

УДК 517.91

РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УСЕЧЕННЫЕ РЯДЫ¹⁾

© 2020 г. С. А. Абрамов^{1,*}, А. А. Рябенко^{1,**}, Д. Е. Хмельнов^{1,***}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sergeyabramov@mail.ru

**e-mail: anna.ryabenko@gmail.com

***e-mail: dennis_khmelnov@mail.ru

Поступила в редакцию 20.08.2019 г.

Переработанный вариант 30.08.2019 г.

Принята к публикации 18.09.2019 г.

Рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с коэффициентами в виде усеченных формальных степенных рядов. Ранее обсуждался вопрос о том, что можно узнать из заданного таким образом уравнения о его решениях, принадлежащих полю формальных рядов Лорана. Теперь аналогичный вопрос обсуждается для регулярных решений. Нас по-прежнему интересует такая информация об этих решениях, которая инвариантна относительно возможных продолжений усеченных рядов, представляющих коэффициенты уравнения. Рассматривается также возможность включения в решения уравнения символьных незаданных коэффициентов возможных продолжений. Библ. 17.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, дифференциальные уравнения, степенные ряды, усеченные ряды, регулярные решения.

DOI: 10.31857/S0044466920010020

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье, как и в [1], линейное дифференциальное уравнение задается в “приближенном” виде: его коэффициентами являются усеченные ряды, т.е. каждый коэффициент представляет собой выражение

$$p(x) + O(x^{t+1}), \quad (1)$$

где $p(x)$ — полином, $t \geq \deg p(x)$. Нас интересует информация о регулярных (представимых степенно-логарифмическими разложениями; определение уточняется в разд. 3) решениях, инвариантная относительно всех возможных продолжений усеченных рядов, представляющих коэффициенты уравнения. Предлагаемый алгоритм позволяет построить максимально длинные отрезки рядов, появляющихся в решениях, — члены, входящие в эти отрезки, не зависят от возможных продолжений (“хвостов”) усеченных коэффициентов уравнения, т.е. от тех незаданных членов, которые скрыты в выражениях (1) за символами O . В некотором смысле алгоритм также позволяет прояснить влияние этих членов на последующие (не являющиеся уже инвариантными относительно всех возможных продолжений) члены рядов, входящих в регулярные решения. Имеются в виду формулы для выражения этих членов через незаданные коэффициенты. Для незаданных коэффициентов используются символьные обозначения. Эти незаданные коэффициенты мы будем называть *литералами*.

Касаясь предшествующих исследований, надо сказать, что в работах Брюно (см., например, [2]) предложен метод построения регулярных решений, который для всех рядов, входящих в такого рода решения данного уравнения, позволяет, в частности, найти любое наперед заданное число членов. Уравнения, вообще говоря, — нелинейные. Они могут иметь весьма общий вид и задаются с помощью явно указанных аналитических функций нескольких переменных. При этом хорошо известно, что линейные (полностью заданные) уравнения решаются с помощью

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00032).

классических подходов — методов Фробениуса [3], [4, гл. 4, § 8] и Хеффтера [5], а также их современных вариантов [6]–[8], для большей части которых имеется компьютерная реализация.

Остается лишь повторить, что, в отличие от предшествующих работ, в нашей статье линейные дифференциальные уравнения считаются заданными не целиком, а в “приближенном”, т.е. усеченном виде. При этом для рядов Лорана, входящих в запись регулярных решений, предлагаемый алгоритм находит максимально возможное число членов, инвариантных относительно неизвестных нам членов рядов-коэффициентов уравнения.

Реализация предлагаемого алгоритма в среде Maple (см. [9]) описана в разд. 6.

Нелишне будет пояснить, что в настоящее время термин “регулярные решения” для решений, которые рассматриваются в этой статье, и точное определение которых дается, как мы говорили, в разд. 3, укрепился в компьютерной алгебре (см. [9]–[11]). Его изначальное появление обусловлено тем, что в аналитической теории линейных дифференциальных уравнений принято подразделять (см. [12, гл. 3, § 10]) особые точки уравнений на регулярные (или слабо особые) и нерегулярные (или сильно особые). В окрестности регулярной особой точки существует базис пространства решений уравнения, состоящий из регулярных (в обсуждаемом смысле) решений, и именно это послужило поводом для введения понятия регулярного решения. Уточним, что в этой статье мы рассматриваем решения как формальные выражения. Ряды, которые входят в эти выражения, в свою очередь, являются формальными лорановыми рядами по x . В этом смысле мы рассматриваем решения в точке 0 и разыскиваем максимально возможное число линейно-независимых регулярных решений. Это число не превосходит порядка уравнения и может быть меньше его. Вопросами сходимости мы не занимаемся. В роли констант выступают абстрактные величины — элементы некоторого алгебраически замкнутого поля характеристики 0, о чем и пойдет речь в следующем разделе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Начальные понятия

Сначала напомним несколько понятий и стандартных обозначений. Пусть K — некоторое поле. Следующие обозначения являются стандартными:

$K[x]$ — кольцо полиномов с коэффициентами из K ;

$K[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из K ;

$K((x))$ — поле частных кольца $K[[x]]$.

В $K[x]$, $K[[x]]$, $K((x))$ определено дифференцирование $D = \frac{d}{dx}$. Мы будем рассматривать операторы и дифференциальные уравнения, записанные с использованием обозначения $\theta = x \frac{d}{dx}$.

Определение 1. Элементы поля $K((x))$ — формальные лорановы ряды. Для ненулевого элемента $a(x) = \sum a_i x^i \in K((x))$ его *валуация* $\text{val} a(x)$ определяется как $\min\{i \mid a_i \neq 0\}$, при этом $\text{val } 0 = \infty$. Пусть $t \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, t -усечение $a^{(t)}(x)$ получается отбрасыванием всех членов $a(x)$ степени больше, чем t ; если $t = -\infty$, то $a^{(t)}(x) = 0$. Число t называется *степенью усечения*.

Далее поле K без оговорок будет предполагаться алгебраически замкнутым, имеющим характеристику 0.

В исходном операторе

$$L = \sum_{i=0}^r a_i(x) \theta^i \in K[x][\theta] \quad (2)$$

полиномиальный коэффициент $a_i(x)$ ниже будет предполагаться имеющим вид

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{t_i} a_{ij} x^j, \quad (3)$$

где t_i — неотрицательное целое, большее или равное $\deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, r$ (если $t_i > d_i = \deg a_i(x)$, то $a_{ij} = 0$ для $j = d_i + 1, d_i + 2, \dots, t_i$). Предполагается при этом, что свободный член по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), \dots, a_r(x)$ отличен от нуля.

Определение 2. Полином $a_r(x)$ (старший коэффициент дифференциального оператора L из (2)) предполагается ненулевым. *Продолжением* оператора L будем называть любой оператор

$$\tilde{L} = \sum_{i=0}^r \tilde{a}_i(x) \theta^i \in K[[x]][\theta],$$

для которого $\tilde{a}_i(x) - a_i(x) = O(x^{t_i+1})$, т.е. $\text{val}(\tilde{a}_i(x) - a_i(x)) > t_i$, $i = 0, 1, \dots, r$.

Далее усеченному дифференциальному уравнению

$$(a_r(x) + O(x^{t_r+1}))\theta^r y(x) + \dots + (a_1(x) + O(x^{t_1+1}))\theta y(x) + (a_0(x) + O(x^{t_0+1}))y(x) = 0, \quad (4)$$

$t_i \geq \deg a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, r$, мы сопоставляем оператор (2), а также набор чисел $t_0, t_1, \dots, t_r$. Продолжение оператора (2) будет в этом случае называться также *продолжением уравнения* (4).

Ниже для обозначения оператора с коэффициентами-рядами

$$\sum_{i=0}^r a_i(x) \theta^i \in K[[x]][\theta], \quad (5)$$

где

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} x^j \in K[[x]],$$

мы используем букву $\mathcal{L}$. Для $\mathcal{L}$ также предполагаем, что существует i такое, что $a_{i,0} \neq 0$. Для обозначения оператора с полиномиальными коэффициентами (например, для оператора с усеченными коэффициентами) используем букву L .

Если L (или $\mathcal{L}$) — некоторый дифференциальный оператор, то под *решениями оператора L* (или $\mathcal{L}$) мы понимаем решения уравнения $L(y) = 0$ (соответственно $\mathcal{L}(y) = 0$).

В случае, когда L — усеченный вариант оператора $\mathcal{L}$, будем называть L и $L(y) = 0$ *усечениями* оператора $\mathcal{L}$ и соответственно уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$.

2.2. Лорановы решения

Решение уравнения, имеющее вид лоранова ряда, будем называть *лорановым решением*.

Прежде всего, для усеченного уравнения $L(y) = 0$ алгоритм из [1] находит конечное множество кандидатов для всех возможных валюаций лорановых решений. Это множество содержит все валюации лорановых решений при всех продолжениях данного уравнения. Для каждого из элементов этого множества затем проверяется: верно ли, что для любого продолжения уравнения найдется лораново решение, имеющее такую валюацию? При ответе ‘нет’ эта валюация далее не рассматривается. При ответе ‘да’ можно вычислить такое целое m , что члены всех лорановых решений, имеющих эту валюацию, совпадают (с точностью до общего ненулевого постоянного множителя, так как уравнения — однородные) вплоть до членов порядка x^m . При этом выбирается наибольшее из возможных значений m . В итоге мы получаем наряду с множеством валюаций $\{v_1, v_2, \dots\}$ еще и множество $\{m_1, m_2, \dots\}$ соответствующих им значений m .

Упомянутые действия — отбрасывание лишних валюаций, нахождение значений m и т.д. выполняются с привлечением *индуцированного рекуррентного уравнения*, сопоставляемого дифференциальному уравнению.

2.3. Индуцированное рекуррентное уравнение

Пусть σ обозначает оператор сдвига: $\sigma c_n = c_{n+1}$ для любой последовательности (c_n) . Преобразование

$$x \rightarrow \sigma^{-1}, \quad \theta \rightarrow n \quad (6)$$

переводит дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^r a_i(x) \theta^i y(x) = 0, \quad (7)$$

где $a_i(x) \in K[[x]]$, в индуцированное рекуррентное уравнение (соотношение)

$$u_0(n)c_n + u_{-1}(n)c_{n-1} + \dots = 0. \quad (8)$$

Пусть $\mathcal{L} \in K[[x]][[\theta]]$, $g(x) \in K((x))$, тогда $\mathcal{L}(g(x)) = b(x) \in K((x))$. В этом случае применение индуцированного рекуррентного оператора $u_0(n) + u_{-1}(n)\sigma^{-1} + \dots$ к последовательности (g_n) коэффициентов ряда $g(x)$ дает последовательность (b_n) коэффициентов ряда $b(x)$: формулы (6) явно указывают, как преобразуется последовательность коэффициентов ряда, когда ряд умножается на x и когда к нему применяется операция θ . Все это делает индуцированные уравнения полезным инструментом при рассмотрении неоднородных уравнений вида $\mathcal{L}(y) = b(x)$ с лорановыми частями.

Пусть уравнение

$$\sum_{i=0}^r a_i(x) \theta^i y(x) = b(x) \quad (9)$$

имеет правую часть в виде ряда Лорана:

$$b(x) = \sum_{n=v}^{\infty} b_n x^n.$$

Тогда правая часть индуцированного рекуррентного уравнения будет равна b_n ($b_n = 0$ для $n < v$):

$$u_0(n)c_n + u_{-1}(n)c_{n-1} + \dots = b_n. \quad (10)$$

Однородное уравнение (7) (и неоднородное (9)) имеет лораново решение $y(x) = c_v x^v + c_{v+1} x^{v+1} + \dots$ если и только если двусторонняя последовательность $\dots, 0, 0, c_v, c_{v+1}, \dots$ удовлетворяет уравнению (8) (соответственно уравнению (10)) (доказательство см. в [13]).

Напомним, что по нашему предположению свободный член по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), \dots, a_r(x)$ не равен нулю. Отсюда

$$u_0(n) = \sum_{i=0}^r a_{i,0} n^i \quad (11)$$

есть ненулевой полином. Он может быть рассмотрен как некоторый вариант *определяющего полинома* исходного уравнения. Конечное множество $n_1, \dots, n_l$ целых корней этого полинома содержит все возможные валуации v лорановых решений уравнения (7). Валуации лорановых решений (9) определяются как $n_1, \dots, n_l$, так и валуацией v правой части $b(x)$.

Вычисление $c_v, c_{v+1}, \dots$ выполняется, последовательно увеличивая значение n , начиная с $n = v$ — минимального целого корня полинома $u_0(n)$ (начиная с $v = \min\{v, n_1, \dots, n_l\}$ для (9)). Если для некоторого целого n выполнено $u_0(n) \neq 0$, то (8), (10) позволяет найти c_n по $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots$ (поскольку $c_{v-1}, c_{v-2}, \dots$ равны нулю, для каждого целого n индуцированное рекуррентное уравнение имеет конечное число ненулевых слагаемых в левой части). Если же $u_0(n) = 0$, то мы объявляем c_n *неизвестной постоянной*. При этом ранее вычисленные значения $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_v$ должны в однородном случае удовлетворять соотношению

$$u_{-1}(n)c_{n-1} + u_{-2}(n)c_{n-2} + \dots + u_{-n+v}(n)c_v = 0 \quad (12)$$

и в неоднородном — соотношению

$$u_{-1}(n)c_{n-1} + u_{-2}(n)c_{n-2} + \dots + u_{-n+v}(n)c_v = b_n. \quad (13)$$

Такого рода соотношения позволят, возможно, вычислить значение некоторых введенных ранее неизвестных постоянных. Если соотношение (13) при некотором целом n обращается в неверное тождество, то (9) не имеет лорановых решений. После того, как значение n превзойдет наиболь-

ший целый корень $u_0(n)$, новые неизвестные постоянные и соотношения вида (12), (13) возникать не будут. Неизвестные постоянные, не получившие значений в ходе вычислений, объявляем *произвольными постоянными*, входящими в лораново решение дифференциального уравнения.

Если задано усеченное уравнение $L(y) = 0$ с условием, что свободный член по крайней мере одного из полиномов $a_0(x), \dots, a_r(x)$ не равен нулю, то (11), очевидно, не зависит от продолжения.

3. РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

3.1. Степенные множители

Определение 3. Решение уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, имеющее вид

$$x^\lambda \sum_{s=0}^k g_{k-s}(x) \frac{\ln^s x}{s!}, \quad (14)$$

где $\lambda \in K$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $g_s(x) \in K((x))$, $s = 0, 1, \dots, k$, будем называть *регулярным решением*. Мы говорим, что x^λ — *степенной множитель* решения (14). Набор

$$x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_p} \quad (15)$$

называется *полным набором степенных множителей регулярных решений уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$* , если

- среди $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ нет различающихся на целое число,
- каждый элемент набора (15) является степенным множителем для некоторого ненулевого регулярного решения уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$,
- для каждого ненулевого регулярного решения уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ среди (15) найдется степенной множитель для этого решения.

Пусть $\mathcal{L}$ имеет вид (5). Известно (см. [3], [4]), что если $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — множество всех таких корней определяющего полинома (11), что $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ для $i \neq j$, то (15) будет полным набором степенных множителей регулярных решений $\mathcal{L}(y) = 0$. Более того, для каждого степенного множителя x^λ значение k в (14) такого, что $g_0(x) \neq 0$, меньше количества (с учетом кратности) корней определяющего полинома, отличающихся от λ на целое число.

Замечание 1. Для уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ существует столько линейно независимых решений вида (14), сколько корней λ (с учетом кратности) имеет его определяющий полином. Эти решения образуют базис линейного пространства регулярных решений, т.е. любая линейная комбинация решений вида (14) называется регулярным решением, но вплоть до разд. 6 мы будем называть регулярными решениями выражения вида (14).

Пример 1. Регулярные решения уравнения

$$\begin{aligned} & \left(-1 + x + \sum_{j=3}^{\infty} x^j \right) \theta^2 y(x) + \left(-1 - x - \frac{3}{2}x^2 + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2} x^j \right) \theta y(x) + \\ & + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^2 + \sum_{j=3}^{\infty} jx^j \right) y(x) = 0 \end{aligned}$$

имеют вид: $y(x) = \sqrt{x}(g_0(x) \ln x + g_1(x))$, при этом

$$\begin{aligned} g_0(x) &= C_1 + \frac{C_1}{5}x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} g_{0,n}x^n, \\ g_1(x) &= -\frac{2C_1}{x^2} + \frac{8C_1}{x} + C_2 + \sum_{n=2}^{\infty} g_{1,n}x^n, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Замечание 2. В [15]–[17] рассматривалось алгоритмическое представление бесконечных рядов: ряд $\sum a_n x^n$ задавался алгоритмом, определяющим a_n по n . Было обнаружено, что в случае дифференциального уравнения с коэффициентами-рядами, заданными алгоритмически, разрешимой оказывается, в частности, задача нахождения регулярных решений, т.е. задача построения алгоритмов для представления $g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x)$ (см. также [14], где обсуждались не только отдельные скалярные уравнения, но и системы). Поскольку коэффициенты уравнения из примера 1 заданы алгоритмически, то $g_{0,n}, g_{1,n}$ можно вычислить для любого n .

Исходя из усеченного уравнения $L(y) = 0$ мы не можем рассчитывать на получение его регулярных решений в завершеном (полном) виде (14). Предлагаемый в настоящей статье алгоритм позволяет получить для решений выражения с усеченными лорановыми рядами $g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x)$. В основе построения этих усеченных рядов лежит тот же принцип отбора валлюаций и степеней усечения, что и при построении лорановых решений (разд. 2).

3.2. Общая схема поиска регулярных решений (подход Хеффтера)

Пусть $\mathcal{L}$ имеет вид (5). Для $k = 0, 1, \dots, r$ можно построить операторы

$$\mathcal{L}_k = \sum_{i=k}^r a_i(x) \binom{i}{k} \theta^{i-k}, \quad (16)$$

где $\binom{i}{k}$ – биномиальный коэффициент, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. Основанная на подходе Хеффтера (см. [5]) общая схема поиска регулярных решений с $\lambda = 0$, состоит в рассмотрении для $k = 0, 1, \dots$ систем вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(g_0) &= 0, \\ \mathcal{L}_0(g_1) &= -\mathcal{L}_1(g_0), \\ \mathcal{L}_0(g_2) &= -(\mathcal{L}_1(g_1) + \mathcal{L}_2(g_0)), \\ &\dots \\ \mathcal{L}_0(g_k) &= -(\mathcal{L}_1(g_{k-1}) + \dots + \mathcal{L}_k(g_0)) \end{aligned} \quad (17)$$

(при $k = 0$ система состоит из одного уравнения $\mathcal{L}(g_0) = 0$). Лорановым решением системы (17) будем называть каждое такое решение $(g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x))$, компоненты которого принадлежат $K((x))$.

Предложение 1 (см. [5]). *Множество целых неотрицательных k , для которых система (17) имеет лораново решение $(g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x))$, $g_0(x) \neq 0$, конечно (такого рода решение может существовать при некотором $k > 0$, если только решение существует и при $k - 1$). Если это множество пусто, то $\mathcal{L}(y) = 0$ не имеет ненулевых решений в $K((x))[\ln x]$. Если же это множество не пусто и $\tilde{k}$ – его максимальный элемент, то любое принадлежащее $K((x))[\ln x]$ решение уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ имеет вид*

$$\sum_{s=0}^{\tilde{k}} g_{\tilde{k}-s}(x) \frac{\ln^s x}{s!}, \quad (18)$$

где

$$(g_0(x), g_1(x), \dots, g_{\tilde{k}}(x)), g_0(x) \neq 0, \quad (19)$$

является лорановым решением системы (17) при $k = \tilde{k}$. В то же время любое лораново решение вида (19) системы (17) при $k = \tilde{k}$ порождает решение (18) уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$.

Если значение λ известно, то подстановка

$$y(x) = x^\lambda w(x), \quad (20)$$

сводит поиск регулярных решений к поиску решений, принадлежащих $K((x))[\ln x]$. На роль λ берутся корни определяющего полинома.

Получаем следующую схему (рассмотренную подробно в [14]):

1. Для уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$ с оператором (5) найти определяющий полином (11). Считая два корня $\lambda, \lambda' \in K$ этого полинома эквивалентными при $\lambda - \lambda' \in \mathbb{Z}$, построить множество Λ , содержащее по одному представителю от каждого класса эквивалентности.

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$, найти регулярные решения, имеющие степенной множитель x^λ .

(а) Построить уравнение $\mathcal{L}_\lambda(y) = 0$ с помощью подстановки (20) в $\mathcal{L}(y) = 0$ и последующего умножения на $x^{-\lambda}$.

(б) Построить лорановы решения систем (17) при $k = 0, 1, \dots$, где $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_{\lambda, k}$ получены по формуле (16), до $k = \tilde{k} + 1$, когда (17) уже не имеет таких лорановых решений, что $g_0(x) \neq 0$. Это дает $\tilde{k} + 1$ регулярных решений $y(x)$ в виде (18) для уравнения $\mathcal{L}_\lambda(y) = 0$.

(в) Домножить полученные регулярные решения на x^λ .

Замечание 3. На шаге 2 вместо подстановки в дифференциальное уравнение может быть выполнена эквивалентная ей операция над индуцированным рекуррентным уравнением. Если (8) — индуцированное рекуррентное уравнение для исходного уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, то индуцированное рекуррентное уравнение для $\mathcal{L}_\lambda(y) = 0$ имеет вид

$$u_0(n + \lambda)c_n + u_{-1}(n + \lambda)c_{n-1} + \dots = 0.$$

Подробности см., например, в [14].

3.3. Работа с неоднородными уравнениями

Для уравнения

$$L_0(g_k) = -\sum_{j=1}^k L_j(g_{k-j}), \quad k = 0, 1, \dots, r,$$

введем обозначение S_k (уравнение $L_0(g_0) = 0$ обозначается посредством S_0).

Пусть построено лораново решение $g_0(x)$ уравнения S_0 , т.е. уравнения $L_0(g_0) = 0$ (см. п. 2.3). Это решение содержит несколько неизвестных постоянных. Мы используем $g_0(x)$ для получения правой части уравнения S_1 , т.е. уравнения $L_0(g_1) = -L_1(g_0)$, и упомянутые неизвестные постоянные входят в эту правую часть линейно. Как только при построении $g_1(x)$ возникает соотношение (13) (его правая часть b_n линейно зависит от постоянных, входящих в $g_0(x)$), это соотношение используется, если это возможно, для вычисления значения некоторой неизвестной постоянной. Если оказывается, что $g_0(x) = 0$, то это означает, что $\tilde{k} = 0$, построение регулярных решений завершается.

Продолжаем для очередного уравнения S_k строить $g_k(x)$, вычисляя значения неизвестных постоянных, входящих в $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_{k-1}(x)$, до тех пор, пока $g_0(x) \neq 0$. Согласно предложению 1, этот процесс заканчивается. Неизвестные постоянные из $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_{\tilde{k}}(x)$, не получившие значений, объявляем произвольными постоянными.

Замечание 4. Для лоранова решения его m -усечение строится с помощью индуцированного рекуррентного уравнения для значений n , не превосходящих m . При построении m -усечения лоранова решения $g_k(x)$ уравнения S_k необходимо знать элементы последовательности (b_n) — правой части индуцированного рекуррентного уравнения (10) — до $n = m$. Нетрудно показать, что для этого достаточно построить m -усечения $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_{k-1}(x)$.

4. СХЕМА ХЕФФТЕРА ДЛЯ УСЕЧЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

4.1. Построение лорановых решений усеченного уравнения

Алгоритм из [1] строит для уравнения (4) конечный набор m_i -усечений лорановых решений. Любой элемент $c_{v_i}x^{v_i} + c_{v_i+1}x^{v_i+1} + \dots + c_{m_i}x^{m_i} + O(x^{m_i+1})$ этого набора не содержит литералов, т.е. не заданных коэффициентов уравнения (4). Каждый коэффициент c_n вычислялся, как описано в

п. 2.3, последовательно по n , начиная с n_j , где n_j — целый корень определяющего полинома, до такого значения $n = m_i$, что значение c_{m_i} не зависит от литералов, а c_{m_i+1} — зависит. При поиске регулярных решений, лорановы решения однородного уравнения S_0 (и неоднородного S_k , $k > 0$) предпочтительно построить в виде одного выражения:

$$c_v x^v + c_{v+1} x^{v+1} + \dots + c_m x^m + O(x^{m+1}), \quad (21)$$

где $v = \min v_i$, $m = \max m_i$. Здесь коэффициенты c_n могут содержать литералы.

Представление в виде одного усечения с привлечением литералов позволяет, если нужно, перейти к представлению решения в виде набора усечений такого, как в [1]. Для того, чтобы получить такое представление решения, необходимо для каждой валуации v_i вычислить значения произвольных постоянных, при которых равны нулю $c_v, c_{v+1}, \dots, c_{v_i-1}$, после подстановки этих значений в (21) отбросить все члены, коэффициенты которых содержат литералы. Это и даст m_i -усечение для валуации v_i , инвариантное относительно продолжения исходного уравнения.

Построение выражения (21) выполняется, как описано в п. 2.3, последовательно по n , начиная с $v = \min n_j$ до $w = \max n_j$, где в роли n_j выступают все целые корни определяющего полинома (для $k > 0$ нетрудно показать, что $\text{val} b(x) \geq v$, где $b(x)$ — правая часть неоднородного уравнения S_k). В ходе вычислений, при $n = n_j$ таком, что $u_0(n_j) = 0$, возникает необходимость рассмотреть соотношение (12) (соответственно (13) для $k > 0$). Если это соотношение при $n = n_j$ не является тождеством, то в отличие от случая полностью заданного уравнения, если (12), (13) зависит от литералов, мы его не используем для вычисления значений неизвестных постоянных. В конце получаем значения $c_v, c_{v+1}, \dots, c_w$, набор неизвестных постоянных и набор соотношений для неизвестных постоянных, содержащих литералы. Исходя из этого набора соотношений, мы находим значения неизвестных постоянных, инвариантные относительно всех продолжений заданного усеченного уравнения (например, как описано в замечании 5).

Далее вычисляем значения c_n , пока существует такой нетривиальный набор значений оставшихся неизвестных постоянных (т.е. не все постоянные равны нулю; можно ограничиться рассмотрением таких наборов, в каждом из которых один какой-то элемент равен единице, а остальные — нулю), при которых c_n не зависит от литералов.

Замечание 5. Рассмотрим набор соотношений (12) и (13), возникающих при построении лорановых решений однородного и неоднородных уравнений в схеме Хейфтера для усеченного уравнения. Левая и правая части такого соотношения являются полиномами от литералов, коэффициенты которых — линейные комбинации над K неизвестных постоянных, введенных при решении уравнений $S_0, S_1, \dots, S_k$. Приравняем коэффициенты в правой и левой части при одинаковых мономах. Получаем линейную однородную систему относительно неизвестных постоянных. При решении этой системы часть неизвестных постоянных получит значения, часть — останется неизвестными.

Пример 2. Проследим работу предложенного алгоритма на примере оператора

$$L = (-1 + x + x^2)\theta^2 - 2\theta + (x + 6x^2), \quad t_0 = 3, \quad t_1 = t_2 = 2. \quad (22)$$

Этот оператор был рассмотрен в [1, пример 2]. Здесь определяющий полином — это $u_0(n) = -n^2 - 2n$, множество $\{-2, 0\}$ его целых корней содержит все возможные валуации лорановых решений уравнения $L(y) = 0$. Вычисления с помощью индуцированного рекуррентного уравнения начинаем с минимального целого корня определяющего полинома, т.е. с $n = -2$. В конце вычислений получаем 4-усечение лоранова решения, записанное с помощью литералов

$$\begin{aligned} & \frac{C_1}{x^2} - \frac{5C_1}{x} + C_2 + x \left(\frac{4}{3} C_1 U_{2,3} + \frac{1}{3} C_2 - \frac{35}{3} C_1 - \frac{2}{3} C_1 U_{1,3} \right) + x^2 \left(\frac{11}{24} C_1 U_{1,3} - \frac{7}{24} C_1 U_{2,3} + \frac{5}{6} C_2 - \right. \\ & \left. - \frac{35}{12} C_1 + \frac{1}{8} C_1 U_{0,4} - \frac{1}{4} C_1 U_{1,4} + \frac{1}{2} C_1 U_{2,4} \right) + x^3 \left(-\frac{77}{12} C_1 - \frac{19}{120} C_1 U_{1,3} + \frac{21}{40} C_1 U_{2,3} + \frac{13}{30} C_2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{15} C_1 U_{0,5} - \frac{7}{24} C_1 U_{0,4} + \frac{1}{4} C_1 U_{1,4} - \frac{1}{6} C_1 U_{2,4} - \frac{2}{15} C_1 U_{1,5} + \frac{4}{15} C_1 U_{2,5} \right) + \\ & + x^4 \left(\frac{1}{18} C_1 U_{2,3}^2 - \frac{35}{9} C_1 - \frac{13}{36} C_1 U_{1,3} - \frac{7}{18} C_1 U_{2,3} + \frac{19}{36} C_2 - \frac{13}{72} C_1 U_{0,5} - \frac{5}{72} C_1 U_{0,4} + \right. \end{aligned} \quad (23)$$

$$+ \frac{5}{36} C_1 U_{2,4} + \frac{11}{72} C_1 U_{1,5} - \frac{7}{72} C_1 U_{2,5} + \frac{1}{36} U_{1,3} C_1 U_{2,3} + \frac{1}{72} C_2 U_{1,3} - \frac{1}{36} C_1 U_{1,3}^2 - \frac{1}{12} C_1 U_{1,6} + \\ + \frac{1}{72} C_2 U_{2,3} + \frac{1}{24} C_2 U_{0,4} + \frac{1}{24} C_1 U_{0,6} + \frac{1}{6} C_1 U_{2,6} \Big) + O(x^5).$$

Здесь и далее обозначенный посредством $U_{i,j}$ литерал соответствует незаданному коэффициенту при x^j в коэффициенте исходного уравнения при θ^i . C_1, C_2 — произвольные постоянные. Вычисления выполнены до степени 4. Интересующее нас множество решений можно описать короче, отбросив в (23) член степени 4 и заменив $O(x^5)$ на $O(x^4)$. Мы выписали этот член, чтобы была видна причина остановки вычислений.

От (23) переходим к представлению в виде набора инвариантных усечений для каждой из валютаций. Для валютации $v_1 = -2$ (т.е. при $C_1 \neq 0$ и $C_2 = 0$) отбрасывание членов, начиная с первого, коэффициент которого содержит литералы, дает $m_1 = 0$:

$$\frac{C_1}{x^2} - \frac{5C_1}{x} + C_2 + O(x).$$

Для валютации $v_2 = 0$ (т.е. при $C_1 = 0$ и $C_2 \neq 0$) такое отбрасывание дает $m_2 = 3$:

$$C_2 + \frac{1}{3} C_2 x + \frac{5}{6} C_2 x^2 + \frac{13}{30} C_2 x^3 + O(x^4).$$

Эти инвариантные усечения были получены и в [1, пример 2]. Представление (23) позволяет также получить продолжение усечения для каждой отдельной валютации. Для валютации $v_1 = -2$ оно совпадает с (23). Для $v_2 = 0$ оно равно

$$C_2 + \frac{1}{3} C_2 x + \frac{5}{6} C_2 x^2 + \frac{13}{30} C_2 x^3 + x^4 \left(\frac{19}{36} C_2 + \frac{1}{72} C_2 U_{1,3} + \frac{1}{72} C_2 U_{2,3} + \frac{1}{24} C_2 U_{0,4} \right) + O(x^5).$$

4.2. Алгоритм

Для уравнения $L(y) = 0$ с коэффициентами (3) строится определяющий полином как коэффициент $u_0(n)$ индуцированного рекуррентного уравнения. Находится множество его корней и формируется множество Λ . Эти вычисления соответствуют шагу 1 схемы Хеффтера (п. 3.2).

Для каждого нецелого $\lambda \in \Lambda$, выполняем шаг 2(а), т.е. получаем уравнение L_λ . На шаге 2(б) решение системы (17) при очередном значении k состоит в поиске усечения лоранова решения уравнения S_k (при этом, возможно, также вычисляются значения некоторых неизвестных постоянных, вошедших в $g_0(x), g_1(x), \dots, g_{k-1}(x)$). Это усечение содержит литералы, степень усечения определяется, как описано в п. 4.1. Усечение лоранового решения S_k выстраивается последовательно с помощью индуцированного рекуррентного уравнения (8) (или (10) для $k > 0$). При $k > 0$ для получения правой части индуцированного рекуррентного уравнения требуется последовательное вычисление коэффициентов ряда Лорана в правой части уравнения S_k . Поиск лорановых решений завершается либо в том случае, если k равно количеству (с учетом кратности) целых корней определяющего полинома для S_0 , либо, когда обнаруживается, что очередная система не имеет лоранова решения с $g_0(x) \neq 0$. На основе полученных усечений лорановых решений с литералами формируется итоговый набор инвариантных усечений регулярных решений исходного уравнения.

Предложение 2. Каждый из тех отрезков рядов, которые находит предложенный алгоритм в качестве усечения того или иного ряда $g_i(x)$ в решении (14) исходного усеченного уравнения $L(y) = 0$, имеет максимально возможную длину: добавление членов большей степени к любому из этих отрезков влечет потерю инвариантности относительно возможных продолжений уравнения $L(y) = 0$.

Доказательство. Каждый из этих отрезков рядов выстраивается так, что остановка происходит в момент, когда следующий член $w_s x^s$ ряда имеет коэффициент w_s , зависящий от каких-то литералов. Такой коэффициент будет полиномом над K от конечного числа литералов. Так как характеристика поля K равна нулю, то само поле K бесконечно (оно содержит подполе, изоморфное полю рациональных чисел), и для упомянутого полинома можно найти два разных набора

значений входящих в него литералов, таких, что значения полинома w_s на этих наборах не совпадают. Это означает, что уравнение $L(y) = 0$ имеет два продолжения, которые приводят к разным w_s . В самом деле, в качестве первого продолжения берем такое, где литералы, попавшие в w_s , заменяются значениями из первого набора, а остальные члены продолжения полагаются равными нулю. Аналогичным образом, но с использованием значений из второго набора, строим второе продолжение. Следовательно, отрезок ряда, входящий в решение и содержащий член $w_s x^s$, не является инвариантным относительно всех возможных продолжений уравнения $L(y) = 0$.

5. ПРИМЕРЫ

Пример 3. Проследим шаги предложенного алгоритма на примере оператора

$$L = (-1 + x + x^2)\theta^2 - 2\theta, \quad t_0 = 3, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2. \quad (24)$$

Определяющий полином — $u_0(n) = -n^2 - 2n$. Исходя из множества его корней $\{-2, 0\}$, получаем $\Lambda = \{0\}$. Поиск лоранова решения для S_0 , как описано в п. 4.1, дает

$$g_0(x) = C_{0,1} + \frac{1}{24}x^4C_{0,1}U_{0,4} + O(x^5), \quad (25)$$

где $C_{0,1}$ — неизвестная постоянная. Далее, для S_1 получаем 4-усечение правой части уравнения:

$$2C_{0,1} + \frac{5}{12}x^4C_{0,1}U_{0,4} + O(x^5).$$

Индуктированное рекуррентное уравнение (10) при $n = 0$ здесь имеет вид

$$-2C_{1,1}U_{1,2} = 2C_{0,1},$$

где $C_{1,1}$ — неизвестная постоянная, возникшая при $n = -2$ и соответствующая коэффициенту c_{-2} решения. Это соотношение — вида (13), которое мы не можем использовать для вычисления значений неизвестных постоянных $C_{1,1}$, $C_{0,1}$, поскольку в это соотношение входит литерал $U_{1,2}$. Для тех продолжений оператора (24), для которых $U_{1,2} = 0$, получим, что $C_{0,1} = 0$, $C_{1,1}$ остается неизвестной постоянной. При этом $g_0(x) = 0$, т.е. $\tilde{k} = 0$. Для продолжений с $U_{1,2} \neq 0$, вычисления будут продолжены и получено $\tilde{k} = 1$. Полагаем $C_{1,1} = 0$, $C_{0,1} = 0$. Таким образом, получаем $\tilde{k} = 0$ и усеченное регулярное решение (25). Перейдем от него к набору инвариантных усечений:

$$C + O(x^4),$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 4. Добавим к коэффициентам оператора (24) одно слагаемое (x^2 в коэффициенте при θ^1):

$$\tilde{L} = (-1 + x + x^2)\theta^2 + (-2 + x^2)\theta, \quad t_0 = 3, \quad t_1 = t_2 = 2. \quad (26)$$

Этот оператор был рассмотрен в [1, пример 3], и было определено, что при любом продолжении коэффициентов у этого оператора, как и у оператора (24), имеется лораново решение $C + O(x^4)$, где C — произвольная постоянная.

Определяющий полином, также как и для оператора (24), $u_0(n) = -n^2 - 2n$ имеет корни $\{-2, 0\}$, и, следовательно, $\Lambda = \{0\}$.

Для S_0 получаем такое же усечение решения (25). Поиск лоранова решения для S_1 дает

$$g_1(x) = -\frac{C_{0,1}}{x^2} + 4\frac{C_{0,1}}{x} + C_{1,1} + x\left(\frac{2}{3}C_{0,1}U_{1,3} - \frac{4}{3}C_{0,1}U_{2,3}\right) + x^2\left(-\frac{5}{12}C_{0,1}U_{1,3} + \frac{1}{3}C_{0,1}U_{2,3} - \frac{1}{8}C_{0,1}U_{0,4} + \frac{1}{4}C_{0,1}U_{1,4} - \frac{1}{2}C_{0,1}U_{2,4} + \frac{1}{8}C_{0,1}\right) + x^3\left(\frac{2}{45}C_{0,1}U_{1,3} - \frac{4}{45}C_{0,1}U_{2,3} + \frac{7}{30}C_{0,1}U_{0,4} - \frac{1}{5}C_{0,1}U_{1,4} + \frac{2}{15}C_{0,1}U_{2,4} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{30}C_{0,1} - \frac{1}{15}C_{0,1}U_{0,5} + \frac{2}{15}C_{0,1}U_{1,5} - \frac{4}{15}C_{0,1}U_{2,5} \Big) + x^4 \Big(-\frac{7}{80}C_{0,1}U_{1,3} + \frac{1}{20}C_{0,1}U_{2,3} + \frac{7}{180}C_{0,1}U_{0,4} + \\
& + \frac{7}{240}C_{0,1}U_{1,4} - \frac{3}{40}C_{0,1}U_{2,4} + \frac{7}{160}C_{0,1} + \frac{17}{120}C_{0,1}U_{0,5} - \frac{7}{60}C_{0,1}U_{1,5} + \frac{1}{15}C_{0,1}U_{2,5} + \frac{1}{36}C_{0,1}U_{1,3}^2 - \\
& - \frac{1}{36}C_{0,1}U_{1,3}U_{2,3} - \frac{1}{18}C_{0,1}U_{2,3}^2 + \frac{1}{24}C_{1,1}U_{0,4} - \frac{1}{24}C_{0,1}U_{0,6} + \frac{1}{12}C_{0,1}U_{1,6} - \frac{1}{6}C_{0,1}U_{2,6} \Big) + O(x^5).
\end{aligned} \quad (27)$$

Усечение $g_1(x)$, как и усечение $g_0(x)$, вычислялось до степени x^4 , так как для $C_{0,1} = 0$ и $C_{1,1} \neq 0$ только при x^4 вычисленный коэффициент содержит литералы. Для вычисления $g_1(x)$ было построено 4-усечение правой части уравнения S_1 :

$$2C_{0,1} - x^2C_{0,1} - x^3C_{0,1}U_{1,3} + x^4 \left(\frac{5}{12}C_{0,1}U_{0,4} - C_{0,1}U_{1,4} \right) + O(x^5).$$

Далее поиск лоранова решения уравнения для S_2 не выполняется. Получаем $\tilde{k} = 1$ и регулярное решение $g_1(x) + g_0(x) \ln x$, где $g_0(x)$, $g_1(x)$ определены (25) и (27).

Перейдем к решению в виде набора инвариантных усеченных регулярных решений. Для валютации $v_1 = -2$ в $g_1(x)$ получаем выражение, содержащее два усеченных ряда:

$$-\frac{C_1}{x^2} + 4\frac{C_1}{x} + C_2 + O(x) + (C_1 + O(x^4)) \ln x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Положив $C_{0,1} = 0$ и $C_{1,1} \neq 0$ в (25) и (27), получаем усечение

$$C_2 + O(x^4).$$

Это усечение соответствует усечению лоранова решения уравнения S_1 с валютацией $v_2 = 0$.

Замечание 6. Решения $g_k(x), \dots, g_0(x)$ уравнений $S_k, \dots, S_0$ могут содержать одни и те же произвольные постоянные, поэтому переход от представления с использованием литералов к инвариантным усечениям производится не отдельно для каждого лоранова решения $g_k(x), \dots, g_0(x)$, а для всего регулярного решения (18) с множителем x^λ , включающего эти лорановы решения. В данном примере лораново решение $g_0(x) = C_{0,1} + O(x^4)$ отбрасывается при построении инвариантного усечения $g_1(x)$ с $C_{0,1} = 0$.

6. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Алгоритм реализован в среде Maple ([9]) в виде процедуры `RegularSolution`. Основные аргументы процедуры аналогичным аргументом представленной в работе [1] процедуры `LaurentSolution`, реализующей алгоритм поиска лорановых решений. Первым аргументом процедуры является дифференциальное уравнение вида (4). Применение θ^k к неизвестной функции $y(x)$ записывается как `theta(y(x), x, k)`. Как и в случае `LaurentSolution` также возможно использование обычного дифференцирования (оператора $D = \frac{d}{dx}$); в этом случае применение оператора D^k к неизвестной функции $y(x)$ задается в стандартном для Maple виде `diff(y(x), x$k)`. Усеченные коэффициенты уравнения имеют вид $a_i(x) + O(x^{t_i+1})$, где $a_i(x)$ — полином степени не выше t_i над полем алгебраических чисел. Нерациональные алгебраические числа в Maple представляются в виде конструкции `RootOf(p(_Z), index=k)`, где `p(_Z)` — неприводимый полином, k -м корнем которого и является данное алгебраическое число. Например, `RootOf(_Z^2 - 2, index = 2) = -\sqrt{2}`.

В качестве второго аргумента процедуры задается неизвестная функция.

Результат работы процедуры — список усеченных регулярных решений, инвариантных относительно продолжений коэффициентов заданного уравнения. В усечениях могут встречаться произвольные постоянные вида `_c_j`.

Дополнительно может быть указан опциональный параметр ``output` = `literal`` для получения ответа не в виде списка инвариантных усечений, а в виде одного усечения с литералами.

Также возможно указать опциональный параметр ``degree`=n`, где n — целое число для получения усечения заданной степени (в этом случае к усечениям будут добавлены коэффициенты, выраженные через литералы; степень построенного усечения может быть больше заданного n , будет вычислено по крайней мере столько коэффициентов, сколько требуется для определения всех возможных валуаций лорановых решений, возникающих в ходе вычислений). Отметим, что процедура `LaurentSolution` также дополнена аналогичными опциями.

Далее следуют шесть примеров, которые мы объединяем в один, содержащий пп. 1–6.

Пример 5.

1. Уравнение, заданное оператором (24):

```
> eq1 := (-1+x+x^2+O(x^3)) * theta(y(x), x, 2) + (-2+O(x^2)) * theta(y(x), x, 1) +
      (O(x^4)) * y(x);
```

$$eq1 := (-1 + x + x^2 + O(x^3))\theta(y(x), x, 2) + (-2 + O(x^2))\theta(y(x), x, 1) + O(x^4)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq1, y(x));
```

$$[_c1 + O(x^4)]$$

Ответ совпадает с полученным в примере 3.

2. Уравнение, заданное оператором (26):

```
> eq2 := (-1+x+x^2+O(x^3)) * theta(y(x), x, 2) + (-2+x^2+O(x^3)) * theta(y(x), x, 1) +
      O(x^4) * y(x);
```

$$eq2 := (-1 + x + x^2 + O(x^3))\theta(y(x), x, 2) + (-2 + x^2 + O(x^3))\theta(y(x), x, 1) + O(x^4)y(x)$$

```
> RegularSolution(eq2, y(x));
```

$$\left[-\frac{c_1}{x^2} + \frac{4c_1}{x} + _c2 + O(x) + \ln(x)(-_c1 + O(x^4)), _c2 + O(x^4) \right]$$

Ответ совпадает с ответом в примере 4.

Применим процедуру повторно к этому же уравнению с опцией представления результата в литералах, результат — регулярное решение, содержащее усечения вида, построенные, как описано в п. 4.1, т.е. до такой степени, что видна причина остановки вычислений:

```
> RegularSolution(eq2, y(x), `output`='literal');
```

$$\begin{aligned} & \left[\ln(x) \left(-c_1 + \frac{1}{24}x^4 - c_1U_{[0,4]} + O(x^5) \right) - \frac{c_1}{x^2} + \frac{4c_1}{x} + _c2 + x \left(\frac{2}{3} - c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{3} - c_1U_{[2,3]} \right) + \right. \\ & \quad x^2 \left(\frac{1}{4} - c_1U_{[1,4]} - \frac{5}{12} - c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{3} - c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{2} - c_1U_{[2,4]} - \frac{1}{8} - c_1U_{[0,4]} + \frac{1}{8} - c_1 \right) + \\ & \quad x^3 \left(\frac{2}{15} - c_1U_{[2,4]} - \frac{1}{5} - c_1U_{[1,4]} + \frac{2}{45} - c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{45} - c_1U_{[2,3]} + \frac{2}{15} - c_1U_{[1,5]} + \frac{7}{30} - c_1U_{[0,4]} + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{30} - c_1 - \frac{4}{15} - c_1U_{[2,5]} - \frac{1}{15} - c_1U_{[0,5]} \right) + x^4 \left(\frac{1}{24}U_{[0,4]} - c_2 - \frac{3}{40} - c_1U_{[2,4]} + \frac{7}{240} - c_1U_{[1,4]} - \right. \\ & \quad \left. \frac{7}{80} - c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{20} - c_1U_{[2,3]} - \frac{7}{60} - c_1U_{[1,5]} + \frac{7}{180} - c_1U_{[0,4]} + \frac{7}{160} - c_1 + \frac{1}{15} - c_1U_{[2,5]} + \frac{17}{120} - c_1U_{[0,5]} + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{36} - c_1U_{[1,3]}^2 - \frac{1}{36}U_{[1,3]} - c_1U_{[2,3]} - \frac{1}{18} - c_1U_{[2,3]}^2 - \frac{1}{24} - c_1U_{[0,6]} + \frac{1}{12} - c_1U_{[1,6]} - \frac{1}{6} - c_1U_{[2,6]} \right) + O(x^5) \Big] \end{aligned}$$

Ответ совпадает с ответом в литералах в примере 4.

Применим процедуру еще раз к этому же уравнению с опцией задания степени усечения:

```
> RegularSolution(eq2, y(x), `degree`=2);
```

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{c_1}{x^2} + \frac{4c_1}{x} + _c2 + x \left(\frac{2}{3} - c_1U_{[1,3]} - \frac{4}{3} - c_1U_{[2,3]} \right) + x^2 \left(\frac{1}{4} - c_1U_{[1,4]} - \frac{5}{12} - c_1U_{[1,3]} + \frac{1}{3} - c_1U_{[2,3]} - \right. \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{8} - c_1U_{[0,4]} - \frac{1}{2} - c_1U_{[2,4]} + \frac{1}{8} - c_1 \right) + O(x^3) + \ln(x)(-_c1 + O(x^3)), _c2 + O(x^3) \Big] \end{aligned}$$

Ответ показывает, что для получения 2-усечения как продолжения инвариантного усечения необходимо задать $U_{[0,4]}, U_{[1,3]}, U_{[1,4]}, U_{[2,3]}, U_{[2,4]}$, т.е. коэффициенты уравнения при $x^4, x^3\theta, x^4\theta, x^3\theta^2, x^4\theta^2$ соответственно.

3. Уравнение

> eq3 := (1+x^2+O(x^3)) * theta(y(x), x, 3) + (4-x+(1/2)*x^2+O(x^3)) * theta(y(x), x, 2) +
(4-2*x+x^2+O(x^3)) * theta(y(x), x, 1) + O(x^3) * y(x);

$$eq3 := (1 + x^2 + O(x^3))\theta(y(x), x, 3) + \left(4 - x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 2) + \\ (4 - 2x + x^2 + O(x^3))\theta(y(x), x, 1) + O(x^3)y(x)$$

> RegularSolution(eq3, y(x));

$$\left[\frac{\frac{21-c_1}{16} + \frac{c_2}{2}}{x^2} + \frac{c_1}{x} + c_3 + O(x) + \ln(x) \left(\frac{1}{2} \frac{c_1}{x^2} + c_2 + O(x) \right) + \ln(x)^2 \left(\frac{1}{2} c_1 + O(x^3) \right), \right. \\ \left. \frac{1}{2} \frac{c_2}{x^2} + c_3 + O(x) + \ln(x)(c_2 + O(x^3)), c_3 + O(x^3) \right]$$

В данном случае имеем три различных усечения регулярного решения, соответствующие лорановы ряды усечены до разных степеней, логарифм входит до степени 2, т.е. были найдены лорановы решения трех уравнений S_0, S_1, S_2 .

4. Усечение уравнения из примера 1:

> eq4 := (-1+x+O(x^3)) * theta(y(x), x, 2) + (-1-x-(3/2)*x^2+O(x^3)) * theta(y(x), x, 1) +
(3/4+(1/4)*x+(3/4)*x^2+O(x^3)) * y(x);

$$eq4 := (-1 + x + O(x^3))\theta(y(x), x, 2) + \left(-1 - x - \frac{3}{2}x^2 + O(x^3)\right)\theta(y(x), x, 1) + \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x^2 + O(x^3)\right)y(x)$$

> RegularSolution(eq4, y(x));

$$\left[\sqrt{x} \left(-\frac{2-c_1}{x^2} + \frac{8-c_1}{x} + c_2 + O(x) + \ln(x)(c_1 + O(x^3)) \right), \sqrt{x}(c_2 + O(x^3)) \right]$$

В данном случае получено регулярное решение с нецелым λ в множителе x^λ .

5. Уравнение

> eq5 := (1+O(x^2)) * theta(y(x), x, 3) + (1+2*x+O(x^2)) * theta(y(x), x, 2) +
(2+x+O(x^2)) * theta(y(x), x, 1) + (2-x+O(x^2)) * y(x);

$$eq5 := (1 + O(x^2))\theta(y(x), x, 3) + (1 + 2x + O(x^2))\theta(y(x), x, 2) + \\ (2 + x + O(x^2))\theta(y(x), x, 1) + (2 - x + O(x^2))y(x)$$

> RegularSolution(eq5, y(x));

$$\left[\frac{c_1}{x} + O(x) + x^{\text{RootOf}(-Z^2+2, \text{index}=1)} \left(-c_2 - \frac{1}{54}x(20 + 23\text{RootOf}(-Z^2+2, \text{index}=1))c_2 + O(x^2) \right) + \right. \\ \left. x^{\text{RootOf}(-Z^2+2, \text{index}=2)} \left(-c_3 - \frac{1}{54}x(20 + 23\text{RootOf}(-Z^2+2, \text{index}=2))c_3 + O(x^2) \right) \right]$$

В данном случае определяющий полином $-u_0(n) = (n+1)(n^2+2)$ — имеет три неэквивалентных корня: $\Lambda = \{-1, \sqrt{-2}, -\sqrt{-2}\}$, где $\sqrt{-2}, -\sqrt{-2}$ представлены конструкциями $\text{RootOf}(-Z^2+2, \text{index}=1)$ и $\text{RootOf}(-Z^2+2, \text{index}=2)$.

6. Уравнение, заданное через оператор дифференцирования D , а не через оператор θ :

```
> eq6 := (-x + x^2 + x^3 + O(x^4)) * (diff(y(x), x, x)) +
> (-3 + x + 2*x^2 + O(x^3)) * (diff(y(x), x)) + O(x^3) * y(x)

eq6 := (-x + x^2 + x^3 + O(x^4)) * (d^2/dx^2 y(x)) + (-3 + x + 2x^2 + O(x^3)) * (d/dx y(x)) + O(x^3) y(x)

> RegularSolution(eq6, y(x));
```

$$\left[-\frac{c_1}{x^2} + \frac{4c_1}{x} + c_2 + O(x) + \ln(x)(c_1 + O(x^4)), c_2 + O(x^4) \right]$$

В результате перехода в уравнении к θ получается уравнение с усечениями коэффициентов, аналогичными уравнению из п. 2. Поэтому совпадают и результаты вычислений.

Авторы благодарят компанию Maplesoft (Ватерлоо, Канада) за консультации и дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и усеченные ряды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 66–77.
2. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59. Вып. 3(357). С. 31–80.
3. *Frobenius G.* Integration der linearen Differentialgleichungen mit veränder Koeffizienten // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1873. V. 76. P. 214–235.
4. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
5. *Heffter L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig: Teubner, 1894.
6. *Tournier E.* Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de calcul formel DESIR Étude théorique et réalisation. Thèse d'État. Université de Grenoble. 1987.
7. *Lutz D.A., Schäfke R.* On the identification and stability of formal invariants for singular differential equations // Linear Algebra and Its Applications. 1985. V. 72. P. 1–46.
8. *Pflügel E.* DESIR-II. RT 154. IMAG Grenoble. 1996.
9. Maple online help, <http://www.maplesoft.com/support/help/>
10. *Barkatou M., Pflügel E.* An algorithm computing the regular formal solutions of a system of linear differential equations // J. Symbolic Computation. 1999. V. 28. P. 569–587.
11. *Abramov S., Bronstein M., Khmel'nov D.* On regular and logarithmic solutions of ordinary linear differential systems. In: Proc. CASC 2005. Lecture Notes in Computer Science. 2005. V. 3718. P. 1–12.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. С.В. Фомина. М.: Наука, 1965.
13. *Abramov S., Bronstein M., Petkovšek M.* On polynomial solutions of linear operator equations. Proc. of ISSAC'95. 1995. P. 290–296.
14. *Абрамов С.А., Хмельнов Д.Е.* Регулярные решения линейных дифференциальных систем с коэффициентами в виде степенных рядов // Программирование. 2014. № 2. С. 75–85.
15. *Abramov S., Barkatou M.* Computable infinite power series in the role of coefficients of linear differential systems. Proc. of CASC'2014. Lecture Notes in Computer Science. 2014. V. 8660. P. 1–12.
16. *Abramov S., Barkatou M., Khmel'nov D.* On full rank differential systems with power series coefficients // J. of Symbolic Computation. 2015. V. 68. P. 120–137.
17. *Abramov S., Barkatou M., Pflügel E.* Higher-order linear differential systems with truncated coefficients. Proc. of CASC'2011. Lecture Notes in Computer Science. 2011. V. 6885. P. 10–24.