ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 2, с. 216–220

УДК 519.615

ЛОКАЛЬНО ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ[1)]

© 2020 г. Ю. Г. Евтушенко[1,*], А. А. Третьяков[1,2,]**

[1] 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия;

[2] System Res. Inst., Polish Acad. Sie, Newelska 6, 01-447 Warsaw, and University of Siedlct, Faculty of Sciences, 08-110 Siedlce, Poland

**e-mail: evt@ccas.ru*

***e-mail: tret@ap.siedlce.pl*

Поступила в редакцию 13.01.2017 г.
Переработанный вариант 16.06.2017 г.
Принята к публикации 17.11.2019 г.

Для решения системы линейных неравенств предлагается численный метод, который представляет собой комбинацию градиентного метода и метода проекции на линейное многообразие. Показывается, что метод сходится за конечное число итераций, причем число вычислений оценивается полиноминальной сложностью от размерности пространства и числа неравенств, входящих в систему. Библ. 17.

Ключевые слова: система линейных неравенств, локально-полиномиальная сложность, сходимость, выпуклая функция.

DOI: 10.31857/S0044466920020064

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – непустое множество решений системы линейных неравенств

$$Ax \le b, \tag{1}$$

где A – матрица размерности $m \times n$, $n \ge m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ставится задача: найти произвольный элемент из множества X.

Для решения систем вида (1) существует большое количество численных методов. Укажем лишь на некоторые из них: прямые [1], [2] и итерационные [3]–[5]. Конечный алгоритм полиномиальной вычислительной сложности на данный момент пока не найден. Задача его нахождения включена в список Смейла [6] как одна из важнейших нерешенных проблем. В работах [7], [8] и [17] используется редукция (1) к задачам безусловной минимизации строго выпуклой кусочно-квадратичной функции, показано, что решение получается за конечное полиномиальное число вычислений, если начальная точка принадлежит достаточно малой окрестности единственного решения, либо мы попадаем в эту окрестность каким-либо методом. Однако к минимизируемой функции предъявляются весьма жесткие требования – она должна быть сильно выпуклой, собственные значения матрицы Гессе должны удовлетворять определенным соотношениям и т.д. Это приводит к существенным ограничениям на класс решаемых задач; требуется, например, единственность решения (1) и т.д. Идея метода, описанная в [7], [8], заключается в возможности получения информации о решаемой задаче на основе результатов расчетов в малой окрестности этого решения. Аналогичный подход был использован в работе [9] и [13] для построения 2-фактор-метода решения вырожденных систем нелинейных уравнений. Подобная идея применялась в [10], [11], [14], [15] для создания численных методов решения вырожденных задач нелинейного программирования. В работах [5], [16] построены точные методы решения задач квадратичного программирования на основе описываемой идеи и имеющие локально полиномиальную сложность. Отметим, что известный метод эллипсоидов, как показано в работе [12], в общем случае не является полиномиальным. В [4] предложен градиентно-проективный метод решения системы (1), который сходится за конечное число итераций и представляет собой объединение итерационного и прямого метода. В данной работе предлагается усовершенствованная схема подобного метода, более простая в своей реализации и обладающая локально полиномиальной оцен-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-07-00510).

кой сложности, т.е. если начальная точка принадлежит достаточно малой окрестности некоторой точки решения, то число вычислений, необходимых для получения решения, оценивается как полином от m и n, т.е. $O(m \times n^3)$. Причем используется идея проектирования на множество активных ограничений в окрестности решения.

Введем m скалярных функций $f^i(x) = \langle a^i, x \rangle - b^i$, где $a^i \in \mathbb{R}^n$ есть i-я строка матрицы A, $i \in D = \{1, 2, \ldots, m\}$. Шар радиуса ε с центром в точке x обозначим через $U_\varepsilon(x)$.

Для произвольных x, x_*, $i \in D$ выполнены неравенства Липшица

$$f^i(x) - \|a^i\|\|x - x_*\| \le f^i(x_*) \le f^i(x) + \|a^i\|\|x - x_*\|. \tag{2}$$

Определим индексные множества $J_0(x) = \{i : i \in D, f^i(x) = 0\}$, $J_-(x) = \{i : i \in D, f^i(x) < 0\}$, $J_+(x) = \{i : i \in D, f^i(x) > 0\}$.

Для решения задачи (1) достаточно найти хотя бы одну точку x_* такую, что множество $J_+(x_*)$ пусто, либо, что то же самое, такую, что $J_0(x_*) \cup J_-(x_*) = m$.

Лемма 1. *Пусть $x_* \in X$, $i \in D$ и для любых $\varepsilon > 0$ существуют $x \in U_\varepsilon(x_*)$ такие, что $f^i(x) \ge 0$. Тогда $i \in J_0(x_*)$.*

Доказательство. Из условия $x_* \in X$ следует, что либо $f^i(x_*) = 0$, либо $f^i(x_*) < 0$. В первом случае имеет место требуемое утверждение, во втором из (2) получим $f^i(x) \le f^i(x_*) + \|x - x_*\|\|a^i\|$ для любых $x \in U_\varepsilon(x_*)$. Отсюда при $0 < \varepsilon < -f^i(x_*)/\|a^i\|$, имеем $f^i(x) < 0$, что противоречит условию леммы о том, что на множестве $U_\varepsilon(x_*)$ есть точки, где $f^i(x) \ge 0$. Поэтому заключаем, что $i \in J_0(x_*)$.

Введем в рассмотрение функцию штрафа

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\|(Ax - b)_+\|^2, \tag{3}$$

где $(Ax - b)_+$ — вектор, i-я компонента которого равна $(Ax - b)^i$, если $(Ax - b)^i > 0$, и равна нулю, если $(Ax - b)^i \le 0$, $1 \le i \le m$. Очевидно, что

$$X = \operatorname*{Argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x). \tag{4}$$

Количество элементов, входящих в множество Z, обозначаем через $|Z|$ (его мощность). Для определенности считаем, что $J_-(x_*) = \{1, \ldots, l\}$, $J_0(x_*) = \{l + 1, \ldots, m\}$.

Если ранг матрицы B размерности $m \times n$ равен m, то псевдообратной к B будет $n \times m$ матрица $B^+ = B^\top (BB^\top)^{-1}$. Квадратную матрицу $n \times n$ ортогонального проектирования на пространство строк матрицы B определим как $(B^\top)^\parallel = B^\top (BB^\top)^{-1} B = B^+ B$, а проекцию на ортогональное дополнение $(B^\top)^\perp = J - (B^\top)^\parallel$, где J — единичная матрица $n \times n$, $n \ge m$.

Из индексного множества $J_+(x)$ выделим подмножество $\overline{J}_+(x)$ — совокупность индексов, соответствующих максимальному набору линейно независимых строк матрицы A с номерами из $J_+(x)$. Пусть

$$M(\overline{x}) = \{z \in \mathbb{R}^n : f^i(z) = 0, i \in J_+(\overline{x})\}. \tag{5}$$

Обозначим через $\overline{A}(\overline{x})$ матрицу, состоящую из строк, соответствующих индексному множеству $\overline{J}_+(\overline{x})$. Аналогично определим вектор $\overline{b}$. Введем оператор проектирования точек $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ на множество $M(\overline{x})$:

$$z(\overline{x}) = P_{M(\overline{x})}(\overline{x}) = \left(\overline{A}^\top(\overline{x})\right)^\perp \overline{x} + \overline{A}^+(\overline{x})\overline{b}, \tag{6}$$

где $\overline{b}^i = b^i$, $i \in \overline{J}_+(x)$. Вычисление указанной проекции предполагает выделение максимальной системы линейно независимых строк матрицы A со строками a_j, $j \in J_+(\overline{x})$. Данный процесс легко описывается как последовательное добавление строк данной матрицы, начиная с произвольной ненулевой строки. При этом новая строка a_j добавляется в том случае, если она не представима в виде линейной комбинации уже добавленных строк. Эта проверка осуществима при помощи стандартных программ линейной алгебры, см., например, https://topepo.github.io/caret/pre-processing.html#indep. Аналогично вычисление псевдообратной матрицы, см. https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/MASS/html/ginv.html.

Опишем алгоритм нахождения решения системы (1) по информации, полученной в текущей точке $\overline{x}$.

АЛГОРИТМ

1. В текущей точке $\overline{x}$ определяем набор индексов $J_+(\overline{x})$. Если множество $J_+(\overline{x})$ – пусто, то $\overline{x}$ – решение системы (1).

2. По формуле (6) определим проекцию $z(\overline{x})$ и проверим выполнение неравенств

$$f^i\left(z(\overline{x})\right) \le 0, \qquad i = 1,\dots,m. \tag{7}$$

3. Если неравенство (7) выполнено для всех $i \in D$, то $z(\overline{x})$ – решение системы (1).

Если для некоторых $i \in D\backslash J_+(\overline{x})$ неравенство (7) нарушается, то выбираем индекс i_0 такой, что

$$i_0 = \underset{i \notin J_+(\overline{x})}{\operatorname{argmin}} \left| f^i\left(z(\overline{x})\right)\right|. \tag{8}$$

(Минимум может достигаться на нескольких индексах $i_0 \notin J_+(\overline{x})$. В этом случае берем любой из них.)

4. Добавим i_0 к множеству $J_+(\overline{x})$

$$J_+(\overline{x}) \coloneqq J_+(\overline{x}) \cup \{i_0\} \tag{9}$$

и перейдем к 2.

Теорема 1. *При достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *и любых* $\overline{x} \in U_\varepsilon(x_*)$. *Алгоритм определяет решение* $z_* = z(\overline{x})$ *системы* (1) *за число вычислений порядка* $O(m \times n^3)$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, что в соответствии с леммой 1 при $\overline{x}$ достаточно близких к x_* ограничения, которые нарушаются, т.е. $f^i(\overline{x}) > 0$, должны соответствовать активным ограничениям в точке x_*, т.е. $f^i(x_*) = 0$, $J_+(\overline{x}) \in \{\ell + 1,\dots,m\}$. Нулевые ограничения в точке $\overline{x}$, т.е. $f^j(\overline{x}) = 0$, опять по лемме 1 соответствуют $f^j(x_*) = 0$. Остаются только ограничения $f^i(\overline{x}) < 0$, среди которых могут быть соответственно активные в точке x_*. Пусть это $\{\ell + 1,\dots,p\}$, т.е. $f^j(x_*) = 0$ для $\ell + 1 \le j \le p$. А для остальных $f^j(x_*) \le -c$, $1 \le j \le \ell$, и $0 < c$ – некоторая независимая константа. Поэтому $f^j(\overline{x}) \le -c/2$, $1 \le j \le \ell$, а остальные ограничения будут меньше нуля в точке $\overline{x}$, но заведомо $f^j(\overline{x}) > -c/2$, при $\ell + 1 \le j \le p$. Эти ограничения занумеруем по убыванию $\left|f^i(\overline{x})\right|$, $i \in \{1,\dots,p\}$ и будем выбирать последовательно индексы

$$i_0 = \underset{1 \le i \le p}{\operatorname{argmin}} \left| f^i\left(\overline{x}\right)\right|,$$

т.е. последовательно выделять в точке x_* подозреваемые на активные ограничения и добавлять их в $J_+(\overline{x}) \coloneqq J_+(\overline{x}) \cup \{i_0\}$. Таким образом, на некотором шаге будет $J_+(\overline{x}) = J_0(x_*)$, так как ограничения неактивные даже не будут проверяться в силу того, что мы получим решение, как только $J_+(\overline{x}) = J_0(x_*)$.

На основании вышеизложенного доказательство можно записать в следующем виде.

В соответствии с леммой 1 в множестве индексов $J_+(\bar{x}) \in \{\ell+1,\dots,m\}$ и среди ограничений $f^i(\bar{x}) < 0, i \notin J_+(\bar{x})$, могут быть такие, что $i \in J_0(x_*)$. Пусть это для определенности $i \in \{\ell+1,\dots,p\}$, т.е. $f^j(\bar{x}) < 0$ для $\ell+1 \le j \le p$, а для остальных индексов имеем $f^j(\bar{x}) \le -\frac{c}{2}, 1 \le j \le \ell, c > 0$, т.е. получаем заведомо допустимые ограничения для неактивных $i \in D$. Очевидно, что при $\varepsilon > 0$ достаточно малых,

$$\left|f^i(\bar{x})\right| < \left|f^j(\bar{x})\right|, \quad j \in \{1,\dots,\ell\}, \quad i \in \{\ell+1,\dots,p\}, \tag{10}$$

так как $\bar{x} \in U_\varepsilon(x_*)$ и $f^i(x_*) = 0, i = \ell+1,\dots,p$. При этом в точке $z(\bar{x}) = P_{M(\bar{x})}(\bar{x})$ некоторые из ограничений могут нарушаться и нужно изменять $J_+(\bar{x})$ в соответствии с (9).

Отметим, что при вычислении точки $z(\bar{x})$, система $f^i(z) = 0$, $i \in \bar{J}_+(\bar{x})$ и система $f^i(z) = 0$, $i \in J_+(\bar{x})$ будут совместны, поскольку совместны системы

$$f^i(z) = 0, \quad i \in \bar{J}_+(x_*) \quad \text{и} \quad f^i(z) = 0, \quad i \in J_+(x_*),$$

а точка $\bar{x}$ принадлежит достаточно малой окрестности x_*.

Изменение множества $J_+(\bar{x})$ происходит за счет добавления ограничений с индексами из множества $\{\ell+1,\dots,p\}$. Считаем, что множество $J_0(x_*)$ не пусто, т.к. в противном случае $J_+(\bar{x}) = 0$ и все $f^i(\bar{x}) < 0$. Тогда число изменений множества $J_+(\bar{x})$ не больше, чем $p-\ell-1 \le m$. Поэтому за число проектирований не более, чем m, мы получим проекцию $z_* = z(\bar{x}) = P_{M(\bar{x})}(\bar{x})$. Число операций, требуемых для проектирования точки x на $M(\bar{x})$, будет порядка $O(n^3)$, а число изменений множества $J_+(\bar{x})$ – не более m. Поэтому общее число итераций для отыскания z_* будет порядка $O(m \times n^3)$.

Остается описать способ нахождения точки $\bar{x}$ из достаточно малой окрестности $U_\varepsilon(x_*)$ некоторого фиксированного решения $x_* \in X$. Для этого используем простейший градиентный метод

$$x_{k+1} = x_k - \alpha\varphi'(x_k), \tag{11}$$

где градиент $\varphi'(x) = A^\top(Ax-b)_+$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \left\|A^\top A\right\|$. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и последовательность $\{x_k\}$ строится по схеме* (11) *с постоянным шагом $\alpha = 1/2L$. Тогда $x_k \to x_* \in X$ при $k \to \infty$ и $\|x_{k+1} - y\| < \|x_k - y\|$ для любого $y \in X$ и $k = 0,1,\dots$.*

Доказательство можно найти, например, в [1].

Таким образом, метод (11) реализует последовательность, которая сходится к некоторой точке $x_* \in X$, т.е. заведомо для каждого $\varepsilon > 0$ достаточно малого, начиная с некоторого $\bar{k} = k(\varepsilon)$, все $\{x_k\} \in U_\varepsilon(x_*)$, $k \ge \bar{k}$. Это означает, что на некотором шаге с номером $\bar{k}$ выполнены условия теоремы 1 и получается решение системы (1).

Опишем окончательно метод решения системы (1).

Теорема 3. *Выполняются следующие действия.*

1. *Полагаем $k = 0$ и берем в качестве x_0 любую точку из $\mathbb{R}^n$.*

2. *Определяем итерацию $x_{k+1} = x_k - \alpha\varphi'(x_k)$, $k = k+1$.*

3. *Вычисляем по алгоритму точку $z(x_k)$.*

4. *Проверяем: будет ли $z(x_k)$ решением системы* (1):

– *если нет, то переходим на п.* 2.

– *если да, то найдено конечное $\bar{k}$ такое, что $z(x_{\bar{k}})$ – решение системы* (1).

Доказательство. Поскольку последовательность $\{x_k\}$ сходится к фиксированной точке $x_* \in X$, то на некотором шаге $\bar{k}$ будут выполнены условия теоремы 1 и получится решение $z_* = P_{M(x_{\bar{k}})}(x_{\bar{k}}) \in X$.

Замечание. Если в алгоритме нарушается условие совместности системы (5), то считаем, что алгоритм не дает решения и переходим к п. 2.

Отметим, что требование непустоты множества X, введенное выше, можно опустить. Тогда описанный метод находит псевдорешение системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Физматлит, 2000.
2. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 3. С. 354–375.
3. *Evtushenko Y.G., Golikov A.I.* New perspective on the theorems of alternative // High Performance Algorithms and Software for Nonlinear Optimization. Springer US, 2003. P. 227–241.
4. *Tret'yakov A.A.* A finite-termination gradient projection method for solving systems of linear inequalities // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2010. V. 25(3). P. 279–288.
5. *Tret'yakov A., Tyrtyshnikov E.* Exact differentiable penalty for a problem of quadratic programming with the use of a gradient-projective method // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2015. V. 30 (2). P. 121–128.
6. *Smale S.* Mathematical problems for the next century, Mathematics: Frontiers and perspectives, 271–294 // American Mathematical Society, Providence, RI. 2000.
7. *Mangasarian O.L.* A finite Newton method for classification problems. Technical Report 01-11, Data Mining Institute, Computer Sciences Department, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, 2001. C. 01–11.
8. *Mangasarian O.L.* A Newton method for linear programming // J. Optimizat. Theory and Applicat. 2004. T. 121. № 1. C. 1–18.
9. *Белаш К.Н., Третьяков А.А.* Методы решения вырожденных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 7. С. 1097–1102.
10. *Brezhneva O.A., Tret'yakov A.A.* The p-factor-Lagrange methods for degenerate nonlinear programming // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2007. T. 28. № 9–10. C. 1051–1086.
11. *Брежнева О.А., Евтушенко Ю.Г., Третьяков А.А.* 2-фактор метод модифицированной функции Лагранжа для решения вырожденных задач условной оптимизации // Доклад. АН. 2006. Т. 408. № 4. С. 439–442.
12. *Goffin J.L.* On the non-polynomiality of the relaxation method for systems of linear inequalities // Mathematical Programming. 1982. T. 22. № 1. C. 93–103.
13. *Facchinei F., Fischer A., Kanzow C.* On the accurate identification of active constraints // SIAM Journal on Optimization. 1998. T. 9. № 1. C. 14–32.
14. *Szczepanik E., Tret'yakov A.* p-factor methods for nonregular inequality-constrained optimization problems // Nonlinear Analysis. 2008. T. 69. № 12. C. 4241–4251.
15. *Wright S.J.* An algorithm for degenerate nonlinear programming with rapid local convergence // SIAM Journal on Optimization. 2005. T. 15. № 3. C. 673–696.
16. *Tret'yakov A., Tyrtyshnikov E.E.* A finite gradient-projective solver for a quadratic programming problem // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. T. 28. № 3. C. 289–300.
17. *Han S. P.* Least-Squares Solution of Linear Inequalities. WISCONSIN UNIV-MADISON MATHEMATICS RESEARCH CENTER, 1980. № MRC-TSR-2141.