ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 1, с. 116–117

УДК 517.929

MATRICES OF SCALAR DIFFERENTIAL OPERATORS: DIVISIBILITY AND SPACES OF SOLUTIONS[1)]

© 2020 г. S. A. Abramov[1,*,a], M. A. Barkatou[2,**], M. Petkovšek[3,***,b]

[1]Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Science, Vavilova str., 40, Moscow, 119333, Russia;

[2]University of Limoges, CNRS, XLIM UMR 7252, MATHIS, 123, Av. A. Thomas, 87060 Limoges cedex, France;

[3]University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics, Jadranska, 19, SI-1000, Ljubljana, Slovenia

*e-mail: sergeyabramov@mail.ru

**e-mail: moulay.barkatou@unilim.fr

***e-mail: Marko.Petkovsek@fmf.uni-lj.si

Поступила в редакцию 20.07.2019 г.
Переработанный вариант 31.08.2019 г.
Принята к публикации 18.09.2019 г.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, делимость квадратных матриц дифференциальных операторов, пространство решений, наибольший общий правый делитель, наименьшее общее левое кратное. Библ. 10.

DOI: 10.31857/S0044466920010044

Матрицы скалярных дифференциальных операторов: делимость и пространства решений. В [1, с. 82] было показано, что если R является кольцом правых главных идеалов, то и кольцо квадратных матриц фиксированного размера с элементами из R является кольцом этого типа (то же самое верно для левых идеалов). Этого достаточно для доказательства существования (правых и левых) наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного любой пары (A, B) матриц этого типа, даже если они не имеют полного ранга.

Позднее в [2, разд. 9.3] были предложены алгоритмы для нахождения наибольшего общего правого делителя (gcrd) и наименьшего общего левого кратного (lclm) матриц с элементами в виде полиномов Оре, это было сделано тем же путем, как и для обычных полиномиальных матриц [3].

Однако связь делимости операторных матриц — т.е. матриц скалярных операторов — и пространств решений этих матриц не были исследованы в упомянутых публикациях. В нашей статье мы устанавливаем эту связь.

Для большей определенности мы ограничиваемся операторными матрицами полного ранга над дифференциальным полем K характеристики 0, поле констант которого алгебраически замкнуто. Мы основываемся на рассмотрении вместе с каждой операторной матрицей A ее пространства решений, каждая компонента решения принадлежит универсальному расширению Пикара-Вессио Λ поля K (см. [4]).

Таким образом, с каждой операторной матрицей $A \in \mathbf{M}_m(K[\partial])$ мы связываем ее пространство решений V_A — множество таких вектор-стобцов $y = (y_1, \ldots, y_m)^{\mathrm{T}} \in \Lambda^m$, для которых $A(y) = 0$. Пространство решений операторной матрицы полного ранга конечномерно [5].

В контексте делимости мы рассматриваем несколько понятий. Пусть A, B, D, M — операторные $m \times m$-матрицы полного ранга. Тогда

D — правый делитель A (пишем $D|_r\, A$), если существует такая операторная $m \times m$-матрица Q полного ранга, что $A = QD$;

D — общий правый делитель A и B, если $D|_r\, A$ и $D|_r\, B$;

[1)]Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

[a] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16-01-001174).

[b] Supported in part by the Ministry of Education, Science and Sport of Slovenia research programme P1-0294.

наибольший общий правый делитель A и B (обозначение: $\mathrm{gcrd}(A, B)$), – общий правый делитель D матриц A, B такой, что любой другой общий правый делитель этих матриц является правым делителем матрицы D;

M – *левое кратное* матрицы A, если $A|_r M$;

M – *общее левое кратное* матриц A и B, если $A|_r M$, $B_r M$;

наименьшее общее левое кратное матриц A, B (обозначение: $\mathrm{lclm}(A, B)$) – левое кратное M матриц A, B такое, что любое другое общее левое кратное этих матриц является левым кратным матрицы M.

Мы доказываем, что для любого конечного множества $F \subset \Lambda^m$ существует матрица, пространство решений которой порождено F (элементы этой матрицы в общем случае принадлежат не K, а Λ). Существование такой матрицы и некоторые свойства делимости позволяют доказать, например, что для любых операторных $m \times m$-матриц A, B выполнено

$$V_A \cap V_B = V_{\mathrm{gcrd}(A,B)}, \quad V_A + V_B = V_{\mathrm{lclm}(A,B)}. \tag{1}$$

Насколько нам известно, второе из этих равенств было ранее доказано лишь для скалярного случая $A, B \in K[\partial]$, и даже там этот результат нетривиален (в [6] в комментарии к лемме 1 отмечено, что доказательство может основываться на [7, лемма A.6]).

Отметим еще раз, что хотя определение и способы получения gcrd и lclm операторных матриц известны (см., например, [2], [1]), связь этих понятий с пространствами решений, видимо, не исследовалась ранее сколь-либо детально.

Некоторые из утверждений нашей статьи могли бы быть доказаны короче с использованием методов дифференциальной алгебры, в частности, с использованием некоторых утверждений из [8] – знаменитой, но трудной для чтения книги. Но наши доказательства достаточно элементарны, и интересующие нас алгоритмы извлекаются из них с минимальными дополнительными усилиями.

Добавим, что если вместо Λ^m рассматривать решения в K_1^m, где K_1 – такое поле, что $K \subset K_1 \subset \Lambda$, то равенства (1) оказываются, вообще говоря, неверными: пространство решений матрицы $L = \mathrm{lclm}(A, B)$ может быть шире, чем сумма пространств решений матриц A и B, коль скоро имеются в виду решения в K_1^m.

Выше говорилось о правом делении: A является правым множителем в произведении QA. Обсуждавшиеся алгоритмы могут использоваться для левого деления, если прибегнуть к сопряженным матрицам. Существенно, что $(M_1 M_2)^* = M_2^* M_1^*$ и $M^{**} = M$. Как следствие, $B = AQ \Longleftrightarrow B^* = Q^* A^*$.

Авторы признательны М. Зингеру за ряд полезных советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McConnell J.C., Robson J.C.* Noncommutative Noetherian rings. Vol. 30 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2001.
2. *Beckermann B., Cheng H., Labahn G.* Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials // J. Symbolic Comput. **41**, no. 5 (2006) 513–543.
3. *Beckermann B., Labahn G.* Fraction-free computation of matrix rational interpolants and matrix GCDs // SIAM J. Matrix Anal. Appl. **77**, no. 1 (2000) 114–144.
4. *van der Put M., Singer M.F.* Galois Theory of Linear Differential Equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **328**, Springer, Berlin, 2003.
5. *Abramov S., Barkatou M.* On the dimension of solution spaces of full rank linear differential systems. In: Computer Algebra in Scientific Computing, 15th International Workshop, CASC 2013, Berlin, Germany, September 2013, Proceedings, LNCS **8136**, pp. 1–9, 2013, Springer, Heidelberg (2013).
6. *van Hoeij M.* Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equations // J. Pure Appl. Algebra **139**, no. 1–3 (1999) 109–131.
7. *Hendriks P.A., Singer M.F.* Solving difference equations in finite terms // J. Symbolic Comput. **27**, no. 3 (1999) 239–259.
8. *Kolchin E.R.* Differential algebra and algebraic groups. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York–London, 1973.