ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 1, с. 29–38

УДК 517.93

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2020 г. С. Б. Бижанова[1], М. Дж. Минглибаев[1,2], А. Н. Прокопеня[3,*]

[1] *050040 Алматы, пр-т аль-Фараби, 71, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан;*

[2] *050020 Алматы, Обсерватория, 23, Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Казахстан;*

[3] *02-776 Варшава, ул. Новоурсыновска, 159, Варшавский университет естественных наук, Польша*

**e-mail: alexander_prokopenya@sggw.pl*

Поступила в редакцию 29.07.2019 г.
Переработанный вариант 29.07.2019 г.
Принята к публикации 18.09.2019 г.

Рассматривается нестационарная задача двух тел, одно из которых имеет сферически симметричное распределение плотности и является “центральным”, а второе – “спутник”, обладающий осесимметричным динамическим строением, формой и переменным сжатием. Ньютоновская сила взаимодействия характеризуется приближенным выражением силовой функции с точностью до второй гармоники. Массы тел изменяются изотропно в различных темпах. Получены уравнения движения спутника в относительный системе координат. Задача исследована методами теории возмущений. Получены уравнения вековых возмущений поступательно-вращательного движения спутника в аналогах оскулирующих элементов Делоне–Андуайе. Все необходимые символьные вычисления выполнены с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Библ. 18. Фиг. 1.

Ключевые слова: переменная масса, вековые возмущения, осесимметричное тело, поступательно-вращательное движение.

DOI: 10.31857/S0044466920010068

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные данные наблюдений в астрономии показывают, что реальные космические системы являются нестационарными, их массы, размеры, форма и ряд других физических характеристик изменяются с течением времени в процессе эволюции [1]–[6]. В связи с этим становится актуальным создание математических моделей движения нестационарных небесных тел.

Целью настоящей работы является получение дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения нестационарного осесимметричного тела переменной массы и размеров и переменного сжатия в нестационарном центральном гравитационном поле. Решение этой проблемы связано с довольно громоздкими символьными вычислениями, которые лучше всего выполнять с применением систем компьютерной алгебры (см. [7], [8]). В данной работе все необходимые вычисления выполнены с помощью системы Wolfram Mathematica [9], [10].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пусть первое “центральное” тело T_1 с переменной массой $m_1 = m_1(t)$ является шаром со сферически симметричным распределением плотности. Предположим, что второе тело T_2 массой $m_2 = m_2(t)$ является “спутником” тела T_1 и обладает осесимметричным динамическим строением и формой, а его моменты инерции второго порядка являются заданными функциями времени. Такой “спутник” обладает переменным сжатием и его главные центральные моменты инерции A, B, C удовлетворяют соотношениям

$$A(t) = B(t) \neq C(t), \qquad \frac{C(t) - A(t)}{C(t)} \neq \text{const}. \tag{1}$$

Допустим, что законы изменения масс тел известны, причем массы изменяются в различных темпах, т.е. справедливо соотношение

$$\frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}. \tag{2}$$

Также предположим, что массы тел изменяются изотропно и в рассматриваемой системе не появляются реактивные силы и дополнительные вращательные моменты.

Пусть нестационарное осесимметричное тело обладает экваториальной плоскостью симметрии. Тогда оно обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Оси собственной системы координат, совпадающие с главными осями инерции тела, направим вдоль линий пересечения этих трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Отметим, что ориентация этих осей относительно тела в ходе эволюции остается неизменной. В выражении для силовой функции ограничимся приближением с точностью до второй гармоники включительно.

Относительное поступательное движение центра масс "спутника" вокруг "центрального" тела описывается уравнениями [6]:

$$\tilde{m}\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \tilde{m}\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tilde{m}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{3}$$

где x, y, z – координаты центра масс тела T_2 в относительной системе координат O_1xyz с началом в центре тела T_1, $\tilde{m} = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ – приведенная масса, силовая функция ньютоновского взаимодействия двух тел имеет вид

$$U = f\frac{m_1m_2}{R} + \tilde{U}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{4}$$

$$\tilde{U} = fm_1\frac{2A(t) + C(t) - 3J}{2R^3}, \tag{5}$$

а момент инерции J осесимметричного тела относительно вектора $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$, соединяющего центры масс двух тел, определяется выражением

$$J = A(\alpha^2 + \beta^2) + C\gamma^2, \tag{6}$$

где α, β, γ – направляющие косинусы вектора $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ с осями собственной системы координат "спутника", совпадающими с его главными центральными осями инерции.

Вращательное движение спутника вокруг собственного центра масс в переменных Эйлера определяется уравнениями [6], [11]

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(Ap) - (A - C)qr = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi} - \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta},\\ \frac{d}{dt}(Aq) - (C - A)rp = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi} - \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) - \sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta},\\ \frac{d}{dt}(Cr) = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$p = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad q = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi, \quad r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \tag{8}$$

где p, q, r – проекции угловой скорости спутника на оси собственной системы координат, φ, θ, ψ – углы Эйлера [12]–[14]. В рассматриваемой постановке задача является весьма сложной, поэтому для ее исследования воспользуемся методами теории возмущений [6].

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ ДЕЛОНЕ–АНДУАЙЕ

Поступательное движение центра масс осесимметричного тела далее опишем в оскулирующих элементах апериодического движения по квазиконическому сечению (см. [6]). Для этого перепишем уравнение (3) в виде

$$\ddot{\mathbf{R}} + f\frac{m_1 + m_2}{R^3}\mathbf{R} - b\mathbf{R} = \operatorname{grad}_{\mathbf{R}} W, \tag{9}$$

где

$$W = -\frac{1}{2}bR^2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\tilde{U}, \quad b = b(t_0) = \frac{\ddot{v}}{v}, \quad v = v(t) = \frac{m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_1(t) + m_2(t)}. \tag{10}$$

При $W = 0$ уравнение (9) имеет точное решение, которое описывает апериодическое движение по квазиконическому сечению и может быть представлено в виде

$$\begin{gathered} x = v\rho(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i), \quad y = v\rho(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i), \\ z = v\rho(\sin u \sin i), \quad R = v\rho, \quad u = v + \omega, \end{gathered} \tag{11}$$

где v — истинная аномалия,

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}. \tag{12}$$

Величины a, e, i, ω, Ω являются аналогами известных кеплеровских орбитальных элементов (см. [12]). Введение эксцентрической аномалии E согласно соотношению

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \quad e < 1, \tag{13}$$

приводит к известному уравнению Кеплера

$$E - e\sin E = M. \tag{14}$$

При этом зависимости эксцентрической E и средней M аномалий в (14) от времени

$$E = E(t), \quad M = n[\phi(t) - \phi(\tau)], \quad n = \frac{\sqrt{\mu_0}}{a^{3/2}} = \text{const}, \quad \mu_0 = f[m_1(t_0) + m_2(t_0)], \tag{15}$$

определяются законами изменения масс тел, поскольку функция $\phi(t)$ в (15) имеет вид

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{v^2(t)} = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{m_1(t) + m_2(t)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)}\right)^2 dt. \tag{16}$$

Через τ в (15) обозначено время прохождения через перицентр. Отметим, что в невозмущенном движении средняя угловая скорость не является постоянной и зависит от законов изменения масс тел:

$$\dot{M} = n\frac{1}{v^2(t)} = n\left(\frac{m_1(t) + m_2(t)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)}\right)^2. \tag{17}$$

Для дальнейших вычислений предпочтительно использовать аналоги переменных Делоне, которые вводятся посредством соотношений (см. [6], [15])

$$\begin{gathered} L = \sqrt{\mu_0}\sqrt{a}, \quad G = \sqrt{\mu_0}\sqrt{a(1-e^2)}, \quad H = \sqrt{\mu_0}\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, \\ l = n[\phi(t) - \phi(\tau)], \quad g = \omega, \quad h = \Omega. \end{gathered} \tag{18}$$

Уравнения движения центра масс осесимметричного тела, как уравнения возмущенного движения, в оскулирующих элементах Делоне имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{L} = \frac{\partial W}{\partial l}, \quad \dot{G} = \frac{\partial W}{\partial g}, \quad \dot{H} = \frac{\partial W}{\partial h}, \\ \dot{l} = -\frac{\partial W}{\partial L}, \quad \dot{g} = -\frac{\partial W}{\partial G}, \quad \dot{h} = -\frac{\partial W}{\partial H}, \end{gathered} \tag{19}$$

где

$$W = \frac{1}{v^2(t)}\frac{\mu_0^2}{2L^2} + W^*, \tag{20}$$

$$W^* = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\tilde{U} - \frac{1}{2}bR^2\right). \tag{21}$$

Учитывая соотношение $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, из формул (5), (6) и (21) получаем

$$W^* = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\left(\frac{fm_1}{2}(C - A)\left[\frac{1}{R^3}\right] - \frac{3fm_1}{2}(C - A)\left[\frac{\gamma^2}{R^3}\right]\right) - \frac{1}{2}b[R^2]. \tag{22}$$

Величины, заключенные в квадратные скобки в правой части уравнения (22), должны быть выражены через оскулирующие элементы Делоне–Андуайе.

Вращательное движение осесимметричного тела $(A = B)$ вокруг его центра инерции опишем в аналогах оскулирующих элементов Андуайе. При этом невозмущенное движение является аналогом движения Эйлера-Пуансо – вращательного движения свободного нестационарного осесимметричного тела вокруг собственного центра инерции. Как было отмечено выше, оси собственной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции тела.

В переменных Эйлера кинетическая энергия вращательного движения нестационарного осесимметричного тела имеет вид

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(A(p^2 + q^2) + Cr^2). \tag{23}$$

Напомним, что угловые переменные Эйлера φ, θ, ψ и соответствующие им обобщенные импульсы P_φ, P_θ, P_ψ связаны между собой соотношениями (см. [6], [16])

$$Ap = \frac{1}{\sin\theta}(P_\psi - P_\varphi\cos\theta)\sin\varphi + P_\theta\cos\varphi,$$

$$Bq = \frac{1}{\sin\theta}(P_\psi - P_\varphi\cos\theta)\cos\varphi - P_\theta\sin\varphi, \qquad Cr = P_\varphi, \tag{24}$$

$$P_\theta = \frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial\dot\theta} = Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi, \qquad P_\varphi = \frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial\dot\varphi} = Cr,$$

$$P_\psi = \frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial\dot\psi} = (Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi)\sin\theta + Cr\cos\theta. \tag{25}$$

С другой стороны, в переменных Андуайе l', g', h', L', G', H' получаем (см. [6], [16]):

$$Ap = \sqrt{G'^2 - L'^2}\,\sin l', \qquad Bq = \sqrt{G'^2 - L'^2}\,\cos l', \qquad Cr = L'. \tag{26}$$

Поэтому выражение для кинетической энергии (23) в переменных Андуайе в общем случае может быть записано в виде

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(G'^2 - L'^2)\left[\frac{\sin^2 l'}{A} + \frac{\cos^2 l'}{B}\right] + \frac{L'^2}{2C}. \tag{27}$$

В случае осесимметричного тела выражение (27) существенно упрощается

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2A}(G'^2 - L'^2) + \frac{L'^2}{2C}. \tag{28}$$

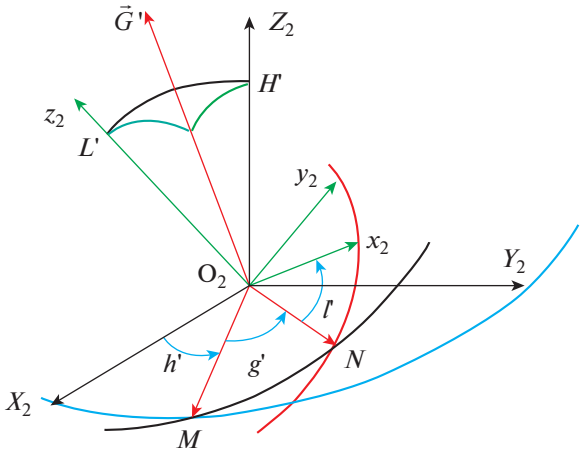
Следовательно, гамильтониан вращательного движения осесимметричного тела может быть записан в виде

$$F = F_{\text{нв}} + F_{\text{воз}}, \tag{29}$$

где

$$F_{\text{нв}} = \frac{1}{2}(G'^2 - L'^2)\frac{1}{A} + \frac{L'^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{G'^2}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)L'^2, \tag{30}$$

$$F_{\text{воз}} = \tilde{U} - \frac{1}{2}bR^2. \tag{31}$$



Фиг 1. Переменные Андуайе.

Соответственно, вращательное движение осесимметричного тела вокруг собственного центра инерции определяется уравнениями возмущенного движения в оскулирующих элементах Андуайе вида

$$\dot{L}' = -\frac{\partial F}{\partial l'}, \quad \dot{G}' = -\frac{\partial F}{\partial g'}, \quad \dot{H}' = -\frac{\partial F}{\partial h'},$$
$$\dot{l}' = \frac{\partial F}{\partial L'}, \quad \dot{g}' = \frac{\partial F}{\partial G'}, \quad \dot{h}' = \frac{\partial F}{\partial H'}. \tag{32}$$

Геометрический смысл элементов Андуайе выясняется из фиг. 1.

На фиг. 1 приняты следующие обозначения.

1. $O_2X_2Y_2Z_2$ – невращающаяся кенигова система координат, оси которой параллельны осям абсолютной системы координат;

2. $O_2x_2y_2z_2$ – собственная система координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции трехосного тела, жестко связанная с телом и вращающаяся вместе с ним;

3. O_2NM – плоскость, проходящая через начало координат (барицентр), перпендикулярная вектору кинетического момента $\mathbf{G}'$;

4. O_2M – линия пересечения плоскости $O_2X_2Y_2$ невращающейся системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ с плоскостью O_2MN, перпендикулярной вектору кинетического момента $\mathbf{G}'$, проходящей через начало координат;

5. O_2N – линия пересечения плоскости $O_2x_2y_2$ вращающейся системы координат $O_2x_2y_2z_2$ с плоскостью O_2MN, перпендикулярной вектору кинетического момента $\mathbf{G}'$;

6. G' – модуль вектора кинетического момента $\mathbf{G}'$;

7. L' – проекция вектора кинетического момента $\mathbf{G}'$ на вращающуюся ось O_2z_2 – одну из главных осей инерции трехосного тела;

8. H' – проекция вектора кинетического момента $\mathbf{G}'$ на ось O_2Z_2, сохраняющую в пространстве постоянную ориентацию;

9. l' – угол между линией O_2N и осью O_2x_2;

10. g'- угол между линиями O_2M и O_2N;

11. h' – угол между осью O_2X_2 и линией O_2M.

Взаимная ориентация невращающейся системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ и вращающейся системы координат $O_2x_2y_2z_2$, связанной с осесимметричным телом, определяется следующими направляющими косинусами [15]–[18]:

$$\begin{gathered}
a_{11} = \cos h'\cos g'\cos l' - \cos h'\cos J'\sin g'\sin l' - \sin h'\cos I'\cos l'\sin g' - \\
- \sin h'\cos I'\cos g'\cos J'\sin l' + \sin h'\sin I'\sin l'\sin J', \\
a_{21} = \sin h'\cos g'\cos l' - \sin h'\cos J'\sin g'\sin l' + \cos h'\cos I'\cos l'\sin g' + \\
+ \cos h'\cos I'\cos g'\cos J'\sin l' - \cos h'\sin I'\sin l'\sin J', \\
a_{31} = \sin I'\sin g'\cos l' + \sin I'\cos J'\cos g'\sin l' + \cos I'\sin l'\sin J',
\end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered}
a_{12} = -\cos h'\cos g'\sin l' - \cos h'\cos J'\sin g'\cos l' + \sin h'\cos I'\sin l'\sin g' - \\
- \sin h'\cos I'\cos g'\cos J'\cos l' + \sin h'\sin I'\cos l'\sin J', \\
a_{22} = -\sin h'\cos g'\sin l' - \sin h'\cos J'\sin g'\mathrm{os}\, l' - \cos h'\cos I'\sin l'\sin g' + \\
+ \cos h'\cos I'\cos g'\cos J'\cos l' - \cos h'\sin I'\cos l'\sin J', \\
a_{32} = -\sin I'\sin g'\sin l' + \sin I'\cos J'\cos g'\cos l' + \cos I'\cos l'\sin J',
\end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered}
a_{13} = \cos h'\sin J'\sin g' - \sin h'\sin I'\cos J' + \sin h'\cos I'\cos g'\sin J', \\
a_{23} = \sin h'\sin J'\sin g' - \cos h'\sin I'\cos J' - \cos h'\cos I'\cos g'\sin J', \\
a_{33} = \cos I'\cos J' - \sin I'\cos g'\sin J',
\end{gathered} \tag{35}$$

где

$$\cos I' = \frac{H'}{G'}, \quad \sin I' = \sqrt{1 - \frac{H'^2}{G'^2}}, \quad \cos J' = \frac{L'}{G'}, \quad \sin J' = \sqrt{1 - \frac{L'^2}{G'^2}}. \tag{36}$$

4. УРАВНЕНИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В АНАЛОГАХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЕЛОНЕ–АНДУАЙЕ

Если возмущающая функция в уравнениях (19), (32), равна нулю, то получим уравнения невозмущенного поступательно-вращательного движения нестационарного осесимметричного тела в элементах Делоне–Андуайе.

Невозмущенное поступательное движение описывается уравнениями

$$L = L_0 = \text{const}, \quad G = G_0 = \text{const}, \quad H = H_0 = \text{const}, \tag{37}$$

$$\begin{gathered}
l = \frac{\mu_0^2}{L^3}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{m_1(t) + m_2(t)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)}\right)^2 dt + l_0, \quad l_0 = \text{const}, \\
g = g_0 = \text{const}, \quad h = h_0 = \text{const}.
\end{gathered} \tag{38}$$

Уравнения невозмущенного вращательного движения имеют вид

$$L' = L'_0 = \text{const}, \quad G' = G'_0 = \text{const}, \quad H' = H'_0 = \text{const}, \tag{39}$$

$$\begin{gathered}
l' = L'\int_{t_0}^{t}\frac{A(t) - C(t)}{A(t)C(t)}dt + l'_0, \quad l'_0 = \text{const}, \\
g' = G'\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{A(t)} + g'_0, \quad g'_0 = \text{const}, \quad h' = h'_0 = \text{const}.
\end{gathered} \tag{40}$$

Отметим, что угол $l' = l'(t)$ описывает собственное вращение спутника. При $A(t) < C(t)$, как можно увидеть из (40), величина $\Delta l' = l' - l'_0$ отрицательная, при $A(t) = C(t)$ эта величина равна нулю и тело останавливается, а при $A(t) > C(t)$ эта величина положительная и тело начинает вращение в обратном направлении.

5. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ОСКУЛИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЕЛОНЕ–АНДУАЙЕ

Перепишем выражения (20), (21) в виде

$$W = \frac{1}{\nu^2(t)}\frac{\mu_0^2}{2L^2} + \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\left(\frac{fm_1}{2\nu^3}(C-A)\left[\frac{1}{\rho^3}\right] - \frac{3fm_1}{2\nu^3}(C-A)\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]\right) - \frac{1}{2}b\nu^2[\rho^2]. \tag{41}$$

Подобным образом выражения (29)–(31) запишем в виде

$$F = \frac{1}{2}\frac{G'^2}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L'^2 + \frac{fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{1}{\rho^3}\right] - \frac{3fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right] - \frac{1}{2}b\nu^2[\rho^2]. \tag{42}$$

Здесь

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{(1+e\cos v)^3}{a^3(1-e^2)^3}, \tag{43}$$

$$\gamma = c_{13}\frac{x}{R} + c_{23}\frac{y}{R} + c_{33}\frac{z}{R}, \tag{44}$$

$$\frac{x}{R} = \tau_{11}\sin v + \tau_{12}\cos v, \quad \frac{y}{R} = \tau_{21}\sin v + \tau_{22}\cos v, \quad \frac{z}{R} = \tau_{31}\sin v + \tau_{32}\cos v. \tag{45}$$

$$c_{13} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\sin g' + \varepsilon_{13}\cos g', \quad c_{23} = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}\sin g' + \varepsilon_{23}\cos g', \quad c_{33} = \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33}\cos g'. \tag{46}$$

Соответственно можно написать

$$\begin{gathered}\frac{\gamma^2}{\rho^3} = \frac{(1+e\cos v)^3}{a^3(1-e^2)^3}\big[(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\sin g' + \varepsilon_{13}\cos g')(\tau_{11}\sin v + \tau_{12}\cos v) + \\ + (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}\sin g' + \varepsilon_{23}\cos g')(\tau_{21}\sin v + \tau_{22}\cos v) + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{33}\cos g')(\tau_{31}\sin v + \tau_{32}\cos v)\big]^2,\end{gathered} \tag{47}$$

где

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11} = \frac{L'\sqrt{G'^2 - H'^2}}{G'^2}\sin h', \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{G'}\cos h', \quad \varepsilon_{13} = \frac{H'\sqrt{G'^2 - L'^2}}{G'^2}\sin h', \\ \varepsilon_{21} = \frac{L'\sqrt{G'^2 - H'^2}}{G'^2}\cos h', \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sqrt{G'^2 - L'^2}}{G'}\sin h', \quad \varepsilon_{23} = \frac{H'\sqrt{G'^2 - L'^2}}{G'^2}\cos h', \\ \varepsilon_{31} = \frac{L'H'}{G'^2}, \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\sqrt{G'^2 - H'^2}\sqrt{G'^2 - L'^2}}{G'^2},\end{gathered} \tag{48}$$

$$\begin{gathered}\tau_{11} = -\cos h\sin g - \frac{H}{G}\sin h\cos g, \quad \tau_{12} = \cos h\cos g - \frac{H}{G}\sin h\sin g, \\ \tau_{21} = -\sin h\sin g + \frac{H}{G}\cos h\cos g, \quad \tau_{22} = \sin h\cos g + \frac{H}{G}\cos h\sin g, \\ \tau_{31} = \cos g\sqrt{1 - H^2/G^2}, \quad \tau_{32} = \sin g\sqrt{1 - H^2/G^2}.\end{gathered} \tag{49}$$

Согласно приведенным формулам аналитические выражения в квадратных скобках в (41), (42) выражаются через элементы Делоне–Андуайе. Поэтому правые части в уравнениях (19) и (32) могут быть выражены через элементы Делоне–Андуайе. Эти уравнения полностью определяют поступательно-вращательное движение нестационарного осесимметричного тела в переменных Делоне–Андуайе.

6. ОСРЕДНЕНИЕ И ПОЛУЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим нерезонансный случай. Осредняя правую часть уравнений (19) и (32) по переменным g', l, получаем уравнения для вековых возмущений поступательно-вращательного движе-

ния нестационарного осесимметричного тела в рассматриваемый задаче. Если вековые части возмущающих функций W, F обозначить как $W_{\text{век}}$, $F_{\text{век}}$, то согласно схеме Гаусса имеем

$$W_{\text{век}} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} W dl dg', \quad F_{\text{век}} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F dl dg'. \tag{50}$$

Соответственно, можно записать

$$W_{\text{век}} = \frac{\mu_0^2}{2\nu^2(t)}\left(\frac{1}{L^2}\right)_{\text{век}} + \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\left(\frac{fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{1}{\rho^3}\right]_{\text{век}} - \frac{3fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{\gamma_2^2}{\rho^3}\right]_{\text{век}}\right) - \frac{1}{2}b\nu^2[\rho^2]_{\text{век}}, \tag{51}$$

$$F_{\text{век}} = \frac{1}{2A}(G'^2)_{\text{век}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)(L'^2)_{\text{век}} + \frac{fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{1}{\rho^3}\right]_{\text{век}} - \frac{3fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]_{\text{век}} - \frac{1}{2}b\nu^2[\rho^2]_{\text{век}}, \tag{52}$$

где

$$[\rho^2]_{\text{век}} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho^2 dl dg' = a^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right). \tag{53}$$

При вычислении вековых возмущений следующих величин:

$$\left[\frac{1}{\rho^3}\right]_{\text{век}} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dl dg'}{\rho^3}, \tag{54}$$

$$\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]_{\text{век}} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right) dl dg', \tag{55}$$

удобно использовать известное соотношение [6]

$$\frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = \frac{dl}{(1-e^2)^{3/2}}. \tag{56}$$

Используя соотношение (56), вычисляем правую часть (54)

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dl dg'}{\rho^3} = \frac{1}{4\pi^2 a^3(1-e^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+e\cos v)dv dg' = \frac{1}{a^3(1-e^2)}. \tag{57}$$

Используя соотношения (47) и (56), перепишем правую часть (55) в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right)dl dg' = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma^2\frac{(1+e\cos v)^3}{(1-e^2)^3}\frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos v)^2}dv dg' = \frac{1}{4\pi^2 a^3(1-e^2)^{3/2}}\times \\ \times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}\sin g'+\varepsilon_{13}\cos g')(\tau_{11}\sin v+\tau_{12}\cos v)+(\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}\sin g'+\varepsilon_{23}\cos g')\times\right. \\ \left.\times(\tau_{21}\sin v+\tau_{22}\cos v)+(\varepsilon_{31}+\varepsilon_{33}\cos g')(\tau_{31}\sin v+\tau_{32}\cos v)\right]^2(1+e\cos v)dv dg'.\end{gathered} \tag{58}$$

Вычисляя интегралы в (58), окончательно получаем

$$\left[\frac{\gamma^2}{\rho^3}\right]_{\text{век}} = \frac{I}{4a^3(1-e^2)^{3/2}}, \tag{59}$$

где

$$\begin{gathered}I = (\tau_{11}^2+\tau_{12}^2)(2\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2)+(\tau_{21}^2+\tau_{22}^2)(2\varepsilon_{21}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{23}^2)+(\tau_{31}^2+\tau_{32}^2)(2\varepsilon_{31}^2+\varepsilon_{33}^2)+ \\ +(\tau_{11}\tau_{21}+\tau_{12}\tau_{22})(4\varepsilon_{11}\varepsilon_{21}+2\varepsilon_{12}\varepsilon_{22}+2\varepsilon_{13}\varepsilon_{23})+(\tau_{11}\tau_{31}+\tau_{12}\tau_{32})(4\varepsilon_{11}\varepsilon_{31}+2\varepsilon_{13}\varepsilon_{33})+ \\ +(\tau_{21}\tau_{31}+\tau_{22}\tau_{32})(4\varepsilon_{21}\varepsilon_{31}+2\varepsilon_{23}\varepsilon_{33}) = I(h,H,h',H').\end{gathered} \tag{60}$$

Теперь уравнения для вековых возмущений имеют следущий вид:

$$\dot{L}_{\text{век}} = 0, \quad \dot{G}_{\text{век}} = 0, \quad \dot{H}_{\text{век}} = \frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial h_{\text{век}}},$$
$$\dot{l}_{\text{век}} = -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial L_{\text{век}}}, \quad \dot{g}_{\text{век}} = -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial G_{\text{век}}}, \quad \dot{h}_{\text{век}} = -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial H_{\text{век}}}, \tag{61}$$

$$\dot{L}'_{\text{век}} = 0, \quad \dot{G}'_{\text{век}} = 0, \quad \dot{H}'_{\text{век}} = -\frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial h_{\text{век}}},$$
$$\dot{l}'_{\text{век}} = \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial L'_{\text{век}}}, \quad \dot{g}'_{\text{век}} = \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial G'_{\text{век}}}, \quad \dot{h}'_{\text{век}} = \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial H'_{\text{век}}}, \tag{62}$$

$$W_{\text{век}} = \frac{\mu_0^2}{2\nu^2(t)}\left(\frac{1}{L^2}\right) + \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\left(\frac{fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{1}{a^3(1-e^2)}\right]\right) -$$
$$- \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\left(\frac{3fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{I}{4a^3(1-e^2)^{3/2}}\right]\right) - \frac{1}{2}b\nu^2\left[a^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right] \tag{63}$$

$$F_{\text{век}} = \frac{1}{2A}(G'^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)(L'^2) + \frac{fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{1}{a^3(1-e^2)}\right] -$$
$$- \frac{3fm_1(C-A)}{2\nu^3}\left[\frac{I}{4a^3(1-e^2)^{3/2}}\right] - \frac{1}{2}b\nu^2\left[a^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\right], \tag{64}$$

где $a = L^2/\mu_0$, $1 - e^2 = G^2/\mu_0 a$, $I = I(H, h, H', h')$.

Таким образом, вычисление вековых возмущений сводится к системе четвертого порядка

$$\dot{H}_{\text{век}} = \frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial h_{\text{век}}}, \quad \dot{h}_{\text{век}} = -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial H_{\text{век}}}, \tag{65}$$

$$\dot{H}'_{\text{век}} = -\frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial h'_{\text{век}}}, \quad \dot{h}'_{\text{век}} = \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial H'_{\text{век}}}. \tag{66}$$

После решения системы (65), (66) интегрируются оставшиеся уравнения

$$\dot{L}_{\text{век}} = 0, \quad \dot{G}_{\text{век}} = 0, \quad \dot{L}'_{\text{век}} = 0, \quad \dot{G}'_{\text{век}} = 0, \tag{67}$$

$$\dot{l}_{\text{век}} = -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial L'_{\text{век}}}, \quad \dot{g}_{\text{век}} = -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial G_{\text{век}}}, \quad \dot{l}'_{\text{век}} = \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial L'_{\text{век}}}, \quad \dot{g}'_{\text{век}} = \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial G'_{\text{век}}}. \tag{68}$$

С учетом (63), (64) система (65), (66) принимает вид

$$\dot{H} = \left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial h}\right], \quad \dot{h} = -\left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial H}\right],$$
$$\dot{H}' = E(t)\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right], \quad \dot{h}' = -E(t)\left[\frac{\partial I}{\partial H'}\right], \tag{69}$$

$$E(t) = -\frac{3fm_1(C-A)}{8\nu^3a^3(1-e)^{3/2}}, \quad \tilde{m}(t) = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}. \tag{70}$$

Заметим, что в силу равенств (67) получим

$$L = L_{\text{век}} = L_0 = \text{const}, \quad (a = \text{const}), \quad G = G_{\text{век}} = G_0 = \text{const}, \quad (e = \text{const}),$$
$$L' = L'_{\text{век}} = L'_0 = \text{const}, \quad G' = G'_{\text{век}} = G'_0 = \text{const}. \tag{71}$$

Система (69) допускает первый интеграл

$$I = I(H, h, H', h') = I_0 = \text{const}. \tag{72}$$

Действительно, выполняя вычисления с учетом системы (69), получаем

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial H}\dot{H}+\frac{\partial I}{\partial h}\dot{h}+\frac{\partial I}{\partial H'}\dot{H}'+\frac{\partial I}{\partial h'}\dot{h}'=\frac{\partial I}{\partial H}\left(\left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial h}\right]\right)+\frac{\partial I}{\partial h}\left(-\left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left[\frac{\partial I}{\partial H}\right]\right)+\frac{\partial I}{\partial H'}\left(E(t)\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right]\right)+$$
$$+\frac{\partial I}{\partial h'}\left(-E(t)\left[\frac{\partial I}{\partial H'}\right]\right)=\left(\frac{E(t)}{\tilde{m}(t)}\right)\left\{\frac{\partial I}{\partial H}\left[\frac{\partial I}{\partial h}\right]-\frac{\partial I}{\partial h}\left[\frac{\partial I}{\partial H}\right]\right\}+\left(E(t)\right)\left\{\frac{\partial I}{\partial H'}\left[\frac{\partial I}{\partial h'}\right]-\frac{\partial I}{\partial h'}\left[\frac{\partial I}{\partial H'}\right]\right\}=0 \quad (73)$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поступательно-вращательное движение нестационарного осесимметричного тела в гравитационном поле нестационарного шара изучено методами теории возмущений. Получены уравнения для вековых возмущений, которые представляют собой систему дифференциальных уравнений четвертого порядка с одним первым интегралом. Далее планируется численными методами исследовать полученные эволюционные уравнения. Все аналитические вычисления выполнены с применением системы компьютерной алгебры Mathematica [9], [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Omarov T.B.* (Ed.). Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. New-York: Nova Science Publ., 2002.
2. *Bekov A.A., Omarov T.B.* The theory of orbits in non-stationary stellar systems // Astronomy and Astrophysics Transactions. 2013. V. 22. № 2. P. 145–153.
3. *Черепащук А.М.* Тесные двойные звезды. Часть II. М.: Физматлит, 2013. С. 572.
4. *Eggleton P.* Evolutionary processes in binary and multiple stars. London: Cambridge University Press, 2006. 332 p.
5. *Luk'yanov L.G.* Dynamical evolution of stellar orbits in close binary systems with conservative mass transfer // Astron. Rep. 2008. V. 52. № 8. P. 680–693.
6. *Минглибаев М.Дж.* Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Изд-во "LAMBERT Academic Publishing ", 2012. 229 с.
7. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М.* Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами // Программирование. 2014. Т. 40. № 2. С. 51–59.
8. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Шомшекова С.А.* Применение компьютерной алгебры в исследованиях двухпланетной задачи трех тел с переменными массами // Программирование. 2019. Т. 45. № 2. С. 58–65.
9. *Wolfram S.* An Elementary Introduction to the Wolfram Language. Champaign, IL: Wolfram Media, 2015. 324 p.
10. *Прокопеня А.Н.* Решение физических задач с использованием системы Mathematica. Брест: Изд-во БГТУ, 2005. 260 с.
11. *Minglibayev M.Zh., Ahmetrassulova A.A.* Secular perturbations in the problem of translational rotational motion two axisymmetric non-stationary gravitating bodies with variable oblate. In: Classical and Celestial Mechanics. Selected Papers, L. Gadomski, P. Krasilnikov, A. Prokopenya (Eds.). Siedlce: Wydawnictwo Colleguim Mazovia, 2012. P. 116–126.
12. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 799 с.
13. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ им. Ломоносова, 1975. 308 с.
14. *Видякин В.В.* Поступательно-вращательное движение двух твердых тел: Учебное пособие. Архангельск: ДКПО "Норд", 1996. 184 с.
15. *Баркин Ю.В., Демин В.Г.* Поступательно-вращательное движение небесных тел // Итоги науки и техн. АН СССР. Астрономия. 1982. Т. 20. С. 115–134.
16. *Архангельский А.Ю.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
17. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
18. *Лидов М.Л.* Курс лекций по теоретической механике. М.: Физматлит, 2010. 496 с.