^2)^6}{12!!} H_2(x)(\Lambda+14)(\Lambda+13)f(x)dx. \quad (6.11)$$

Итак, для разрешимости задачи (6.7) необходимо выполнение условий (6.8)–(6.11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nicolesco M.* Les fonctions polyharmoniques. Paris: Hermann ed., 1936.
2. *Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G.* Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. Lecture Notes in Mathematics 1991. Berlin: Springer, 2010.
3. *Бицадзе А.В.* О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. ур-ния. 1988. Т. 24. № 5. С. 825–831.
4. *Карачик В.В.* Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 11. С. 1455–1461.
5. *Turmetov B.Kh., Ashurov R.R.* On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball // Boundary Value Problems. 2013. № 162. P. 1–15.
6. *Карачик В.В.* Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сиб. матем. журнал. 1991. Т. 32. № 5. С. 51–58.
7. *Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимский матем. журнал. 2010. Т. 2. № 2. С. 41–52.
8. *Карачик В.В.* Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 8. С. 1038–1047.
9. *Карачик В.В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Матем. труды. 2016. Т. 19. № 2. С. 86–108.
10. *Карачик В.В.* Обобщенная третья краевая задача для бигармонического уравнения // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 6. С. 761–770.
11. *Karachik V.V.* On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball // J. of Applied and Industrial Math. 2014. V. 8. № 1. P. 63–75.
12. *Карачик В.В.* Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 5. С. 653–662.
13. *Кошанов Б.Д., Солдатов А.П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 12. С. 1666–1681.
14. *Карачик В.В.* Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1149–1170.
15. *Карачик В.В.* Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций // Сиб. электронные матем. известия. 2017. Т. 14. С. 533–551.
16. *Карачик В.В.* Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Матем. заметки. 2014. Т. 96. № 2. С. 228–238.
17. *Карачик В.В.* О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Матем. труды. 2013. Т. 16. № 2. С. 69–88.
18. *Karachik V.V.* On some special polynomials // Proc. of the American Math. Soc. 2004. Т. 132. № 4. P. 1049–1058.
19. *Карачик В.В.* Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1674–1694.