УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИЛЬНО ДИССИПАТИВНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С АКУСТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

С. Э. Исаева

AZ 1148 Баку, ул. Акад. З. Халилова, 23, Бакинский Гос. ун-т, Азербайджан

e-mail: isayevasevda@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.05.2019 г.
Переработанный вариант 27.05.2019 г.
Принята к публикации 17.10.2019 г.

Рассматривается смешанная задача для нелинейных сильно диссипативных волновых уравнений с акустическими условиями сопряжения. Доказана теорема о существовании и единственности локальных решений, используя аппроксимации Фаэдо–Галеркина, метод компактности и теорему о неподвижной точке. Доказано также существование глобальных решений для рассматриваемой задачи. Библ. 23.

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, акустические условия сопряжения, локальное решение, теорема о неподвижной точке.

DOI: 10.31857/S0044466920020076

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$ – ограниченная область с гладкой границей Γ_1, $\Omega_2 \subset \Omega$ – подобласть с гладкой границей Γ_2 и $\Omega_1 = \Omega \backslash (\Omega_2 \cup \Gamma_2)$ – подобласть с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. В области Ω рассмотрим следующую нелинейную задачу с акустическими условиями сопряжения:

$$u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u + |u_t|^{q_1-1} u_t = f(u) \quad \text{в} \quad \Omega_1 \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

$$v_{tt} - \Delta v_t - \Delta v + |v_t|^{q_2-1} v_t = g(v) \quad \text{в} \quad \Omega_2 \times (0,\infty), \tag{1.2}$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -u_t \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0,\infty), \tag{1.3}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty), \tag{1.4}$$

$$u = v, \quad \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{\partial u_t}{\partial \nu} - \frac{\partial v_t}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0,\infty), \tag{1.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}_1, \tag{1.6}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}_2, \tag{1.7}$$

$$\delta(x,0) = \delta_0(x), \quad \delta_t(x,0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \equiv \delta_1, \quad x \in \bar{\Gamma}_2, \tag{1.8}$$

где ν – внешняя нормаль границы Γ; $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$, $\bar{\Gamma}_2$ – замыкания множеств Ω_1, Ω_2, Γ_2 соответственно; $M, D, K: \ \bar{\Gamma}_2 \to (-\infty;+\infty)$, $u_0, u_1: \ \bar{\Omega}_1 \to (-\infty;+\infty)$, $v_0, v_1: \bar{\Omega}_2 \to (-\infty;+\infty)$, $\delta_0: \ \bar{\Gamma}_2 \to (-\infty;+\infty)$ – заданные функции, $q_i > 1$, $i = 1, 2$.

Задачи типа (1.1)–(1.8), называемые смешанными задачами с акустическими условиями сопряжения, касаются задач с двумя волновыми уравнениями, которые моделируют поперечные акустические колебания мембраны, состоящей из двух разных материалов Ω_1 и Ω_2.

Уравнения типа (1.1) встречаются при изучении движения вязкоупругих материалов. Такие уравнения или уравнения вида

$$u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u + f(u) = g(x), \tag{1.9}$$

называются обычно сильно диссипативными волновыми уравнениями или псевдогиперболическими уравнениями (см., например, [1]–[5]). Одной из первых работ, посвященных глобальному поведению решений смешанных задач для сильно диссипативных волновых уравнений, является работа [1], где получен результат о существовании и единственности сильного решения и результат о том, что сильное решение приближается соответствующему стационарному решению при $t \to \infty$. В [3] изучена регулярность глобального аттрактора, порожденного трехмерной задачей для уравнения (1.9) с нелинейным членом $u|u|^4$ (см., также [4], [5]).

Задачи сопряжения изучены, например, в [6]–[9]. В работе [6] рассмотрена задача сопряжения для линейных гиперболических уравнений, где доказаны единственность и регулярность решений для рассматриваемой задачи. В работе [7] изучена задача сопряжения для вязкоупругих волн и доказано экспоненциальное убывание решений.

В [10] авторы сравнили некоторые граничные условия, среди которых имеются и акустические граничные условия. Гиперболические уравнения с акустическими граничными условиями впервые рассмотрены в работе [11] и изучены в работах различных авторов (см., например, [12]–[16]). Отметим, что в монографии [17] исследованы некоторые граничные задачи и задачи сопряжения для линейных гиперболических уравнений, которые фактически также являются смешанными задачами с акустическими граничными условиями и с акустическими условиями сопряжения. В [11] авторы выводят теоретическую модель, описывающую акустическое волновое движение жидкости, где предположено, что каждая точка рассматриваемой поверхности реагирует на избыточное давление акустической волны, как резистивный гармонический осциллятор, причем разные точки поверхности не взаимодействуют друг с другом; поверхности такого типа называются локально реагирующими (см. [18]).

В [19], [20] изучена смешанная задача с акустическими условиями сопряжения для нелинейных гиперболических уравнений с нелинейной диссипацией. Доказаны существование, единственность и экспоненциальное убывание глобальных решений для этой задачи с фокусирующими нелинейными источниками; доказаны также существование глобальных решений и разрушение решений за конечное время для случая с дефокусирующими нелинейными источниками.

В настоящей статье доказывается теорема о существовании и единственности локальных решений для задачи (1.1)–(1.8); доказывается также существование глобальных решений.

В разд. 2 вводятся некоторые обозначения и формулировки основных результатов; в разд. 3 доказываются существование и единственность локальных решений задачи (1.1)–(1.8); существование глобальных решений доказывается в разд. 4.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Скалярное произведение и норма в $L^2(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, и $L^2(\Gamma_2)$ обозначаются, соответственно, как

$$(u, v)_i = \int_{\Omega_i} u(x)v(x)\,dx, \quad \|u\|_i = \left(\int_{\Omega_i} (u(x))^2 dx\right)^{1/2}, \quad i = 1, 2,$$

$$(\delta, \theta)_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \delta(x)\theta(x)\,d\Gamma_2, \quad \|\delta\|_{\Gamma_2} = \left(\int_{\Gamma_2} (\delta(x))^2 d\Gamma_2\right).$$

Введем замкнутое подпространство $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$ пространства $H^1(\Omega_1)$, как

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) = \{u \in H^1(\Omega_1) \colon \gamma_0(u) = 0 \text{ п.в. на } \Gamma_1\},$$

где $\gamma_0: H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ – оператор следа нулевого порядка и $H^{1/2}(\Gamma)$ есть пространство Соболева порядка $\frac{1}{2}$ (см. [21]). Заметим, что норма в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$:

$$\|u\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

и норма в $H^1(\Omega_1)$ эквивалентны, так как неравенство Пуанкаре удовлетворяется в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$. Таким образом, рассматриваем $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$ с вышеуказанной нормой.

Отображение $\gamma_1: H(\Delta,\Omega_1) \cup H(\Delta,\Omega_2) \to H^{-1/2}(\Gamma_2)$ – оператор следа Неймана, где пространства

$$H(\Delta,\Omega_i) = \{u \in H^1(\Omega_i) : \Delta u \in L^2(\Omega_i)\}, \quad i = 1, 2,$$

снабжены нормами

$$\|u\|_{\Delta,\Omega_i} = \left(\|u\|^2_{H^1(\Omega_i)} + \|\Delta u\|^2_i\right)^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Основные результаты этой работы установлены в следующих двух теоремах.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$M, D, K \in C(\overline{\Gamma}_2), \quad M > 0, \quad D > 0, \quad K > 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in \overline{\Gamma}_2; \tag{2.1}$$

$f, g \in C^1(-\infty;+\infty)$ *и существуют постоянные* $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, *такие, что*

$$|f(s)| \le c_1|s|^p, \quad |f'(s)| \le c_2|s|^{p-1}, \quad |g(s)| \le c_3|s|^p, \quad |g'(s)| \le c_4|s|^{p-1}; \tag{2.2}$$

$$1 \le p \le \frac{n}{n-2}, \quad \text{если} \quad n \ge 3 \quad \text{и} \quad p \ge 1, \quad \text{если} \quad n = 1, 2; \tag{2.3}$$

$$1 < q_i \le \frac{n+2}{n-2}, \quad \text{если} \quad n \ge 3 \quad \text{и} \quad q_i > 1, \quad \text{если} \quad n = 1, 2. \tag{2.4}$$

Предположим, что $(u_0, v_0, \delta_0) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$, $(u_1, v_1, \delta_1) \in L^{2q_1}(\Omega_1) \times L^{2q_2}(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$, $u_0 = v_0$ *и* $u_1 = v_1$ *на* Γ_2. *Тогда существует* $T > 0$ *такое, что задача* (1.1)–(1.8) *имеет единственное решение* (u, v, δ), *удовлетворяющее условиям*

$$u \in C(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)), \quad u_t \in C(0,T; L^2(\Omega_1)) \bigcap L^{q_1+1}(\Omega_1 \times [0,T)),$$
$$v \in C(0,T; H^1(\Omega_2)), \quad v_t \in C(0,T; L^2(\Omega_2)) \bigcap L^{q_2+1}(\Omega_2 \times [0,T)),$$
$$\delta \in L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_2)), \quad \delta_t \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_2)).$$

Кроме того, справедливо одно из следующих утверждений:

1) $\lim\limits_{t \to T-0} \left(\|u_t\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|^2_{\Gamma_2} + \left\|\sqrt{K}\delta\right\|^2_{\Gamma_2}\right) = +\infty;$

2) $T = +\infty$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Предположим, что*

$$p \le \min\{q_1, q_2\} \tag{2.5}$$

и существуют постоянные $c_i > 0$, $i = 5, 6, 7, 8$, *такие, что*

$$c_5|s|^{p+1} \le F(s) \le c_6|s|^{p+1}, \quad c_7|s|^{p+1} \le G(s) \le c_8|s|^{p+1}, \tag{2.6}$$

где

$$F(s) = \int_0^s f(s)\,ds, \quad G(s) = \int_0^s g(s)\,ds.$$

Тогда локальное решение (u, υ, δ) *задачи* (1.1)–(1.8) *является глобальным.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1

Рассмотрим следующую задачу:

$$U_{tt} - \Delta U_t - \Delta U + |U_t|^{q_1-1}U_t = F_1 \quad \text{в} \quad \Omega_1 \times (0,T), \tag{3.1}$$

$$V_{tt} - \Delta V_t - \Delta V + |V_t|^{q_2-1}V_t = F_2 \quad \text{в} \quad \Omega_2 \times (0,T), \tag{3.2}$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -U_t \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0,T), \tag{3.3}$$

$$U = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \tag{3.4}$$

$$U = V, \quad \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial U_t}{\partial \nu} - \frac{\partial V_t}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0,T), \tag{3.5}$$

$$U(x,0) = u_0(x), \quad U_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}_1, \tag{3.6}$$

$$V(x,0) = v_0(x), \quad V_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}_2, \tag{3.7}$$

$$\delta(x,0) = \delta_0(x), \quad \delta_t(x,0) = \delta_1(x), \quad x \in \bar{\Gamma}_2, \tag{3.8}$$

где $T > 0$, $F_1 = F_1(x,t)$ и $F_2 = F_2(x,t)$ – некоторые фиксированные функции, определенные на $\Omega_1 \times (0,T)$ и $\Omega_2 \times (0,T)$ соответственно.

Чтобы доказать теорему 2.1, нам понадобятся две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.4) *и*

$$F_1 \in H^1(0,T;L^2(\Omega_1)), \quad F_2 \in H^1(0,T;L^2(\Omega_2)), \tag{3.9}$$

$$u_0 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \bigcap H^2(\Omega_1), \quad u_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \bigcap H^2(\Omega_1) \bigcap L^{2q_1}(\Omega_1), \tag{3.10}$$

$$v_0 \in H^2(\Omega_2), \quad v_1 \in H^2(\Omega_2) \bigcap L^{2q_2}(\Omega_2), \tag{3.11}$$

$$\delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma_2). \tag{3.12}$$

Тогда для любого $T > 0$ *существует единственное решение* (U,V,δ) *задачи* (3.1)–(3.8) *такое, что*

$$U \in L^\infty(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)), \quad U_t \in L^\infty(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)) \cap L^{q_1+1}(\Omega_1 \times [0,T)), \\ U_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)), \tag{3.13}$$

$$V \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega_2)), \quad V_t \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega_2)) \cap L^{q_2+1}(\Omega_2 \times [0,T)), \\ V_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)), \tag{3.14}$$

$$U(t) \in H(\Delta,\Omega_1), \quad V(t) \in H(\Delta,\Omega_2) \quad \textit{п. в.} \quad \textit{на} \quad (0,T), \tag{3.15}$$

$$\delta, \delta_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_2)), \quad \delta_{tt} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)). \tag{3.16}$$

Доказательство. *Аппроксимации Фаэдо–Галеркина.* Пусть $\{(\Phi_j,\Psi_j,e_j)\}$, $j \in N$, – ортогональный базис в $W = \{(u,v,\delta) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2), u = v \text{ на } \Gamma_2\}$. Так как Γ_1 и Γ_2 являются достаточно гладкими, то $\Phi_j \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1)$ и $\Psi_j \in H^1(\Omega_2) \cap L^\infty(\Omega_2)$ для любого $j \in N$. Рассмотрим функции

$$U_m:\ \Omega_1 \times [0,T_m] \to R, \quad V_m:\ \Omega_2 \times [0,T_m] \to R, \quad \delta_m:\ \Gamma_2 \times [0,T_m] \to R (m \in N),$$

определенные в виде

$$U_m(x,t) = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm}(t)\Phi_j(x),$$

$$V_m(x,t) = \sum_{j=1}^m \beta_{jm}(t)\Psi_j(x),$$

$$\delta_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t)\, e_j(x),$$

которые являются решениями следующей задачи :

$$\begin{gathered}(U_{mtt}, \Phi_j)_1 + (\nabla U_{mt}, \nabla \Phi_j)_1 - \left(\frac{\partial U_{mt}}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi_j)\right)_{\Gamma_2} + (\nabla U_m, \nabla \Phi_j)_1 - \\ - \left(\frac{\partial U_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi_j)\right)_{\Gamma_2} + \left(|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, \Phi_j\right)_1 = (F_1, \Phi_j)_1,\end{gathered} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered}(V_{mtt}, \Psi_j)_2 + (\nabla V_{mt}, \nabla \Psi_j)_2 + \left(\frac{\partial V_{mt}}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi_j)\right)_{\Gamma_2} + (\nabla V_m, \nabla \Psi_j)_2 + \\ + \left(\frac{\partial V_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi_j)\right)_{\Gamma_2} + \left(|V_{mt}|^{q_2-1} V_{mt}, \Psi_j\right)_2 = (F_2, \Psi_j)_2,\end{gathered} \tag{3.18}$$

$$(M\delta_{mtt} + D\delta_{mt} + K\delta_m, e_j)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_{mt}), e_j)_{\Gamma_2}, \tag{3.19}$$

$$U_m = V_m, \quad \delta_{mt} = \frac{\partial U_m}{\partial \nu} - \frac{\partial V_m}{\partial \nu} + \frac{\partial U_{mt}}{\partial \nu} - \frac{\partial V_{mt}}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma_2, \tag{3.20}$$

$$U_m(x,0) = U_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} (u_0, \Phi_j)_1 \Phi_j, \quad U_{m_t}(x,0) = U_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} (u_1, \Phi_j)_1 \Phi_j, \tag{3.21}$$

$$V_m(x,0) = V_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} (v_0, \Psi_j)_2 \Psi_j, \quad V_{m_t}(x,0) = V_{1m}(x) = \sum_{j=1}^{m} (v_1, \Psi_j)_2 \Psi_j, \tag{3.22}$$

$$\delta_m(x,0) = \delta_{0m}(x) = \sum_{j=1}^{m} (\delta_0, e_j)_{\Gamma_2} e_j, \tag{3.23}$$

$$\delta_{m_t}(x,0) = \gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) = \sum_{j=1}^{m} (\gamma_1(u_0 - v_0 + u_1 - v_1), e_j)_{\Gamma_2} e_j. \tag{3.24}$$

Общие результаты о нелинейных системах гарантируют существование решения (U_m, V_m, δ_m), $m \in N$, задачи (3.17)–(3.24) на интервале $[0, T_m]$. Из (3.17)–(3.19) имеем

$$\begin{gathered}(U_{mtt}, \Phi)_1 + (\nabla U_{mt}, \nabla \Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial U_{mt}}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} - \left(\frac{\partial U_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} + \\ + \left(|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, \Phi\right)_1 = (F_1, \Phi)_1,\end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered}(V_{mtt}, \Psi)_2 + (\nabla V_{mt}, \nabla \Psi)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial V_{mt}}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} + \left(\frac{\partial V_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} + \\ + \left(|V_{mt}|^{q_2-1} V_{mt}, \Psi\right)_2 = (F_2, \Psi)_2,\end{gathered} \tag{3.26}$$

$$(M\delta_{mtt} + D\delta_{mt} + K\delta_m, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_{mt}), e)_{\Gamma_2} \tag{3.27}$$

для $\forall \Phi \in \operatorname{Span}\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m, \ldots\}$, $\forall \Psi \in \operatorname{Span}\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m, \ldots\}$, $\forall e \in \operatorname{Span}\{e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots\}$.

Оценка 1. Полагая $\Phi = 2U_{mt}$ в (3.25), $\Psi = 2V_{mt}$ в (3.26), $e = 2\delta_{mt}$ в (3.27), получаем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\|U_{mt}\|_1^2 + 2\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla U_m\|_1^2 - \left(\frac{\partial U_{mt}}{\partial \nu}, \gamma_0(2U_{mt})\right)_{\Gamma_2} - \left(\frac{\partial U_m}{\partial \nu}, \gamma_0(2U_{mt})\right)_{\Gamma_2} + \\ + 2\left(|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, U_{mt}\right)_1 = 2(F_1, U_{mt})_1,\end{gathered}$$

$$\frac{d}{dt}\|V_{mt}\|_2^2 + 2\|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \frac{d}{dt}\|\nabla V_m\|_2^2 + \left(\frac{\partial V_{mt}}{\partial \nu}, \gamma_0(2V_{mt})\right)_{\Gamma_2} + \left(\frac{\partial V_m}{\partial \nu}, \gamma_0(2V_{mt})\right)_{\Gamma_2} +$$
$$+ 2\left(|V_{mt}|^{q_2-1}V_{mt}, V_{mt}\right)_2 = 2(F_2, V_{mt})_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{M}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2 + 2\left\|\sqrt{D}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2 + \frac{d}{dt}\left\|\sqrt{K}\delta_m\right\|_{\Gamma_2}^2 + (\gamma_0(U_{mt}), 2\delta_{mt})_{\Gamma_2} = 0,$$

откуда, используя (3.20), имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta_m\right\|_{\Gamma_2}^2\right) + 2\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{mt}\|_2^2 + 2\left\|\sqrt{D}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+ 2\left(|U_{mt}|^{q_1+1}, 1\right)_1 + 2\left(|V_{mt}|^{q_2+1}, 1\right)_2 = 2(F_1, U_{mt})_1 + 2(F_2, V_{mt})_2.$$

Интегрируя последнее равенство от 0 до t, $t \le T_m$, используя (3.20) и неравенство Юнга, получаем

$$\|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta_m\right\|_{\Gamma_2}^2 + 2\int_0^t\left(\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2\right)ds +$$
$$+ 2\int_0^t\left[\left(|U_{mt}|^{q_1+1}, 1\right)_1 + \left(|V_{mt}|^{q_2+1}, 1\right)_2\right]ds \le \|U_{1m}\|_1^2 + \|\nabla U_{0m}\|_1^2 + \|V_{1m}\|_2^2 + \|\nabla V_{0m}\|_2^2 +$$
$$+ \left\|\sqrt{M}\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m})\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta_{0m}\right\|_{\Gamma_2}^2 + \int_0^t\|F\|_1^2 ds + \int_0^t\|F_2\|_2^2 ds + \int_0^t\left(\|U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2\right)ds,$$

откуда, согласно (2.1), (3.9)–(3.12) и неравенству Гронуолла, получаем оценку 1:

$$\|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_m\|_{a_2}^2 + \int_0^t\left(\|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2\right)ds +$$
$$+ \int_0^t\left[\left(|U_{mt}|^{q_1+1}, 1\right)_1 + \left(|V_{mt}|^{q_2+1}, 1\right)_2\right]ds \le C_1,$$

где C_1 – положительная константа, не зависящая от m.

Оценка 2. Полагая $\Phi = U_{mtt}$ в (3.25), $\Psi = V_{mtt}$ в (3.26), $e = \delta_{mtt}$ в (3.27) и $t = 0$, получаем

$$\|U_{mtt}(0)\|_1^2 = \left(\Delta U_{1m} + \Delta U_{0m} - |U_{1m}|^{q_1-1}U_{1m} + F_1(x,0), U_{mtt}(0)\right)_1 \le$$
$$\le \left\|\Delta U_{1m} + \Delta U_{0m} - |U_{1m}|^{q_1-1}U_{1m} + F_1(x,0)\right\|_1\|U_{mtt}(0)\|_1,$$

$$\|V_{mtt}(0)\|_2^2 = \left(\Delta V_{1m} + \Delta V_{0m} - |V_{1m}|^{q_2-1}V_{1m} + F_2(x,0), V_{mtt}(0)\right)_2 \le$$
$$\le \left\|\Delta V_{1m} + \Delta V_{0m} - |V_{1m}|^{q_2-1}V_{1m} + F_2(x,0)\right\|_2\|V_{mtt}(0)\|_2,$$

$$\left\|\sqrt{M}\delta_{mtt}(0)\right\|_{\Gamma_2}^2 = (-D\gamma_1(U_{0m} - V_{0m}) - K\delta_{0m} - \gamma_0(U_{1m}), \delta_{mtt}(0))_{\Gamma_2} \le$$
$$\le \|-D\gamma_1(U_{0m} - V_{0m} + U_{1m} - V_{1m}) - K\delta_{0m} - \gamma_0(U_{1m})\|_{\Gamma_2}\|\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2},$$

откуда, согласно (2.1), (2.3), (3.9)–(3.12), имеем

$$\|U_{mtt}(0)\|_1^2 + \|V_{mtt}(0)\|_2^2 + \|\delta_{mtt}(0)\|_{\Gamma_2}^2 \le C_2, \tag{3.28}$$

где C_2 – положительная константа, не зависящая от m.

Дифференцируя (3.25), (3.26), (3.27) и полагая $\Phi = 2U_{mtt}$, $\Psi = 2V_{mtt}$, $e = 2\delta_{mtt}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_{mtt}\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2\right) -$$
$$-\left(\frac{\partial U_{mt}}{\partial\nu} - \frac{\partial V_{mt}}{\partial\nu} + \frac{\partial U_{mtt}}{\partial\nu} - \frac{\partial V_{mtt}}{\partial\nu}, \gamma_0(2U_{mtt})\right)_{\Gamma_2} + 2\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + 2\left\|\sqrt{D}\delta_{mtt}\right\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+ (\gamma_0(U_{mtt}), 2\delta_{mtt})_{\Gamma_2} + 2q_1\int_{\Omega_1}|U_{mt}|^{q_1-1}U_{mtt}^2dx + 2q_2\int_{\Omega_2}|V_{mt}|^{q_2-1}V_{mtt}^2dx = 2(F_{1t}, U_{mtt})_1 + 2(F_{2t}, V_{mtt})_2,$$

откуда, используя (3.20) и неравенство Юнга, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_{mtt}\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2\right) + 2\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + 2\|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + 2\left\|\sqrt{D}\delta_{mtt}\right\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+ \frac{8q_1}{(q_1+1)^2}\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(|U_{mt}|^{\frac{q_1-1}{2}}U_{mt}\right)\right)^2dx + \frac{8q_2}{(q_2+1)^2}\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(|V_{mt}|^{\frac{q_2-1}{2}}V_{mt}\right)\right)^2dx \le \|F_{1t}\|_1^2 + \|F_{2t}\|_2^2 + \|U_{mtt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2.$$

Интегрируя последнее неравенство вдоль $(0,t)$ и используя (3.9)–(3.12), (3.28), согласно неравенству Гроноулла, получаем оценку 2:

$$\|U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla U_{mt}\|_1^2 + \|V_{mtt}\|_2^2 + \|\nabla V_{mt}\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_{mtt}\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta_{mt}\right\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+ 2\int_0^t\left(\|\nabla U_{mtt}\|_1^2 + \|\nabla V_{mtt}\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_{mtt}\right\|_{\Gamma_2}^2\right)ds + \frac{8q_1}{(q_1+1)^2}\int_0^t\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(|U_{mt}|^{\frac{q_1-1}{2}}U_{mt}\right)\right)^2dxds +$$
$$+ \frac{8q_2}{(q_2+1t)^2}\int_0^t\int_{\Omega_2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(|V_{mt}|^{\frac{q_2-1}{2}}V_{mt}\right)\right)^2dxds \le C_3,$$

где C_3 – положительная константа, не зависящая от m.

Предельный переход. Используя метод компактности и оценки 1, 2, получаем, что существуют U, V, δ такие, что после выделения быть может подпоследовательности, при $m \to \infty$

$$\begin{aligned}
&U_m \to U \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty\left(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\bigcap H^2(\Omega_1)\right),\\
&V_m \to V \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(0,T; H^2(\Omega_2)),\\
&U_{mt} \to U_t \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)),\\
&V_{m_t} \to V_t \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(0,T; H^1(\Omega_2)),\\
&U_{m_{tt}} \to U_{tt} \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega_1)),\\
&V_{m_{tt}} \to V_{tt} \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega_2)),\\
&\delta_m \to \delta \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_2)),\\
&\delta_{m_t} \to \delta_t \quad \text{*-слабо в} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_2)),\\
&\delta_{m_{tt}} \to \delta_{tt} \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T; L^2(\Gamma_2)).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

В силу теоремы Реллиха–Кондрашова (см. [21]), получаем, что

$$U_m \to U \quad \text{сильно в} \quad C(0,T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)), \quad V_m \to V \quad \text{сильно в} \quad C(0,T; H^1(\Omega_2)),$$

и, наконец,

$$U_m \to U \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_1, \quad V_m \to V \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_2;$$

поэтому

$$|U_{mt}|^{q_1-1}U_{mt} \to |U_t|^{q_1-1}U_t \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_1,$$
$$|V_{mt}|^{q_2-1}V_{mt} \to |V_t|^{q_2-1}V_t \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_2.$$

Так как

$$|U_{mt}|^{q_1-1}U_{mt} \quad \text{ограничены в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)),$$
$$|V_{mt}|^{q_2-1}V_{mt} \quad \text{ограничены в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} &|U_{mt}|^{q_1-1}U_{mt} \to |U_t|^{q_1-1}U_t \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega_1)),\\ &|V_{mt}|^{q_2-1}V_{mt} \to |V_t|^{q_2-1}V_t \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega_2)).\end{aligned} \tag{3.30}$$

В силу (3.29) и (3.30) можно перейти к пределу в (3.25)–(3.27) и (3.20) при $m \to \infty$:

$$(U_{tt},\Phi)_1 + (\nabla U_t,\nabla\Phi)_1 - \left(\frac{\partial U_t}{\partial\nu},\gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} + (\nabla U,\nabla\Phi)_1 - \left(\frac{\partial U}{\partial\nu},\gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} + \left(|U_t|^{q_1-1}U_t,\Phi\right)_1 = (F_1,\Phi)_1, \tag{3.31}$$

$$(V_{tt},\Psi)_2 + (\nabla V_t,\nabla\Psi)_2 + \left(\frac{\partial V_t}{\partial\nu},\gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} + (\nabla V,\nabla\Psi)_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial\nu},\gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} + \left(|V_t|^{q_2-1}V_t,\Psi\right)_2 = (F_2,\Psi)_2, \tag{3.32}$$

$$(M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_t), e)_{\Gamma_2} \tag{3.33}$$

для любого $(\Phi,\Psi,e)\in W$, п. в. в $(0,T)$ и

$$U = V, \quad \delta_t = \frac{\partial U}{\partial\nu} - \frac{\partial V}{\partial\nu} + \frac{\partial U_t}{\partial\nu} - \frac{\partial V_t}{\partial\nu}, \quad x\in\Gamma_2.$$

Из (3.31) и (3.32) получаем, что

$$\int_{\Omega_1} U_{tt}\Phi dx - (\Delta U_t,\Phi)_{D'(\Omega_1)\times D(\Omega_1)} - (\Delta U,\Phi)_{D'(\Omega_1)\times D(\Omega_1)} + \int_{\Omega_1}|U_t|^{q_1-1}U_t\Phi dx = \int_{\Omega_1} F_1\Phi dx,$$
$$\int_{\Omega_1} V_{tt}\Psi dx - (\Delta V_t,\Psi)_{D'(\Omega_2)\times D(\Omega_2)} - (\Delta V,\Psi)_{D'(\Omega_2)\times D(\Omega_2)} + \int_{\Omega_1}|V_t|^{q_2-1}V_t\Psi dx = \int_{\Omega_1} F_2\Psi dx$$

для любых $\Phi\in D(\Omega_1)$, $\Psi\in D(\Omega_2)$, п. в. в $(0,T)$. Поэтому $\Delta U(t)\in L^2(\Omega_1)$, $\Delta V(t)\in L^2(\Omega_2)$ п. в. в $(0,T)$ и

$$U_{tt} - \Delta U_t - \Delta U + |U_t|^{q_1-1}U_t = F_1 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_1\times(0,T),$$
$$V_{tt} - \Delta V_t - \Delta V + |V_t|^{q_2-1}V_t = F_2 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega_2\times(0,T).$$

В силу (3.33) (U,V,δ) удовлетворяет граничному условию (3.3).

Начальные условия (3.6)–(3.8) доказываются стандартным путем и это завершает доказательство существования решений.

Единственность. Пусть (U_1,V_1,δ_1) и (U_2,V_2,δ_2) – два решения задачи (3.1)–(3.8). Тогда для $U_1-U_2=\tilde U$, $V_1-V_2=\tilde V$, $\delta_1-\delta_2=\tilde\delta$ имеем

$$\begin{aligned}&(\tilde U_{tt},\Phi)_1 + (\nabla\tilde U_t,\nabla\Phi)_1 - \left(\frac{\partial\tilde U_t}{\partial\nu},\gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} + (\nabla\tilde U,\nabla\Phi)_1 - \left(\frac{\partial\tilde U}{\partial\nu},\gamma_0(\Phi)\right)_{\Gamma_2} +\\ &\quad + \int_{\Omega_1}\left(|U_{1t}|^{q_1-1}U_{1t} - |U_{2t}|^{q_1-1}U_{2t}\right)\Phi dx = 0,\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}&(\tilde V_{tt},\Psi)_2 + (\nabla\tilde V_t,\nabla\Psi)_2 + \left(\frac{\partial\tilde V_t}{\partial\nu},\gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} + (\nabla\tilde V,\nabla\Psi)_2 + \left(\frac{\partial\tilde V}{\partial\nu},\gamma_0(\Psi)\right)_{\Gamma_2} +\\ &\quad + \int_{\Omega_2}\left(|V_{1t}|^{q_2-1}V_{1t} - |V_{2t}|^{q_2-1}V_{2t}\right)\Psi dx = 0,\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$(M\tilde\delta_{tt} + D\tilde\delta_t + K\tilde\delta, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(\tilde U_t), e)_{\Gamma_2} \tag{3.36}$$

для любого $(\Phi,\Psi,e)\in W$, п.в. в $(0,T)$;

$$\tilde U = \tilde V, \quad \tilde\delta_t = \frac{\partial\tilde U}{\partial\nu} - \frac{\partial\tilde V}{\partial\nu} + \frac{\partial\tilde U_t}{\partial\nu} - \frac{\partial\tilde V_t}{\partial\nu} \quad \text{п.в. в} \quad \Gamma_2\times(0,T), \tag{3.37}$$

$$\tilde U(x,0) = 0, \quad \tilde U_t(x,0) = 0, \quad x\in\Omega_1, \tag{3.38}$$

$$\tilde V(x,0) = 0, \quad \tilde V_t(x,0) = 0, \quad x\in\Omega_2, \tag{3.39}$$

$$\tilde\delta(x,0) = 0, \quad \tilde\delta_t(x,0) = 0, \quad x\in\Gamma_2. \tag{3.40}$$

Полагая $\Phi = 2\tilde{U}_t$ в (3.34), $\Psi = 2\tilde{V}_t$ в (3.35), $e = 2\tilde{\delta}_t$ в (3.36) и используя (3.37), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla\tilde{V}\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\tilde{\delta}\right\|_{\Gamma_2}^2\right) + 2\|\nabla\tilde{U}_t\|_1^2 + 2\|\nabla\tilde{V}_t\|_2^2 + 2\left\|\sqrt{D}\tilde{\delta}_t\right\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+ 2\left(|U_{1t}|^{q_1-1}U_{1t} - |U_{2t}|^{q_1-1}U_{2t}, U_{1t} - U_{2t}\right)_1 + 2\left(|V_{1t}|^{q_2-1}V_{1t} - |V_{2t}|^{q_2-1}V_{2t}, V_{1t} - V_{2t}\right)_2 = 0.$$

А поскольку

$$\left(|U_{1t}|^{q_1-1}U_{1t} - |U_{2t}|^{q_1-1}U_{2t}, U_{1t} - U_{2t}\right)_1 \geq 0,$$
$$\left(|V_{1t}|^{q_2-1}V_{1t} - |V_{2t}|^{q_2-1}V_{2t}, V_{1t} - V_{2t}\right)_2 \geq 0,$$

то в силу (3.38)–(3.40) имеем

$$\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla\tilde{V}\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\tilde{\delta}\right\|_{\Gamma_2}^2 + 2\int_0^t\left(\|\nabla\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{V}_t\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\tilde{\delta}_t\right\|_{\Gamma_2}^2\right)ds \leq 0.$$

Отсюда получаем, что $\tilde{U} = 0$, $\tilde{V} = 0$, $\tilde{\delta} = 0$.

Лемма 3.1 доказана.

Для заданных $u \in C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega_1))$, $v \in C(0,T;H^1(\Omega_2)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega_2))$, удовлетворяющих условию $u|_{\Gamma_2} = v|_{\Gamma_2}$, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered}
U_{tt} - \Delta U_t - \Delta U + |U_t|^{q_1-1}U_t = f(u) \quad \text{в} \quad \Omega_1\times(0,T),\\
V_{tt} - \Delta V_t - \Delta V + |V_t|^{q_2-1}V_t = g(v) \quad \text{в} \quad \Omega_2\times(0,T),\\
M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -U_t \quad \text{на} \quad \Gamma_2\times(0,T),\\
U = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\times(0,T),\\
U = V, \quad \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial U_t}{\partial \nu} - \frac{\partial V_t}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Gamma_2\times(0,T),\\
U(x,0) = u_0(x), \quad U_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}_1,\\
V(x,0) = v_0(x), \quad V_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}_2,\\
\delta(x,0) = \delta_0(x), \quad \delta_t(x,0) = \delta_1(x), \quad x \in \bar{\Gamma}_2.
\end{gathered} \tag{3.41}$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.4) *и* $u_0 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$, $u_1 \in L^{2q_1}(\Omega_1)$, $v_0 \in H^1(\Omega_2)$, $v_1 \in L^{2q_2}(\Omega_2)$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_2)$, $\delta_1 \in L^2(\Gamma_2)$. *Тогда существует* $T > 0$ *и единственное решение* (U,V,δ) *задачи* (3.41) *такое, что*

$$U \in C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)), \quad U_t \in C(0,T;L^2(\Omega_1)) \cap L^{q_1+1}(\Omega_1\times[0,T)),$$
$$V \in C(0,T;H^1(\Omega_2)), \quad V_t \in C(0,T;L^2(\Omega_2)) \cap L^{q_2+1}(\Omega_2\times[0,T)),$$
$$\delta \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_2)), \quad \delta_t \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)).$$

Доказательство. Аппроксимируем

$$u \in C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1))\bigcap C^1(0,T;L^2(\Omega_1))$$

и

$$v \in C(0,T;H^1(\Omega_2))\bigcap C^1(0,T;L^2(\Omega_2))\left(u|_{\Gamma_2} = v|_{\Gamma_2}\right)$$

последовательностями $\{u_\mu\}_{\mu\in N}$ в $C(0,T;C_0^\infty(\Omega_1))$ и $\{v_\mu\}_{\mu\in N}$ в $C(0,T;C_0^\infty(\Omega_2))$ $\left(u_\mu|_{\Gamma_2} = v_\mu|_{\Gamma_2}\right)$ соответственно (см. [22], [23]). Затем проаппроксимируем начальные данные $u_0 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$, $v_0 \in H^1(\Omega_2)$, $u_1 \in L^{2q_1}(\Omega_1)$, $v_1 \in L^{2q_2}(\Omega_2)$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_2)$ и $\delta_1 \in L^2(\Gamma_2)$ последовательностями $\{u^0_\mu\}_{\mu\in N}$ в

$H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\cap H^2(\Omega_1)$, $\{v^0_\mu\}_{\mu\in N}$ в $H^2(\Omega_2)$, $\{u^1_\mu\}_{\mu\in N}$ в $C^\infty(\Omega_1)$, $\{v^1_\mu\}_{\mu\in N}$ в $C^\infty(\Omega_2)$, $\{\delta^0_\mu\}_{\mu\in N}$ в $C^\infty(\Gamma_2)$ и $\{\delta^1_\mu\}_{\mu\in N}$ в $C^\infty(\Gamma_2)$ соответственно. Рассмотрим следующее множество задач:

$$\begin{gathered}
U_{\mu tt}-\Delta U_{\mu t}-\Delta U_\mu+\left|U_{\mu t}\right|^{q_1-1}U_{\mu t}=f(u_\mu)\quad \text{в}\quad \Omega_1\times(0,T),\\
V_{\mu tt}-\delta V_{\mu t}-\Delta V_\mu+\left|V_{\mu t}\right|^{q_2-1}V_{\mu t}=g(v_\mu)\quad \text{в}\quad \Omega_2\times(0,T),\\
M\delta_{\mu tt}+D\delta_{\mu t}+K\delta_\mu=-U_{\mu t}\quad \text{на}\quad \Gamma_2\times(0,T),\\
U_\mu=0\quad \text{на}\quad \Gamma_1\times(0,T),\\
U_\mu=V_\mu,\quad \delta_{\mu t}=\frac{\partial U_\mu}{\partial\nu}-\frac{\partial V_\mu}{\partial\nu}+\frac{\partial U_{\mu t}}{\partial\nu}-\frac{\partial V_{\mu t}}{\partial\nu}\quad \text{на}\quad \Gamma_2,\\
U_\mu(x,0)=u^0_\mu(x),\quad U_{\mu t}(x,0)=u^1_\mu(x),\quad x\in\bar\Omega_1,\\
V_\mu(x,0)=v^0_\mu(x),\quad V_{\mu t}(x,0)=v^1_\mu(x),\quad x\in\bar\Omega_2,\\
\delta_\mu(x,0)=\delta^0_\mu(x),\quad \delta_{\mu t}(x,0)=\delta^1_\mu(x),\quad x\in\bar\Gamma_2.
\end{gathered}\tag{3.42}$$

Ясно, что $f(u_\mu)\in H^1(0,T;L^2(\Omega_1))$, $g(v_\mu)\in H^1(0,T;L^2(\Omega_2))$. Следовательно, из леммы 1 вытекает существование последовательности единственных решений (U_μ,V_μ,δ_μ) задачи (3.42), удовлетворяющих условиям (3.13)–(16). Теперь докажем сходимость последовательности (U_μ,V_μ,δ_μ) к решению (U,V,δ) задачи (3.41); для этого достаточно доказать, что последовательность (U_μ,V_μ,δ_μ) удовлетворяет критерию Коши в пространстве

$$\begin{gathered}
Y_T=\Big\{(U,V,\delta):U\in C(0,T;H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1))\bigcap C^1(0,T;L^2(\Omega_1)),V\in C(0,T;H^1(\Omega_2))\bigcap C^1(0,T;L^2(\Omega_2)),\\
\delta\in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_2)),\quad \delta_t\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))\Big\},
\end{gathered}$$

которое снабжается нормой

$$\|(U,V,\delta)\|^2_{Y_T}=\max_{0\le t\le T}\left(\|U_t\|_1^2+\|\nabla U\|_1^2+\|V_t\|_2^2+\|\nabla V\|_2^2+\|\delta_t\|^2_{\Gamma_2}+\|\delta\|^2_{\Gamma_2}\right)+2\int_0^t\|\delta_t\|^2_{\Gamma_2}ds.$$

Положив $\tilde u=u_\mu-u_\tau$, $\tilde v=v_\mu-v_\tau$, $\tilde U=U_\mu-U_\tau$, $\tilde V=V_\mu-V_\tau$ и $\tilde\delta=\delta_\mu-\delta_\tau$, имеем

$$\begin{gathered}
\tilde U_{tt}-\Delta\tilde U_t-\Delta\tilde U+\left|U_{\mu t}\right|^{q_1-1}U_{\mu t}-\left|U_{\tau t}\right|^{q_1-1}U_{\tau t}=f(u_\mu)-f(u_\tau)\quad \text{в}\quad \Omega_1\times(0,T),\\
\tilde U_{tt}-\Delta\tilde U_t-\Delta\tilde V+\left|V_{\mu t}\right|^{q_2-1}V_{\mu t}-\left|V_{\tau t}\right|^{q_2-1}V_{\tau t}=g(v_\mu)-g(v_\tau)\quad \text{в}\quad \Omega_2\times(0,T),\\
M\tilde\delta_{tt}+D\tilde\delta_t+K\tilde\delta=-\tilde U_t\quad \text{на}\quad \Gamma_2\times(0,T),\\
\tilde U=0\quad \text{на}\quad \Gamma_1\times(0,T),\\
\tilde U=\tilde V,\quad \tilde\delta_t=\frac{\partial\tilde U}{\partial\nu}-\frac{\partial\tilde V}{\partial\nu}+\frac{\partial\tilde U_t}{\partial\nu}-\frac{\partial\tilde V_t}{\partial\nu}\quad \text{на}\quad \Gamma_2,\\
\tilde U(x,0)=\tilde U_0(x)=u^0_\mu(x)-u^0_\tau(x),\quad \tilde U_t(x,0)=\tilde U_1(x)=u^1_\mu(x)-u^1_\tau(x),\quad x\in\bar\Omega_1,\\
\tilde V(x,0)=\tilde V_0(x)=v^0_\mu(x)-v^0_\tau(x),\quad \tilde V_t(x,0)=\tilde V_1(x)=v^1_\mu(x)-v^1_\tau(x),\quad x\in\bar\Omega_2,\\
\tilde\delta(x,0)=\tilde\delta_0(x)=\delta^0_\mu(x)-\delta^0_\tau(x),\quad \tilde\delta_t(x,0)=\tilde\delta_1(x)=\delta^1_\mu(x)-\delta^1_\tau(x),\quad x\in\bar\Gamma_2.
\end{gathered}\tag{3.43}$$

Умножая первое уравнение системы (3.43) на $2\tilde U_t$, второе уравнение на $2\tilde V_t$, третье уравнение на $2\tilde\delta_t$ и интегрируя их вдоль $\Omega_1\times(0,T)$, $\Omega_2\times(0,T)$, $\Gamma_2\times(0,T)$, соответственно, в силу (3.43) получаем

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\|\tilde U_t\|_1^2+\|\nabla\tilde U\|_1^2+\|\tilde V_t\|_2^2+\|\nabla\tilde V\|_2^2+\left\|\sqrt{M}\tilde\delta_t\right\|^2_{\Gamma_2}+\left\|\sqrt{K}\tilde\delta\right\|^2_{\Gamma_2}\right)+\\
+2\left\|\nabla\tilde U_t\right\|_1^2+2\left\|\nabla\tilde V_t\right\|_2^2+2\left\|\sqrt{D}\tilde\delta_t\right\|^2_{\Gamma_2}\le 2(f(u_\mu)-f(u_\tau),\tilde U_t)_1+2(g(v_\mu)-g(v_\tau),\tilde V_t)_2.
\end{gathered}\tag{3.44}$$

Используя неравенство Гёльдера $\left(\frac{1}{n}+\frac{n-2}{2n}+\frac{1}{2}=1\right)$ и условие (2.2), оценим правую часть неравенства (3.44):

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_1}(f(u_\mu)-f(u_\tau))\tilde U_t dx=\int_{\Omega_1}f'(\theta u_\mu+(1-\theta)u_\tau)|\tilde u||\tilde U_t|\,dx\le\\ \le c_2\left(\|u_\mu\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}+\|u_\tau\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}\right)\|\tilde u\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_1)}\|\tilde U_t\|_1\quad(0<\theta<1);\end{gathered}\tag{3.45}$$

аналогично,

$$\int_{\Omega_2}(g(v_\mu)-g(v_\tau))\tilde V_t dx\le c_4\left(\|v_\mu\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}+\|v_\tau\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}\right)\|\tilde v\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_2)}\|\tilde V_t\|_2.\tag{3.46}$$

Согласно вложению Соболева $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)\mapsto L^{2n/(n-2)}(\Omega_1)$, неравенству Фридрихса и условию $\tilde u|_{\Gamma_2}=\tilde v|_{\Gamma_2}$ получаем, что

$$\|\tilde u\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_1)}+\|\tilde v\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_2)}\le C_4\left(\|\nabla\tilde u\|_1+\|\nabla\tilde v\|_2\right),$$

где C_4 – положительная константа, зависящая от Ω_1, Ω_2; аналогично, в силу условия (2.3) имеем

$$\|u_\mu\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}+\|u_\tau\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}+\|v_\mu\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}+\|v_\tau\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}\le C_5\left(\|\nabla u_\mu\|_1^{p-1}+\|\nabla u_\tau\|_1^{p-1}+\|\nabla v_\mu\|_2^{p-1}+\|\nabla v_\tau\|_2^{p-1}\right),$$

где C_5 – положительная константа, зависящая только от Ω_1, Ω_2 и p. Используя эти неравенства, из (3.45), (3.46) получаем

$$\begin{gathered}(f(u_\mu)-f(u_\tau),\tilde U_t)_1+(g(v_\mu)-g(v_\tau),\tilde V_t)_2\le\max\{c_2,c_4\}\le\\ \le\left(\|u_\mu\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}+\|u_\tau\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}+\|v_\mu\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}+\|v_\tau\|^{p-1}_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}\right)\left(\|\tilde u\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_1)}+\|\tilde v\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_2)}\right)\left(\|\tilde U_t\|_1+\|\tilde V_t\|_2\right)\le\\ \le C_6\left(\|\nabla u_\mu\|_1^{p-1}+\|\nabla u_\tau\|_1^{p-1}+\|\nabla v_\mu\|_2^{p-1}+\|\nabla v_\tau\|_2^{p-1}\right)\left(\|\nabla\tilde u\|_1+\|\nabla\tilde v\|_2\right)\left(\|\tilde U_t\|_1+\|\tilde V_t\|_2\right),\end{gathered}\tag{3.47}$$

где $C_6=\max\{c_2,c_4\}C_4C_5$. Учитывая (3.47) в (3.44), имеем

$$\begin{gathered}\|\tilde U_t\|_1^2+\|\nabla\tilde U\|_1^2+\|\tilde V_t\|_2^2+\|\nabla\tilde V\|_2^2+\|\sqrt{M}\tilde\delta_t\|^2_{\Gamma_2}+\|\sqrt{K}\tilde\delta\|^2_{\Gamma_2}+2\int_0^t\left(\|\nabla\tilde U_t\|_1^2+\|\nabla\tilde V_t\|_2^2+\|\sqrt{D}\tilde\delta_t\|^2_{\Gamma_2}\right)ds\le\\ \le\|\tilde U_1\|_1^2+\|\nabla\tilde U_0\|_1^2+\|\tilde V_1\|_2^2+\|\nabla\tilde V_0\|_2^2+\|\sqrt{M}\tilde\delta_1\|^2_{\Gamma_2}+\|\sqrt{K}\tilde\delta_0\|^2_{\Gamma_2}+\\ +2C_6\int_0^t\left(\|\nabla u_\mu\|_1^{p-1}+\|\nabla u_\tau\|_1^{p-1}+\|\nabla v_\mu\|_2^{p-1}+\|\nabla v_\tau\|_2^{p-1}\right)\left(\|\nabla\tilde u\|_1+\|\nabla\tilde v\|_2\right)\left(\|\tilde U_t\|_1+\|\tilde V_t\|_2\right)ds.\end{gathered}$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\begin{gathered}\|\tilde U_t\|_1^2+\|\nabla\tilde U\|_1^2+\|\tilde V_t\|_2^2+\|\nabla\tilde V\|_2^2+\|\tilde\delta_t\|^2_{\Gamma_2}+\|\tilde\delta\|^2_{\Gamma_2}+\int_0^t\left(\|\nabla\tilde U_t\|_1^2+\|\nabla\tilde V_t\|_2^2+\|\tilde\delta_t\|^2_{\Gamma_2}\right)ds\le\\ \le\frac{1}{C_7}\left(\|\tilde U_1\|_1^2+\|\nabla\tilde U_0\|_1^2+\|\tilde V_1\|_2^2+\|\nabla\tilde V_0\|_2^2+\max_{x\in\Gamma_2}M(x)\|\tilde\delta_1\|^2_{\Gamma_2}+\max_{x\in\Gamma_2}K(x)\|\tilde\delta_0\|^2_{\Gamma_2}\right)+\\ +\frac{K_1}{C_7}\int_0^t\left(\|\nabla\tilde u\|_1+\|\nabla\tilde v\|_2\right)\left(\|\tilde U_t\|_1+\|\tilde V_t\|_2\right)ds,\end{gathered}$$

где $C_7=\min\{1,m_0,2d_0,k_0\}$, $\min\limits_{x\in\bar\Gamma_2}M(x)=m_0>0$, $\min\limits_{x\in\bar\Gamma_2}D(x)=d_0>0$, $\min\limits_{x\in\bar\Gamma_2}K(x)=k_0>0$ и K_1 – положительная константа, зависящая только от Ω_1, Ω_2, p и T. Таким образом, в силу леммы Гронуолла имеем

$$\|(\tilde U,\tilde V,\tilde\delta)\|^2_{Y_T}\le K_2\left(\|\tilde U_1\|_1^2+\|\nabla\tilde U_0\|_1^2+\|\tilde V_1\|_2^2+\|\nabla\tilde V_0\|_2^2+\max_{x\in\Gamma_2}M(x)\|\tilde\delta_1\|^2_{\Gamma_2}+\max_{x\in\Gamma_2}K(x)\|\tilde\delta_0\|^2_{\Gamma_2}\right)+K_3T\|(\tilde u,\tilde v,\tilde\delta)\|^2_{Y_T},$$

где K_2, K_3 – положительные константы, зависящие только от Ω_1, Ω_2, p и T. Так как $\{u^0_\mu\}$, $\{v^0_\mu\}$, $\{u^1_\mu\}$, $\{v^1_\mu\}$, $\{\delta^0_\mu\}$, $\{\delta^1_\mu\}$ являются сходящимися последовательностями в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$, $H^1(\Omega_2)$, $L^2(\Omega_1)$, $L^2(\Omega_2)$,

$L^2(\Gamma_2)$, $L^2(\Gamma_2)$ соответственно, то заключаем, что $(U_\mu, V_\mu, \delta_\mu)$ удовлетворяет критерию Коши в Y_T. Следовательно, $(U_\mu, V_\mu, \delta_\mu)$ сходится к пределу $(U, V, \delta) \in Y_T$. Затем, по той же процедуре, использованной в [22], можно доказать, что этот предел является решением задачи (3.41).

Лемма 3.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Для $T > 0$ определим выпуклое замкнутое подпространсто X_T пространства Y_T:

$$X_T = \left\{(U,V,\delta) \in Y_T:\ U\big|_{t=0} = u_0,\ V\big|_{t=0} = v_0,\ U_t\big|_{t=0} = u_1,\ V_t\big|_{t=0} = v_1,\ \delta\big|_{t=0} = \delta_0,\ \delta_t\big|_{t=0} = \delta_1\right\}.$$

Пусть

$$B_R(X_T) = \left\{(U,V,\delta) \in X_T : \|(U,V,\delta)\|_{Y_T} \le R\right\}$$

для $R > 0$.

Тогда из леммы 2 вытекает, что для некоторого $(u, v, \delta) \in X_T$ можем определить $(U,V,\delta) = \Phi(u,v,\delta)$, как решение задачи (3.41), соответствующее (u,v,δ).

Докажем, что Φ – сжимающее отображение такое, что $\Phi(B_R(X_T)) \subset B_R(X_T)$. Действительно, если $(u,v,\delta) \in B_R(X_T)$ и $(U,V,\delta) = \Phi(u,v,\delta)$, то для любого $t \in (0,T)$, имеем

$$C_7\left(\|U_t\|_1^2 + \|\nabla U\|_1^2 + \|V_t\|_2^2 + \|\nabla V\|_2^2 + \|\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta\|_{\Gamma_2}^2 + \int_0^t \|\nabla U_t\|_1^2 ds + \int_0^t \|\nabla V_t\|_2^2 ds + \int_0^t \|\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 ds\right) +$$
$$+ 2\int_0^t \int_{\Omega_1} |U_t|^{q_1+1} dxds + 2\int_0^t \int_{\Omega_2} |V_t|^{q_2+1} dxds \le \|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\delta_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_0\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+ 2\int_0^t \int_{\Omega_1} f(u) U_t dxds + 2\int_0^t \int_{\Omega_2} g(v) V_t dxds.$$

Так как $(u, \upsilon, \delta) \in B_R(X_T)$, то в силу (2.2) и неравенства Гёльдера получаем

$$C_7\left(\|U_t\|_1^2 + \|\nabla U\|_1^2 + \|V_t\|_2^2 + \|\nabla V\|_2^2 + \|\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta\|_{\Gamma_2}^2 + \int_0^t \|\nabla U_t\|_1^2 ds + \int_0^t \|\nabla V_t\|_2^2 ds + \int_0^t \|\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 ds\right) +$$
$$+ 2\int_0^t \int_{\Omega_1} |U_t|^{q_1+1} dxds + 2\int_0^t \int_{\Omega_2} |V_t|^{q_2+1} dxds \le \|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\delta_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_0\|_{\Gamma_2}^2 +$$
$$+ 2C_8 R^p \int_0^t \left(\|U_t\|_1 + \|V_t\|_2\right) ds,$$

откуда

$$\|(U,V,\delta)\|_{Y_T}^2 \le K_4\left(\|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\delta_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_0\|_{\Gamma_2}^2\right) + K_4 R^p T \|(U,V,\delta)\|_{Y_T}, \tag{3.48}$$

где $C_8 = \max\{c_1, c_3\}$ и $K_4 = \max\left\{\dfrac{1}{C_7}, \dfrac{2C_8}{C_7}\right\}$ не зависит от R. Используя неравенство Юнга в последнем члене правой части неравенства (3.48), получаем

$$\|(U,V,\delta)\|_{Y_T}^2 \le K_4\left(\|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\delta_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_0\|_{\Gamma_2}^2\right) + R^p T\left(\frac{R^p T}{2} K_4^2 + \frac{1}{2R^p T}\|(U,V,\delta)\|_{Y_T}^2\right),$$

откуда имеем

$$\|(U,V,\delta)\|_{Y_T}^2 \le 2K_4\left(\|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\delta_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_0\|_{\Gamma_2}^2\right) + R^{2p} T^2 K_4^2. \tag{3.49}$$

Выберем R и T таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$2K_4\left(\|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\delta_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_0\|_{\Gamma_2}^2\right) \le \frac{1}{2} R^2$$

и

$$R^{2p}T^2K_4^2 \le \frac{1}{2}R^2.$$

Тогда из (3.49) получаем, что $(U,V,\delta)\in B_R(X_T)$.

Теперь проверим, что Φ является сжимающим отображением. Положив $\tilde{u} = u - \bar{u}$, $\tilde{v} = v - \bar{v}$, $\tilde{U} = U - \bar{U}$, $\tilde{V} = V - \bar{V}$ и $\tilde{\delta} = \delta - \bar{\delta}$, где $(U,V,\delta) = \Phi(u,v,\delta)$, $(\bar{U},\bar{V},\bar{\delta}) = \Phi(\bar{u},\bar{v},\bar{\delta})$, для $(\tilde{U},\tilde{V},\tilde{\delta})$ имеем

$$\begin{gathered}
\tilde{U}_{tt} - \Delta\tilde{U}_t - \Delta\tilde{U} + |U_t|^{q_1-1}U_t - |\bar{U}_t|^{q_1-1}\bar{U}_t = f(u) - f(\bar{u}) \quad \text{в} \quad \Omega_1\times(0,T),\\
\tilde{V}_{tt} - \Delta\tilde{V}_t - \Delta\tilde{V} + |V_t|^{q_2-1}V_t - |\bar{V}_t|^{q_2-1}\bar{V}_t = g(v) - g(\bar{v}) \quad \text{в} \quad \Omega_2\times(0,T),\\
M\tilde{\delta}_{tt} + D\tilde{\delta}_t + K\tilde{\delta} = -\tilde{U}_t \quad \text{на} \quad \Gamma_2\times(0,T),\\
\tilde{U} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\times(0,T),\\
\tilde{U} = \tilde{V}, \quad \tilde{\delta}_t = \frac{\partial\tilde{U}}{\partial\nu} - \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\nu} + \frac{\partial\tilde{U}_t}{\partial\nu} - \frac{\partial\tilde{V}_t}{\partial\nu} \quad \text{на} \quad \Gamma_2,\\
\tilde{U}(x,0) = 0, \quad \tilde{U}_t(x,0) = 0, \quad x\in\bar{\Omega}_1,\\
\tilde{V}(x,0) = 0, \quad \tilde{V}_t(x,0) = 0, \quad x\in\bar{\Omega}_2,\\
\tilde{\delta}(x,0) = 0, \quad \tilde{\delta}_t(x,0) = 0, \quad x\in\bar{\Gamma}_2.
\end{gathered} \tag{3.50}$$

Умножая первое уравнение на $\tilde{U}_t$, второе уравнение на $\tilde{V}_t$ и третье уравнение на $\tilde{\delta}_t$ в (3.50) и интегрируя вдоль $(0,t)\times\Omega_1$, $(0,t)\times\Omega_2$ и $(0,t)\times\Gamma_2$, соответственно, получаем

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla\tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2\right) + 2\|\nabla\tilde{U}_t\|_1^2 + 2\|\nabla\tilde{V}_t\|_2^2 + 2\|\sqrt{D}\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 +\\
+ 2\left(|U_t|^{q_1-1}U_t - |\bar{U}_t|^{q_1-1}\bar{U}_t, U_t - \bar{U}_t\right)_1 + 2\left(|V_t|^{q_2-1}V_t - |\bar{V}_t|^{q_2-1}\bar{V}_t, V_t - \bar{V}_t\right)_2 =\\
= 2\left(f(u) - f(\bar{u}), \tilde{U}_t\right)_1 + 2\left(g(v) - g(\bar{v}), \tilde{V}_t\right)_2.
\end{gathered} \tag{3.51}$$

Так как

$$\begin{gathered}
\left(|U_t|^{q_1-1}U_t - |\bar{U}_t|^{q_1-1}\bar{U}_t, U_t - \bar{U}_t\right)_1 \ge 0, \quad \left(|V_t|^{q_2-1}V_t - |\bar{V}_t|^{q_2-1}\bar{V}_t, V_t - \bar{V}_t\right)_2 \ge 0,\\
\min_{x\in\bar{\Gamma}_2} M(x) = m_0 > 0, \quad \min_{x\in\bar{\Gamma}_2} D(x) = d_0 > 0, \quad \min_{x\in\bar{\Gamma}_2} K(x) = k_0 > 0
\end{gathered}$$

и, в силу (3.47):

$$\begin{gathered}
\left(f(u) - f(\bar{u}), \tilde{U}_t\right)_1 + \left(g(v) - g(\bar{v}), \tilde{V}_t\right)_2 \le C_6\left(\|\nabla u\|_1^{p-1} + \|\nabla\bar{u}\|_1^{p-1} + \|\nabla v\|_2^{p-1} + \|\nabla\bar{v}\|_2^{p-1}\right)\times\\
\times\left(\|\nabla\tilde{u}\|_1 + \|\nabla\tilde{v}\|_2\right)\left(\|\tilde{U}_t\|_1 + \|\tilde{V}_t\|_2\right),
\end{gathered}$$

то из (3.51) имеем

$$\begin{gathered}
\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla\tilde{V}\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 + 2\int_0^t\left(\|\nabla\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2\right)ds \le\\
\le 2C_6\int_0^t\left(\|\nabla u\|_1^{p-1} + \|\nabla\bar{u}\|_1^{p-1} + \|\nabla v\|_2^{p-1} + \|\nabla\bar{v}\|_2^{p-1}\right)\left(\|\nabla\tilde{u}\|_1 + \|\nabla\tilde{v}\|_2\right)\left(\|\tilde{U}_t\|_1 + \|\tilde{V}_t\|_2\right)ds.
\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\left\|(\tilde{U},\tilde{V},\tilde{\delta})\right\|_{Y_T} \le K_5TR^{p-1}\left\|(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\delta})\right\|_{Y_T}, \tag{3.52}$$

где K_5 – положительная константа, зависящая только от Ω_1, Ω_2, p. Выберем T таким образом, чтобы выполнялось неравенство $K_5TR^{p-1} < 1$. Тогда из (3.52) вытекает, что Φ является сжимающим отображением. Отсюда согласно принципу сжимающих отображений получаем существование единственного решения (U,V,δ) уравнения $(U,V,\delta) = \Phi(U,V,\delta)$. Теорема 2.1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2

Пусть (u,v,δ) – слабое решение задачи (1.1)–(1.8). Умножая уравнение (1.1) на u_t, (1.2) на v_t, (1.3) на δ_t и интегрируя вдоль Ω_1, Ω_2, Γ_2, соответственно, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_1^2 - \int_{\Gamma_2}\frac{\partial u_t}{\partial \nu}u_t d\Gamma_2 + \int_{\Omega_1}|\nabla u_t|^2 dx - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u_t\right)_{\Gamma_2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_1^2 + \left(|u_t|^{q_1+1}, 1\right)_1 = (f(u), u_t)_1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|_2^2 + \int_{\Gamma_2}\frac{\partial v_t}{\partial \nu}v_t d\Gamma_2 + \int_{\Omega_2}|\nabla v_t|^2 dx + \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}, v_t\right)_{\Gamma_2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|_2^2 + \left(|v_t|^{q_2+1}, 1\right)_2 = \left(g(v), v_t\right)_2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2 = -(u_t, \delta_t)_{\Gamma_2},$$

откуда в силу (1.5) получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|_1^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\right) - \frac{d}{dt}\left[\left(F(u),1\right)_1 + \left(G(v),1\right)_2\right] - \\ - \left(\frac{\partial u_t}{\partial \nu} - \frac{\partial v_t}{\partial \nu}, u_t\right)_{\Gamma_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu}, u_t\right)_{\Gamma_2} + (u_t, \delta_t)_{\Gamma_2} + \left(|u_t|^{q_1+1}, 1\right)_1 + \left(|v_t|^{q_2+1}, 1\right)_2 + \\ + \|\nabla u_t\|_1^2 + \|\nabla v_t\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 = 0\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|_1^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\right) - \frac{d}{dt}\left[\left(F(u),1\right)_1 + \left(G(v),1\right)_2\right] + \\ + \left(|u_t|^{q_1+1}, 1\right)_1 + \left(|v_t|^{q_2+1}, 1\right)_2 + \|\nabla u_t\|_1^2 + \|\nabla v_t\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 = 0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Введем следующий функционал:

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|u_t\|_1^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\right] - \left(F(u),1\right)_1 - \left(G(v),1\right)_2, \tag{4.2}$$

где (u,v,δ) – решение задачи (1.1)–(1.8).

Используя (4.2), из (4.1) имеем

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\left(\|u_t\|_{L^{q_1+1}(\Omega_1)}^{q_1+1} + \|v_t\|_{L^{q_2+1}(\Omega_2)}^{q_2+1} + \|\nabla u_t\|_1^2 + \|\nabla v_t\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2\right) \le 0.$$

Интегрируя (4.1) от 0 до t, получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(\|u_t\|_1^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\right) + \left(F(u),1\right)_1 + \left(G(v),1\right)_2 + \\ + \int_0^t\left[\left(|u_t|^{q_1+1}, 1\right)_1 + \left(|v_t|^{q_2+1}, 1\right)_2 + \|\nabla u_t\|_1^2 + \|\nabla v_t\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2\right]d\tau = \\ = \frac{1}{2}\left(\|u_1\|_1^2 + \|\nabla u_0\|_1^2 + \|v_1\|_2^2 + \|\nabla v_0\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_1\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta_0\right\|_{\Gamma_2}^2\right) + \\ + (F(u_0),1)_1 + (G(v_0),1)_2 + 2\int_0^t (f(u),u_t)_1 d\tau + 2\int_0^t (g(v),v_t)_2 d\tau.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Оценим последние два члена правой части (4.3). Используя неравенство Гёльдера с показателями

$$\rho = \frac{q_1+1}{q_1} \quad \text{и} \quad \rho' = q_1+1\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1\right),$$

имеем

$$\int_0^t (f(u),u_t)_1 d\tau \le c_1 \int_0^t \int_{\Omega_1} |u|^p u_t dx d\tau \le c_1 \left(\int_0^t \int_{\Omega_1} |u|^{\frac{p(q_1+1)}{q_1}} dx d\tau\right)^{\frac{q_1}{q_1+1}} \left(\int_0^t \int_{\Omega_1} |u_t|^{q_1+1} dx d\tau\right)^{\frac{1}{q_1+1}},$$

откуда, в силу неравенства Юнга $\left(ab \le \frac{a^\rho}{\rho\eta^\rho} + \frac{\eta^{\rho'} b^{\rho'}}{\rho'}, \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1\right)$ с параметром $\eta = \mu_1^{\frac{1}{q_1+1}}$, получаем

$$\int_0^t (f(u),u_t)_1 d\tau \le \frac{c_1 q_1}{(q_1+1)\mu_1^{\frac{1}{q_1}}} \int_0^t \int_{\Omega_1} |u|^{\frac{p(q_1+1)}{q_1}} dx d\tau + \frac{c_1 \mu_1}{q_1+1} \int_0^t \int_{\Omega_1} |u_t|^{q_1+1} dx d\tau. \tag{4.4}$$

Согласно условию (2.5) и неравенству Юнга с показателями

$$\rho = \frac{(p+1)_{q_1}}{p(q_1+1)}, \quad \rho' = \frac{(p+1)_{q_1}}{q_1 - p}, \quad \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1\right),$$

имеем

$$|u|^{\frac{p(q_1+1)}{q_1}} \le \frac{p(q_1+1)}{(p+1)q_1}|u|^{p+1} + \frac{q_1 - p}{(p+1)q_1}.$$

Используя последнее неравенство и (2.6) в (4.4), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t (f(u),u_t)_1 d\tau &\le \frac{c_1 p \mu_1^{-\frac{1}{q_1}}}{p+1} \int_0^t \int_{\Omega_1} |u|^{p+1} dx d\tau + \frac{c_1(q_1-p)\mu_1^{-\frac{1}{q_1}} T \operatorname{mes}\Omega_1}{(q_1+1)(p+1)} + \frac{c_1\mu_1}{q_1+1}\int_0^t \int_{\Omega_1} |u_t|^{q_1+1} dx d\tau \le \\ &\le \frac{c_1 p \mu_1^{-\frac{1}{q_1}}}{c_5(p+1)} \int_0^t (F(u),1)_1 d\tau + \frac{c_1(q_1-p)\mu_1^{-\frac{1}{q_1}} T \operatorname{mes}\Omega_1}{(q_1+1)(p+1)} + \frac{c_1\mu_1}{q_1+1}\int_0^t \int_{\Omega_1} |u_t|^{q_1+1} dx d\tau. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Аналогично, имеем

$$\int_0^t (g(v),v_t)_2 d\tau \le \frac{c_3 p \mu_2^{-\frac{1}{q_2}}}{c_7(p+1)} \int_0^t (G(v),1)_2 d\tau + \frac{c_3(q_2-p)\mu_2^{-\frac{1}{q_2}} T \operatorname{mes}\Omega_2}{(q_2+1)(p+1)} + \frac{c_3\mu_2}{q_2+1}\int_0^t \int_{\Omega_2} |v_t|^{q_2+1} dx d\tau. \tag{4.6}$$

Из (4.3), (4.5) и (4.6) заключаем, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\|u_t\|_1^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\right) + (F(u),1)_1 + (G(v),1)_2 + \\ &+\left(1 - \frac{2c_1\mu_1}{q_1+1}\right)\int_0^t \left(|u_t|^{q_1+1},1\right)_1 d\tau + \left(1 - \frac{2c_3\mu_2}{q_2+1}\right)\int_0^t \left(|v_t|^{q_2+1},1\right)_2 d\tau + \int_0^t \left(\|\nabla u_t\|_1^2 + \|\nabla v_t\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2\right) d\tau \le \\ &\le \frac{1}{2}\left(\|u_1\|_1^2 + \|\nabla u_0\|_1^2 + \|v_1\|_2^2 + \|\nabla v_0\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_1\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta_0\right\|_{\Gamma_2}^2\right) + (F(u_0),1)_1 + (G(v_0),1)_2 + \\ &+ \frac{c_1(q_1-p)\mu_1^{-\frac{1}{q_1}} T \operatorname{mes}\Omega_1}{(q_1+1)(p+1)} + \frac{c_3(q_2-p)\mu_2^{-\frac{1}{q_2}} T \operatorname{mes}\Omega_2}{(q_2+1)(p+1)} + \\ &+ \frac{p}{p+1}\max\left\{\frac{c_1}{c_5}\mu_1^{-\frac{1}{q_1}}, \frac{c_3}{c_7}\mu_2^{-\frac{1}{q_2}}\right\}\int_0^t \left[(F(u),1)_1 + (G(v),1)_2\right] d\tau, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где μ_1, μ_2 выбираются таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$1 - \frac{2c_1\mu_1}{q_1 + 1} > 0, \quad 1 - \frac{2c_3\mu_2}{q_2 + 1} > 0.$$

В силу неравенства Гронуолла и (4.7) получаем

$$\frac{1}{2}\left(\|u_t\|_1^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \left\|\sqrt{M}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2 + \left\|\sqrt{K}\delta\right\|_{\Gamma_2}^2\right) + (F(u),1)_1 + (G(v),1)_2 +$$

$$+\left(1 - \frac{2c_1\mu_1}{q_1 + 1}\right)\int_0^t \left(|u_t|^{q_1+1},1\right)_1 d\tau + \left(1 - \frac{2c_3\mu_2}{q_2 + 1}\right)\int_0^t \left(|v_t|^{q_2+1},1\right)_2 d\tau + \int_0^t \left(\|\nabla u_t\|_1^2 + \|\nabla v_t\|_2^2 + \left\|\sqrt{D}\delta_t\right\|_{\Gamma_2}^2\right) d\tau \le C_T,$$

где C_T зависит от $\|u_1\|_1, \|v_1\|_2, \|\nabla u_0\|_1, \|\nabla v_0\|_2, \|\delta_0\|_{\Gamma_2}, \|\delta_1\|_{\Gamma_2}$ и от положительного числа T, которое является произвольным. Таким образом, локальное решение (u, v, δ), установленное в теореме 1, является глобальным.

Теорема 2.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Webb G.F.* Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation // Canad. J. Math. 1980. V. 32. P. 631–643.
2. *Kalantarov V.K., Zelik S.* Finite-dimensional attractors for the quasi-linear strongly-damped wave equation // J. Differential Equations. 2009. V. 247. P. 1120–1155.
3. *Pata V., Zelik S.* Smooth attractors for strongly-damped wave equations // Nonlinearity. 2006. V. 19. P. 1495–1506.
4. *Pata V., Squassina M.* On the strongly-damped wave equation // Comm. Math. Phys. 2005. V. 253. № 3. P. 511–533.
5. *Yang M., Sun C.* Dynamics of strongly-damped wave equations in locally uniform spaces; Attractors and asymptotic regularity // Trans. Amer. Math. Soc. 2009. V. 361. № 2. P. 1069–1101.
6. *Dautray R., Lions J.L.* Analyse et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques. V. 1. Masson. Paris. 1984.
7. *Muñoz Rivera J.E., Portillo Oquendo H.* The transmission problem of viscoelastic waves //Acta Applicandae Mathematicae. 2000. V. 60. P. 1–21.
8. *Bae J.J.* Nonlinear transmission problem for wave equation with boundary condition of memory type // Acta. Appl. Math. 2010. V. 110. № 2. P. 907–919.
9. *Aliev A.B., Mammadhasanov E.H.* Well-posedness of initial boundary value problem on longitudind impact on a composite linear viscoelastic bar // Math. Meth. in the Appl. Sci. 2017. V. 40. № 14. P. 5380–5390.
10. *Gal C.G., Goldstein G.R., Goldstein J.A.* Oscillatory boundary conditions for acoustic wave equations // J. Evol. Equ. 2003. V. 3. № 4. P. 623–635.
11. *Beale J.T., Rosencrans S.I.* Acoustic boundary conditions // Bull. Amer. Math.Soc. 1974. V. 80. № 6. P. 1276–1278.
12. *Beale J.T.* Acoustic scattering from locally reacting surfaces // Indiana Univ. Math. J. 1977. V. 26. P. 199–222.
13. *Frota C.L, Vicente A.* A hyperbolic system of Klein-Gordon type with acoustic boundary conditions // Int. J. Pure Appl. Math. 2008. V. 47. № 2. P. 185–198.
14. *Mugnolo D.* Abstract wave equations with acoustic boundary conditions // Math. Nachr. 2006. V. 279. № 3. P. 299–318.
15. *Vicente A.* Wave equation with acoustic/memory boundary conditions // Bol. Soc. Parana. Mat. Ser. 3. 2009. V. 27. № 1. P. 29–39.
16. *Boukhatem Y., Benabderrahmane B.* Existence and decay of solutions for a viscoelastic wave equation with acoustic boundary conditions // Nonlinear Analysis. 2014. V. 97. P. 191–209.
17. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории воли. М.: Физматлит, 1998.
18. *Morse P.M., Ingard K.U.* Theoretical Acoustic // MaGraw-Hill. 1968.
19. *Aliev A.B., Isayeva S.E.* Exponential stability of the nonlinear transmission acoustic problem // Math. Meth. in the Appl. Sci. 2018. V. 41. № 16. P. 7055–7073.
20. *Aliev A.B., Isayeva S.E.* Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear transmission acoustic problem // Turkish Journal of Mathematics. 2018. V. 42. P. 3211–3231.
21. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
22. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a global solution of the wave equation with nonlinear damping and source term // J. Differential Equations. 1994. V. 109. P. 295–308.
23. *Brezis H.* Analyse fonctionelle théorie et applications. Paris. Masson. 1983.