ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 2, с. 297–322

УДК 519.635

О ЛАГРАНЖЕВОМ ОПИСАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

© 2020 г. А. В. Сетуха[1,2]

[1] 119234 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия;

[2] 140180 Жуковский, Московская область, ул. Жуковского, 1, ЦАГИ , Россия

e-mail: setuhaav@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.07.2019 г.
Переработанный вариант 27.07.2019 г.
Принята к публикации 17.10.2019 г.

Исходя из теории пограничного слоя показано, что при больших значениях числа Рейнольдса для уравнений Навье–Стокса в трехмерном случае применима форма записи с введением диффузионной скорости, известная ранее для случаев плоских и осесимметричных течений. На основании этой гипотезы строится замкнутая система уравнений для описания течения жидкости в рамках лагранжева подхода, являющаяся развитием аналогичной модели для указанных частных случаев, с одновременным уточнением ряда математических вопросов. Путем анализа уравнений движения выделенных определенным образом лагранжевых частиц на основе теории обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами доказано существование интегрального представления для поля скоростей с интегралами по лагранжевым координатам. Осуществлен вывод уравнения, описывающего поток завихренности с поверхности тела. Библ. 29. Фиг. 1.

Ключевые слова: уравнения математической физики, уравнения Навье–Стокса, лагранжевы координаты, вихревые методы.

DOI: 10.31857/S004446692002012X

ВВЕДЕНИЕ

Вихревые методы, основанные на интегральном представлении поля скоростей жидкости через завихренность и на отслеживании траекторий движения выделенных вихревых частиц (так называемый лагранжев подход), нашли широкое применение при решении различных задач об отрывном обтекании тел.

Так, целое направление вихревых методов основано на гипотезе о том, что вихревой след представляет собой тонкую поверхность разрыва в идеальной жидкости (вихревую пелену), которая образуется на заданных линиях отрыва [1]–[5]. Недостатком такого подхода является необходимость иметь априорную информацию о линии отрыва потока. Кроме того, такие методы плохо применимы в случаях, когда линия отрыва потока является подвижной.

В последнее время активно развиваются подходы, в которых предполагается, что завихренность может образовываться на всей поверхности тела. На каждом дискретном шаге интегрирования по времени на поверхности тела размещается вихревой слой, интенсивность которого определяется из граничного условия. Далее осуществляется дискретизация этого слоя на систему дискретных вихревых элементов, которые объявляются свободными и далее моделируется их движение в поле скоростей жидкости. Однако формулировка таких методов обычно дается сразу в дискретном виде [6]–[11].

Непрерывная математическая модель и аппроксимирующий ее численный метод (метод вязких вихревых доменов) для описания плоскопараллельных и осесимметричных незакрученных течений вязкой несжимаемой жидкости в рамках лагранжева подхода были предложены в [12], [13]. В настоящей статье осуществляется развитие такого подхода на случай трехмерных отрывных течений при больших значениях числа Рейнольдса, с одновременным уточнением ряда математических вопросов.

За основу предлагаемой математической модели берутся уравнения Навье–Стокса и приближение пограничного слоя, в рамках которого влияние вязкости существенно только в тонком слое на поверхности тела, а вне этого слоя жидкость является идеальной (влияние вязкости отсутствует). Приводятся классические факты из теории пограничного слоя, из которых следует, что в нем завихренность ортогональна своему ротору. Это позволяет записать уравнения Навье—Стокса с применением понятия диффузионной скорости [6], [12]—[14]. Проведенный далее анализ уравнений движения выделенных определенным образом лагранжевых частиц на основе теории обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами, позволил, при некоторых дополнительных предположениях сформулировать полную систему уравнений для течения жидкости при отрывном обтекании тела. Эта система, помимо уравнений движения частиц, включает в себя интегральное представление для поля скоростей с интегралами в лагранжевых координатах, уравнение изменения вихревой плотности (произведения завихренности на якобиан перехода к лагранжевым координатам) и уравнение для потока этой вихревой плотности с поверхности тела. Специфика и сложность исследования состоят в том, что учитывается неограниченность диффузионной скорости.

1. ФОРМУЛИРОВКА ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Постановка задачи для уравнений Навье—Стокса

Рассматривается задача об обтекании неподвижного тела потоком несжимаемой жидкости, имеющим постоянные скорость $\mathbf{w}_\infty$ и давление p_∞ на бесконечности. Пусть тело ограничено гладкой замкнутой поверхностью Σ, Ω — область вне поверхности Σ. В основе математической модели лежат уравнения неразрывности и Навье—Стокса для безразмерных полей скорости жидкости $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x,t)$ и давления $p = p(x,t)$ в области Ω:

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w}\nabla)\,\mathbf{w} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{w}, \tag{1.2}$$

где t — время, x — точки пространства, ρ — плотность жидкости, которая является заданной и постоянной, Re — число Рейнольдса, характеризующее вязкость жидкости. Задача рассматривается в неподвижной декартовой системе координат, точки пространства задаются своими координатами $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ставятся условия на бесконечности

$$\mathbf{w}(x,t) \to \mathbf{w}_\infty, \quad p(x,t) \to p_\infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \tag{1.3}$$

выполненные в каждый момент времени в смысле равномерной сходимости по x, и условие существования в каждый момент времени в каждой точке поверхности тела Σ краевых значений скорости и давления, с выполнением равенства

$$\mathbf{w} = 0 \quad \text{на поверхности} \quad \Sigma. \tag{1.4}$$

Задача решается для $t \geq 0$, в момент времени $t = 0$ ставится начальное условие

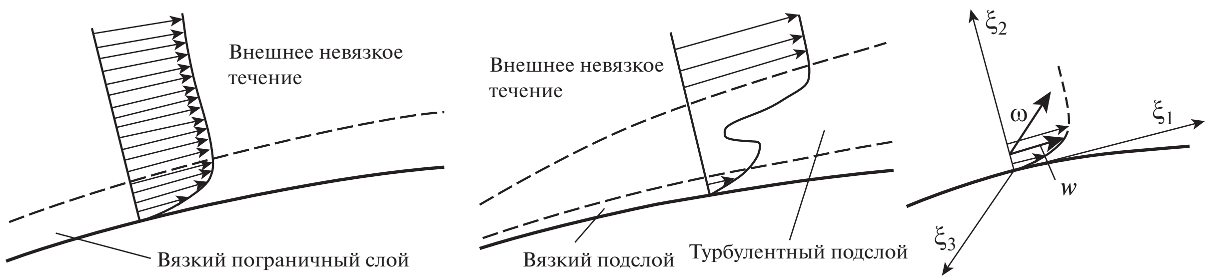
$$\mathbf{w}(x,t)\big|_{t=0} = \mathbf{w}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{w}_0 \in C^4(\bar{\Omega})$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям (1.1), (1.3) и (1.4), $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω.

Пусть $\boldsymbol{\omega}(x,t) = \operatorname{rot}\mathbf{w}(x,t)$ — поле завихренности и пусть $\boldsymbol{\omega}_0(x) = \operatorname{rot}\mathbf{w}_0(x)$ — начальное распределение завихренности. Предполагается, что $|\boldsymbol{\omega}_0| \in L_1(\Omega)$.

Решение ищется в классе функций: в каждый момент времени поля скоростей $\mathbf{w}$ и давления p, а также производная $\partial\mathbf{w}/\partial t$, как функции пространственных координат, удовлетворяют условиям $\mathbf{w} \in C^4(\bar{\Omega})$, $\partial\mathbf{w}/\partial t \in C^4(\bar{\Omega})$, $p \in C^1(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$, $|\boldsymbol{\omega}| \in L_1(\Omega)$.

Заметим также, что при сформулированных условиях в каждый момент времени t поле завихренности удовлетворяет условию $\boldsymbol{\omega} \in C^3(\bar{\Omega})$.



Фиг. 1. Структура течения вблизи поверхности тела.

1.2. Гипотезы о поле скоростей

Рассмотрим предельный случай сформулированной задачи для уравнений Навье–Стокса при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности.

В основе приводимых здесь рассуждений лежит классическая теория пограничного слоя [15, гл. 7, § 1, с. 124–128]. Предполагается, что в уравнении (1.1) вязкость существенна только в тонком пограничном слое на поверхности тела, в котором скорость жидкости изменяется от нуля на стенке (условие прилипания) до своего полного значения во внешнем потоке. Вне этого слоя влиянием вязкости можно пренебречь. Будем считать, что вне пограничного слоя скорость, ее первые и вторые производные по пространственным координатам по модулю много меньше числа Рейнольдса. Тогда вне пограничного слоя в уравнении (1.1) можно положить

$$\Delta\mathbf{w}/\operatorname{Re} = 0.$$

Пусть x_0 – некоторая точка на поверхности тела. Введем локальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с центром в точке $O = x_0$ так, что ось $O\xi_2$ направлена по нормали к поверхности тела, а ось $O\xi_1$ направлена вдоль скорости потока на внешней границе пограничного слоя (см. фиг. 1). В теории пограничного слоя предполагается, что из-за вязкого трения происходит быстрое изменение компоненты скорости w_1 вдоль оси $O\xi_2$ от значения $w_1 = 0$ на поверхности тела до некоторого конечного значения на внешней границе пограничного слоя над точкой x_0. При этом производные $\partial w_1/\partial\xi_2$ и $\partial^2 w_1/\partial\xi_2^2$, $\partial^2 w_2/\partial\xi_2^2$ могут принимать внутри пограничного слоя большие по модулю значения [15, гл. 7, § 1, с. 126]. Будем предполагать, что остальные производные $\partial w_i/\partial\xi_j$ и $\partial^2 w_i/(\partial\xi_i\partial\xi_j)$ порядка 1 в окрестности точки x_0 при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности.

Тогда в окрестности точки x_0 для координат вектора завихренности $\boldsymbol{\omega}$ в локальной системе координат внутри пограничного слоя справедливы соотношения:

$$\omega_1/\omega_3 \approx \omega_2/\omega_3 \approx 0, \quad \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}| \approx \left(0, 0, -\partial w_1/\partial\xi_2\right)/|\boldsymbol{\omega}|, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Re}}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} \approx \frac{1}{\operatorname{Re}}\left(-\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi_2^2}, -\frac{\partial^2 w_2}{\partial\xi_2^2}, 0\right). \tag{1.7}$$

Формулы (1.6) и (1.7) означают, что внутри пограничного слоя векторы $\mathbf{w}$ и $\boldsymbol{\omega}$ приближенно можно считать ортогональными. Также можно считать ортогональными векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$. Но тогда справедливо приближенное равенство

$$\frac{1}{\operatorname{Re}}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} \approx \frac{1}{\operatorname{Re}}\frac{\boldsymbol{\omega}\times[\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}]}{\boldsymbol{\omega}^2}. \tag{1.8}$$

Вне пограничного слоя равенство (1.8) также выполнено, т.к. здесь и правая и левая части этого равенства пренебрежимо малы в силу предположения о малости модуля вторых производных поля скоростей по пространственным координатам по сравнению с числом Рейнольдса в области внешнего течения. Но тогда мы можем предположить, что в случае произвольного трехмерного течения вязкой жидкости при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности формула (1.8) приближенно выполнена во всей области течения.

Используя формулу векторного анализа

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}, \tag{1.9}$$

справедливую для дважды дифференцируемого векторного поля $\mathbf{a}$, и учитывая условие $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$, равенство (1.8) можно записать в виде

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{w} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} \approx -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w}', \quad \mathbf{w}' = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}^2}.$$

Точно также будем считать, что в пограничном слое выполнено равенство $\partial\mathbf{w}'/\partial\xi_3 \approx 0$. Это равенство можно переписать в виде

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}\nabla\right)\mathbf{w}' \approx 0. \tag{1.10}$$

Если считать, что вне пограничного слоя жидкость является идеальной, то вне пограничного слоя $\mathbf{w}' = 0$ и равенство (1.10) выполнено во всем пространстве.

Замечание 1. Приведенные рассуждения относятся к так называемому ламинарному пограничному слою. В гидродинамике выделяют также случай турбулентного пограничного слоя, в котором течение имеет сильно осциллирующий (турбулентный) характер. Анализ уравнений вязкой жидкости показывает, что внутри такого слоя имеется еще более тонкий ламинарный вязкий подслой [15, гл. 18, § 1, с. 507]. Поэтому можно надеяться, что в некоторых случаях наша модель окажется применима и к течениям с турбулентным пограничным слоем при очень больших значениях числа Рейнольдса, где полученные соотношения (1.8), (1.10) относятся к вязкому подслою, а остальная часть пограничного слоя относится к внешнему невязкому течению.

Замечание 2. В случаях плоскопараллельного или осесимметричного незакрученного течений условия $\mathbf{w}\perp\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}\perp\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$ и равенства (1.8), (1.10) выполнены точно во всей области течения при любых значениях числа Рейнольдса.

Таким образом, мы будем рассматривать математическую задачу (1.1)–(1.5) в предположении, что выполнены условия (1.8) и (1.10). Как следует из приведенных физических соображений, эти условия выполнены приближенно для трехмерных течений, возникающих при обтекании тел при больших значениях числа Рейнольдса, и эти условия выполнены точно для плоскопараллельных и осесимметричных незакрученных течений. Поэтому полученные далее математические результаты применимы к указанным осесимметричным течениям вязкой жидкости и могут быть перенесены на случай плоскопараллельных течений. Кроме того, можно предположить, что эти результаты применимы и к произвольному трехмерному течению вязкой жидкости при больших значениях числа Рейнольдса.

В приводимых далее математических выкладках предполагается, что равенства (1.8), (1.10) выполнены точно.

1.3. Преобразование уравнений Навье–Стокса

Из уравнений (1.1)–(1.2) следует уравнение переноса завихренности в вязкой жидкости (см., например, [16, формула (29.1)]):

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w}] = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{\omega}. \tag{1.11}$$

Далее, мы предполагаем, что в области течения выполнена формула (1.8). Поэтому к последнему уравнению можно применить преобразование, которое ранее использовалось в работах [6], [12]–[14] для плоскопараллельных и осесимметричных течений:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{\omega}\times[\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}]}{\boldsymbol{\omega}^2}.$$

Тогда уравнение (1.11) можно переписать в виде

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}] = 0, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{w}', \quad \mathbf{w}' = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}^2}. \tag{1.13}$$

Векторное поле $\mathbf{w}'$ называют диффузионной скоростью [12]. Скорость $\mathbf{u}$ будем называть скоростью переноса завихренности.

Далее, используя формулу векторного анализа:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}] = (\mathbf{u}\nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}\operatorname{div}\mathbf{u} - \mathbf{u}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}$$

и учитывая, что $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$, можем записать:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\operatorname{div}\mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{u}.$$

Последнее уравнение можно также переписать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\operatorname{div}\mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{u}, \tag{1.14}$$

где $d\boldsymbol{\omega}/dt$ есть так называемая субстанциональная производная, вычисляемая как производная по времени от значений функции $\boldsymbol{\omega}(x(t),t)$ в точке $x(t)$, которая движется со скоростью $\mathbf{u}$ (т.е. при условии $dx(t)/dt = \mathbf{u}$).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЫДЕЛЕННЫХ ЧАСТИЦ И ИХ СВОЙСТВА

2.1. Уравнения движения выделенных частиц

Перейдем к лагранжеву описанию течения жидкости, при котором отслеживаются траектории движения жидких частиц и изменение характеристик жидкости в этих частицах. Будем рассматривать траектории частиц на временном промежутке $t \in [0,T]$, предполагая, что решение уравнений (1.1), (1.2), удовлетворяющее условиям (1.3)–(1.5), существует на этом временном промежутке, является единственным, удовлетворяет условию (1.8) и лежит в классе функций, указанном в п. 1.1.

Пусть $\Omega'(t) = \{x \in \Omega \,|\, \boldsymbol{\omega}(x,t) \neq 0\}$ – множество точек пространства, в которых в момент времени t завихренность отлична от нуля. При этом для любого $t \in [0,T]$ множество $\Omega'(t)$ открыто. Обозначим также $\Omega_0 = \Omega'(0)$.

При сделанных предположениях относительно поля скоростей жидкости $\mathbf{w}$, в каждый момент времени t скорость переноса завихренности $\mathbf{u}$, определяемая формулой (1.13), и ее производная по времени, как функции от x удовлетворяют условиям $\mathbf{u} \in C^2(\Omega'(t))$, $\partial\mathbf{u}/\partial t \in C^2(\Omega'(t))$.

Введем для каждого $t \in [0,T]$ множество

$$S(t) = \{z \in \Sigma \,|\, \boldsymbol{\omega}(z,t) \neq 0,\ \mathbf{u}(z,t)\mathbf{n}(z) > 0\},$$

где $\mathbf{n}(z)$ – орт внешней нормали к поверхности тела Σ в точке $z \in \Sigma$. Также обозначим

$$\Omega_\Sigma = \{\xi = (z,\tau) \,|\, \tau \in (0,T),\ z \in S(\tau)\}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение для неизвестной функции $y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{u}(y,t). \tag{2.2}$$

Каждое решение уравнения (2.2) описывает закон движения некоторой выделенной частицы со скоростью $\mathbf{u}$ (заметим, что с физической точки зрения, такая частица является фиктивной). Далее нас, во-первых, будут интересовать траектории частиц, начинающиеся в момент времени $t = 0$ в каждой точке $\xi \in \Omega_0$. Во-вторых, для каждой пары $\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma$ нас будут интересовать траектории частиц, начинающиеся в момент времени $t = \tau$ в точке $z \in \Sigma$.

Для каждой точки $\xi \in \Omega_0$ обозначим $x(\xi,t) = y(t)$ – решение уравнения (2.2), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \xi$, и определенное при $t \geq 0$. Аналогично, для каждой пары $\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma$ обозначим $x(\xi,t) = y(t)$ – решение уравнения (2.2), удовлетворяющее начальному условию $y(\tau) = z$, и определенное при $t \geq \tau$. Таким образом, мы будем искать функцию $x(\xi,t)$, где $\xi \in \Omega_0 \cup \Omega_\Sigma$, $t \geq 0$ при $\xi \in \Omega_0$, $t \geq \tau$ при $\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma$, являющуюся решением задачи

$$\frac{\partial x(\xi,t)}{dt} = \mathbf{u}(x(\xi,t),t), \tag{2.3}$$

$$x(\xi,0) = \xi \quad \text{при} \quad \xi \in \Omega_0, \tag{2.4}$$

$$x(\xi,\tau) = z \quad \text{при} \quad \xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma. \tag{2.5}$$

В этом разделе мы исследуем свойства решений уравнения (2.2) и задачи (2.3)–(2.5), в предположении, что функция $\mathbf{u}$ определяется выражением (1.13), где $\mathbf{w}$ – заданная функция, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{w}$, поле $\mathbf{w}$ имеет указанную выше гладкость.

2.2. Свойства поверхности Σ

Будем предполагать, что Σ есть замкнутая простая гладкая поверхность класса C^3. При этом предположим, что $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{K} \Sigma_k$, где при каждом $k = 1,\dots,K$, участок Σ_k есть элементарная поверхность с картой φ_k, т.е.

$$\Sigma_k = \{x = \varphi_k(\eta)|,\ \eta = (\eta_1,\eta_2) \in V_k\},$$

V_k – некоторая область в пространстве $\mathbb{R}^2$, $\varphi_k \in C^3(V_k)$ – функция, определенная на множестве V_k со значениями в пространстве $\mathbb{R}^3$, причем, векторы $\partial\varphi_k/\partial\eta_1$ и $\partial\varphi_k/\partial\eta_2$ линейно независимы при всех $\eta \in V_k$. Указанные элементарные поверхности могут пересекаться.

Далее, для каждой точки $z \in \Sigma$ и для каждого числа $h \in \mathbb{R}$ определим точку

$$x_h(z) = z + h\mathbf{n}(z), \tag{2.6}$$

где $\mathbf{n}(z)$ – орт вектора внешней нормали к поверхности Σ в точке z.

Обозначим также, через Ω^r, $r > 0$, множество точек $x = x_h(z)$, таких что $z \in \Sigma$, $|h| \le r$. Сделаем следующие предположения о поверхности тела Σ.

Предположение 1. Существует $r_0 > 0$ такое, что при $r = r_0$ отображение множества пар (z,h), где $z \in \Sigma$, $|h| \le r$, на множество Ω^r, есть биекция.

Предположение 2. Существуют $r \in (0,r_0]$ и M, где r_0 – константа из предположения 1, такие, что для любой точки $z \in \Sigma$ найдется карта φ_k, позволяющая ввести в окрестности

$$U_r(z) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x - z| < r\right\} \tag{2.7}$$

координаты $\eta^* = (\eta_1^*,\eta_2^*,\eta_3^*) \equiv (\eta_1,\eta_2,h)$ по формуле

$$x(\eta^*) = \varphi_k(\eta) + h\mathbf{n}(\varphi_k(\eta)). \tag{2.8}$$

При этом формула (2.8) определяет биективное отображение некоторого открытого множества $V^*(z,r) \subset \mathbf{R}^3$ и окрестности $U_r(z)$ так, что выполнены оценки

$$\frac{1}{M} < \left|\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial\eta_j^*}\right)\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial x_i}{\partial\eta_j^*}\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial\eta_j^*}{\partial x_i}\right| \le M, \quad i,j = 1,\dots,3.$$

2.3. Продолжение функции, задающей скорости частиц

Для того, чтобы применить к уравнениям (2.3)–(2.5) классические теоремы о зависимости решения обыкновенного дифференциального уравнения от параметров, расширим область определения функции $\mathbf{u}(x,t)$ так, чтобы точки вида $(\xi,0)$, где $\xi \in \Omega_0$, и точки вида (ξ,τ), где $\tau \in (0,T)$, $\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma$, стали внутренними точками области определения функции $\mathbf{u}(x,t)$.

Пусть $r > 0$ – константа из предположения 2. Для каждого $t \in [0,T]$ построим множество $\Omega''(t)$ точек $x \in \mathbb{R}^3$, являющееся объединением множества $\Omega'(t)$ и всех точек

$$x = x_h(z), \quad z \in S(t), \quad -r < h \le 0, \tag{2.9}$$

где функция $x_h(z)$ имеет вид (2.6). Доопределим также,

$$S(t) = S(0), \quad \Omega''(t) = \Omega''(0) \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Рассмотрим множество

$$\Gamma = \left\{(x,t) \in R^4 \,\middle|\, t \in (-T,T),\ x \in \Omega''(t)\right\}. \tag{2.10}$$

Лемма 1. *Множество* Γ *открыто, как множество в пространстве* $\mathbb{R}^4$.

Доказательство. Пусть $(x_0,t_0) \in \Gamma$.

Если $x_0 \in \Omega'(t_0)$ и $t_0 > 0$, то точка (x_0,t_0) лежит в множестве Γ вместе с некоторой своей окрестностью, в силу определения множества $\Omega'(t)$ и непрерывности функции $\boldsymbol{\omega}$.

Если $x_0 \in \Omega'(t_0)$ и $t_0 \le 0$, то найдется $\delta_1 > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta_1$ и при $0 \le t < \delta_1$ выполнено условие $\boldsymbol{\omega}(x,t) \ne 0$. Но тогда для таких x и t выполнено условие $x \in \Omega'(t)$. Если же $|x - x_0| \le \delta_1$ и $t < 0$, то $x \in \Omega'(0) = \Omega'(t)$. Таким образом, при $|x - x_0| < \delta_1$ и $|t - t_0| < \delta_1$ выполнено условие $(x,t) \in \Gamma$.

Теперь пусть $x_0 \notin \Omega'(t_0)$. Тогда точка x_0 имеет вид

$$x_0 = z_0 + h_0\mathbf{n}(z_0), \quad z_0 \in S(t_0), \quad -r < h_0 \le 0. \tag{2.11}$$

По предположению 2 в окрестности точки z_0 в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно ввести локальные координаты $\eta^* = (\eta_1,\eta_2,h)$ так, что выполнена формула (2.8). Пусть $\eta_0^* = (\eta_1^0,\eta_2^0,h_0)$ – локальные координаты точки z_0.

Если $t_0 \ge 0$, то найдется такое $\delta_2 > 0$, что при

$$\left|\eta^* - \eta_0^*\right| < \delta_2, \quad |t - t_0| < \delta_2 \tag{2.12}$$

и $t \ge 0$ выполнены условия $z = \varphi_k(\eta_1,\eta_2) \in S(t)$ и если $h > 0$, то $\omega(x(\eta^*),t) \ne 0$. Тогда если выполнены условия (2.12) и при этом $t \ge 0$, то $x(\eta^*) \in \Omega''(t)$. Если же выполнены условия (2.12) и при этом $t < 0$, то $x(\eta^*) \in \Omega''(0)$. Но $\Omega''(t) = \Omega''(0)$, а значит опять $x(\eta^*) \in \Omega''(t)$.

Если $t_0 < 0$, то найдется такое $\delta_2 > 0$, что при условиях (2.12) выполнены условия $t < 0$, $z = \varphi_k(\eta_1,\eta_2) \in S(0)$ и, если $h > 0$, то $\omega(x(\eta^*),0) \ne 0$. Но тогда $x(\eta^*) \in \Omega''(0) = \Omega''(t)$.

Таким образом, при условиях (2.12) выполнено условие $(x(\eta^*),t) \in \Gamma$. Но тогда и точка (x_0,t_0) лежит в множестве Γ вместе с некоторой своей окрестностью из пространства $\mathbb{R}^4$.

Лемма доказана.

Доопределим функцию $\mathbf{u}(x,t)$ на всем множестве Γ следующим образом.

При $t \ge 0$ для всех точек x вида (2.9) определим

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{u}(z,t) + h\frac{\partial\mathbf{u}(z,t)}{\partial n},$$

где $\partial\mathbf{u}(z,t)/\partial n$ – производная в момент времени t векторной функции $\mathbf{u}$ по направлению вектора $\mathbf{n}(z)$, $z = z(x)$, $h = h(x)$. Далее положим

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{u}(x,0) + t\left.\frac{\partial\mathbf{u}(x,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} \quad \text{при} \quad t < 0, \quad x \in \Omega''(t). \tag{2.13}$$

Лемма 2. *Функция* $\mathbf{u}(x,t)$, *ее производные по пространственным координатам* $\partial\mathbf{u}(x,t)/\partial x_i$, $i = 1,\dots,3$, *и производная по времени* $\partial\mathbf{u}(x,t)/\partial t$ *непрерывны на множестве* Γ.

Доказательство. Непосредственно из определения функции $\mathbf{u}$ по формуле (1.13) следует, непрерывность этой функции и ее производных $\partial\mathbf{u}(x,t)/\partial x_i$, $i = 1,\dots,3$, $\partial\mathbf{u}(x,t)/\partial t$, на множестве пар (x,t), в которых $x \in \Omega'(t)$, $t \in (0,T)$. Из формулы (2.13) следует непрерывность функции $\mathbf{u}$ и ее рассматриваемых производных при $x \in \Omega'(t)$, $t \in (-T,T)$.

Пусть теперь $(x_0,t_0) \in \Gamma$, где $t_0 \in (-T,T)$, точка x_0 представляется в виде (2.11). Как и при доказательстве леммы 1 построим в окрестности точки z_0 радиуса r в пространстве $\mathbb{R}^3$ локальные координаты $\eta^* = (\eta_1,\eta_2,h) \equiv (\eta_1^*,\eta_2^*,\eta_3^*)$ так, что выполнена формула (2.8). Пусть $\eta_0^* = (\eta_1^0,\eta_2^0,h_0)$ – локальные координаты точки z_0.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta^*,t) = \mathbf{u}(x(\eta^*),t).$$

В силу леммы 1 функция $\tilde{\mathbf{u}}$ определена в некоторой окрестности точки $(\eta_0^*,t_0) \equiv (\eta_1^0,\eta_2^0,h_0,t)$, а также и в некоторой окрестности точки $(\eta_1^0,\eta_2^0,0,t_0)$.

Обозначим $\tilde{\mathbf{u}}_i'(\eta^*,t) = \partial\mathbf{u}(\eta^*,t)/\partial\eta_i^*$, $\tilde{\mathbf{u}}_{i,j}''(\eta^*,t) = \partial\mathbf{u}(\eta^*,t)/(\partial\eta_i^*\partial\eta_j^*)$, $i,j = 1,\ldots,3$. Из предположения 2 и дифференциальных свойств функции $\boldsymbol{\omega}$ следует, что сама функция $\tilde{\mathbf{u}}(\eta^*,t)$ и ее записанные первые и вторые производные определены и непрерывны в окрестности точки $(\eta_1^0,\eta_2^0,0,t_0)$ при $\eta_3^* > 0$ и непрерывно продолжаются в этой окрестности на поверхность $\eta_3^0 = 0$ со стороны области $\eta_3^* > 0$. Тогда для случая $\eta_3^* < 0$ можем записать следующие формулы, которые справедливы в окрестности точки (η_0^*,t_0):

$$\tilde{\mathbf{u}}(\eta_1^*,\eta_2^*,\eta_3^*,t) = \tilde{\mathbf{u}}(\eta_1^*,\eta_2^*,0,t) + \eta_3^*\tilde{\mathbf{u}}_3'(\eta_1^*,\eta_2^*,0,t),$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_i'(\eta_1^*,\eta_2^*,\eta_3^*,t) = \tilde{\mathbf{u}}_i'(\eta_1^*,\eta_2^*,0,t) + \eta_3^*\tilde{\mathbf{u}}_{i,3}''(\eta_1^*,\eta_2^*,0,t), \quad i = 1,2,$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_3'(\eta_1^*,\eta_2^*,\eta_3^*,t) = \tilde{\mathbf{u}}_3'(\eta_1^*,\eta_2^*,0,t).$$

Кроме того, для производной по времени справедливо выражение

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{u}}(\eta^*,t) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{u}}(\eta_1^*,\eta_2^*,0,t) + \eta_3^*\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathbf{u}}_3'(\eta_1^*,\eta_2^*,0,t).$$

Из этих формул видно, что функция $\tilde{\mathbf{u}}$, ее производные $\tilde{\mathbf{u}}_i'$, $i = 1,\ldots,3$, и производная $\partial\tilde{\mathbf{u}}/\partial t$ непрерывны в окрестности точки (η_0^*,t_0) (непрерывность функции $\tilde{\mathbf{u}}_{i,3}''(\eta_1^*,\eta_2^*,0,t)$ по переменным (η_1^*,η_2^*,t) следует из формулы (2.13)). Тогда функция $\mathbf{u}$ и ее производные $\partial\mathbf{u}/\partial x_i$, $i = 1,\ldots,3$, и $\partial\mathbf{u}/\partial t$ также непрерывны в окрестности точки (x_0,t_0). Лемма доказана.

2.4. Свойства функций, описывающих движение индивидуальных частиц

В силу леммы 1 пара (y_0,t_0), где

$$t_0 = 0, \quad y_0 = \xi \quad \text{при} \quad \xi \in \Omega_0, \tag{2.14}$$

$$t_0 = \tau, \quad y_0 = z \quad \text{при} \quad \xi = (\tau,z) \in \Omega, \tag{2.15}$$

является внутренней точкой множества Γ. Тогда на основании леммы 2 мы можем утверждать, что для каждого элемента $\xi = \Omega_0 \cup \Omega_\Sigma$ существует и при том единственное непродолжаемое решение $y(t) = x(\xi,t)$ уравнения (2.2) на множестве Γ, удовлетворяющее условию (см. [17, § 3, с. 23, § 22, с. 173–174])

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.16}$$

Лемма 3. А). *Множество T_0 всех пар элементов (ξ,t), где $\xi \in \Omega_0$, для которых определено непродолжаемое решение уравнения* (2.2) *на множестве* Γ *при условиях* (2.14), (2.16) *открыто как подмножество пространства $\mathbb{R}^4$. При этом функция $x(\xi,t)$, являющаяся решением уравнений* (2.3)–(2.4)*, непрерывна и имеет непрерывные производные $\partial x(\xi,t)/\partial\xi_i$, $i = 1,\ldots,3$, на всем множестве T_0.*

Б) *Для любой локальной карты φ_k, $k = 1,\ldots,K$, обозначим через T_k — множество наборов чисел (η_1,η_2,τ,t) таких, что для точки $\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma$, где $z = \varphi_k(\eta)$, $\eta = (\eta_1,\eta_2) \in V_k$, определено непродолжаемое решение уравнения* (2.2) *при условиях* (2.15), (2.16). *Тогда множество T_k открыто, как подмножество пространства $\mathbb{R}^4$. При этом функция $p_k(\eta,\tau,t) = x(\xi,t)$, $\xi = (\varphi_k(\eta),\tau) \in \Omega_\Sigma$, где $x(\xi,t)$ — решение уравнений* (2.3), (2.5), *непрерывна и имеет непрерывные производные $\partial p_k/\partial\eta_i$, $i = 1,2$, $\partial p_k/\partial\tau$ на всем множестве T_k.*

Доказательство. А). Утверждение А) леммы сразу следует из теоремы 15 в [17].

Б) Введем переменную $\tilde{t} = t - \tau$ и рассмотрим вспомогательную функцию $\tilde{p}_k(\eta,\tau,\tilde{t}) = p_k(\eta,\tau,\tilde{t}) - \varphi_k(\eta)$, $\xi = (\varphi_k(\eta),\tau) \in \Omega_\Sigma$. Функция $\tilde{p}_k$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \tilde{p}_k(\eta,\tau,\tilde{t})}{\partial t} = u(\tilde{p}_k(\eta,\tau,\tilde{t}) + \varphi_k(\eta), \tilde{t} + \tau), \tag{2.17}$$

удовлетворяющим условию

$$\tilde{p}_k(\eta,\tau,0) = 0. \tag{2.18}$$

Каждому непродолжаемому решению уравнения (2.2) при условии (2.15), (2.16) где $\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma$, $z = \varphi_k(\eta)$, $\eta = (\eta_1,\eta_2) \in V_k$, определенному на отрезке времени $(t_1,t_2) \subset (-T,T)$, соответствует решение $\tilde{p}_k(\eta,\tau,\tilde{t})$, определенное для $\tilde{t} \in (t_1+\tau, t_2+\tau)$. Правая часть уравнения (2.17) – функция $\mathbf{u}(p+\varphi_k(\eta),\tilde{t}+\tau)$, определена на множестве $\tilde{\Gamma}_k$ параметров $(p_1,p_2,p_3,\eta_1,\eta_2,\tau,t)$ таких, что $\eta = (\eta_1,\eta_2) \in V_k$, $\tau \in (0,T)$, $(p+\varphi_k(\eta),\tilde{t}+\tau) \in \Gamma$. Легко увидеть, что множество $\tilde{\Gamma}_k$ открыто. Тогда по теореме 13 из [17], множество T_k всех наборов (η_1,η_2,τ,t), для которых определено непродолжаемое решение уравнения (2.17) при условии (2.18), открыто и функция $\tilde{p}_k(\eta,\tau,\tilde{t})$ непрерывна на этом множестве по совокупности аргументов. По теореме 14 из [17] эта функция имеет производные $\partial\tilde{p}_k/\partial\eta_i$, $i = 1,2$, и $\partial\tilde{p}_k/\partial\tau$, которые определены на всем множестве T_k и непрерывны на этом множестве по совокупности аргументов. Тогда функция $x(\xi,t)$ так же определена на множестве аргументов $\xi = (\varphi_k(\eta),\tau) \in \Omega_\Sigma$, и t таких, что $(\eta_1,\eta_2,\tau,t) \in T_k$, а соответствующая функция $p_k(\eta,\tau,t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $\partial p_k/\partial\eta_i$, $i = 1,2$, $\partial p_k/\partial\tau$ на всем множестве T_k. Лемма доказана.

Теперь вспомним, что нас интересуют решения уравнения (2.2) со значениями функции $y(t)$ в области Ω. Для любой точки $\xi \in \Omega_0$ непродолжаемое на множестве Γ решение $y(t) = x(\xi,t)$ удовлетворяет условию $y(t) \in \Omega$, по крайней мере, на некотором интервале времени $[0,\delta)$, $\delta > 0$, где δ, вообще говоря зависит от ξ. Это верно, т.к. $y(0) = \xi \in \Omega$, множество Ω открыто, а функция $y(t)$ непрерывна.

Докажем, что для любого элемента $\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma$ найдется такое $\delta > 0$, что непродолжаемое на множестве Γ решение $y(t) = x(\xi,t)$ удовлетворяет условию $y(t) \in \Omega$ на интервале времени $(\tau,\tau+\delta)$. Для этого воспользуемся предположением 2 и опять введем в окрестности точки z радиуса r локальные координаты $\eta^* = (\eta_1^*,\eta_2^*,\eta_3^*) \equiv (\eta_1,\eta_2,h)$. Найдется такой промежуток $(\tau,\tau+\Delta\tau)$, $\Delta\tau > 0$, что на этом промежутке решение $y(t)$ определено и удовлетворяет условию $|y(t) - z| < r$. Тогда можно ввести векторную функцию $\eta_\xi^*(t) = (\eta_{\xi,1}^*(t),\eta_{\xi,2}^*(t),\eta_{\xi,3}^*(t))$, которая каждому $t \in [\tau,\tau+\Delta\tau)$ ставит в соответствие набор координат η^* точки $y(t)$. При этом условие $\eta_{\xi,3}^*(t) > 0$ является критерием принадлежности точки $y(t)$ множеству Ω.

Чтобы воспользоваться этим критерием, представим функцию $y(t)$ в виде

$$y(t) = \varphi_k(\eta(t)) + h(t)\mathbf{n}(\varphi_k(\eta(t))), \quad \text{где} \quad \eta(t) = (\eta_{\xi,1}^*(t),\eta_{\xi,2}^*(t)), \quad h(t) = \eta_{\xi,3}^*(t).$$

Тогда

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\varphi_k}{dt} + \frac{dh}{dt}\mathbf{n} + h\frac{d\mathbf{n}}{dt}, \quad \text{где} \quad \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k(\eta(t))}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{d\mathbf{n}(\varphi_k(\eta(t)))}{dt}.$$

Умножим записанное выражение для производной $dy(t)/dt$ на вектор $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\varphi_k(\eta(t)))$. При этом заметим, что

$$\mathbf{n}\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(\mathbf{n},\mathbf{n})}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_k}{dt}\mathbf{n} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi_k = \varphi_k(\eta(t)), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(\varphi_k(\eta(t))).$$

Тогда

$$\frac{dh}{dt} = \mathbf{u}(y(t),t)\mathbf{n}(\varphi_k(\eta(t))). \tag{2.19}$$

При $t = \tau$ выполнены равенства $y(t) = \varphi_k(\eta(t)) = z$ и условие $\mathbf{u}(z,t)\mathbf{n}(z) > 0$. Значит, $dh/dt > 0$ при $t = \tau$, а т.к. функция $h(t)$ непрерывна, это неравенство выполнено и на некотором промежутке $(\tau,\tau+\delta)$, где $0 < \delta < \Delta t$. Тогда функция $h(t)$ положительна при $t \in (\tau,\tau+\delta)$. Значит, точка $x(\xi,t)$ лежит в области Ω для рассматриваемого ξ при $t \in (\tau,\tau+\delta)$, что и требовалось доказать.

Пусть $\xi \in \Omega_0 \cup \Omega_\Sigma$ и пусть $t_0 = 0$ при $\xi \in \Omega_0$, $t_0 = \tau$ при $\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma$. Как было доказано, существует решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию (2.4) или (2.5) (в зависимости от точки ξ), являющееся непродолжаемым на множестве Г. При этом существует $t_1 > t_0$ такое, что значение $x(\xi,t)$ определено и $x(\xi,t) \in \Omega$ при всех $t \in (t_0,t_1)$. Пусть $t^*(\xi)$ – точная верхняя грань множества значений t_1, при которых выполнено данное условие. Таким образом, $t^*(\xi)$ – верхняя граница по времени существования непродолжаемого решения уравнения (2.3) для данного значения параметра ξ.

Теперь для каждого момента времени t введем следующие множества, характеризующие области определения и значений для решений задачи (2.3)–(2.5). Пусть

$$D_0(t) = \{\xi \in \Omega_0 \,|\, t < t^*(\xi)\}, \quad t \in [0,T),$$

$$D_\Sigma(t) = \{\xi = (z,\tau) \in \Omega_\Sigma \,|\, \tau < t < t^*(\xi)\}, \quad t \in (0,T),$$

$$G_0(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = x(\xi,t),\ \xi \in D_0(t)\right\}, \quad t \in [0,T),$$

$$G_\Sigma(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = x(\xi,t),\ \xi \in D_\Sigma(t)\right\}, \quad t \in (0,T).$$

С физической точки зрения множество $D_0(t)$ представляет собой множество всевозможных значений лагранжевых координат частиц, которые начали свое движение в начальный момент времени из области с ненулевой завихренностью, и которые находятся в момент времени t в потоке, а множество $G_0(t)$ есть множество геометрических точек пространства, в которых в момент времени t находятся эти частицы. Аналогично множество $D_\Sigma(t)$ есть множество значений лагранжевых координат, которые соответствуют частицам, начавшим свое движение на поверхности тела во все предшествующие моменты времени, и которые в момент времени t находятся в потоке; $G_\Sigma(t)$ – есть множество геометрических точек в пространства, в которых в момент времени t находятся все частицы, стартовавшие с поверхности тела.

Лемма 4. А) *При каждом* $t \in [0,T)$ *множество* $D_0(t)$ *открыто* (*как элемент метрического пространства* $\mathbb{R}^3$).

Б) *При каждом* $t \in (0,T)$ *множества* $D_\Sigma(t)$ *открыто.* (*Здесь множество* $D_\Sigma(t)$ *рассматривается как элемент пространства* $\Sigma \times \mathbb{R}$, *где поверхность* Σ *рассматривается как самостоятельное метрическое пространство. Будем считать, что расстояние между элементами* $\xi = (z,\tau)$ *и* $\xi_1 = (z_1,\tau_1)$ *введено по формуле* $\rho(\xi,\xi_1) = |z - z_1| + |t - t_1|$.)

Доказательство. А) Пусть $\xi_0 \in D_0(t_0)$. Это означает, что непродолжаемое решение $y_0(t)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям (2.14), (2.16) с $\xi = \xi_0$, определено на отрезке $[0,t_0]$ и при всех $t \in [0,t_0]$ удовлетворяет условию $y_0(t) \in \Omega$. Тогда функция $\rho(y_0(t),\Sigma)$, где $\rho(y,\Sigma)$ – расстояние от точки y до поверхности Σ, непрерывна по переменной $t \in [0,t_0]$ и положительна. Значит, найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $t \in [0,t_0]$ выполнено неравенство

$$\rho(y_0(t),\Sigma) > \varepsilon. \tag{2.20}$$

Далее, по лемме 3 найдется такое $\delta_1 > 0$, что при $|\xi - \xi_0| < \delta_1$ функция $y(t) = x(\xi,t)$, являющаяся как функция от переменой t непродолжаемым решением уравнения (2.2) на множестве Г при условиях (2.14), (2.16) с этим ξ, также определена в точке t_0, а значит, и на всем отрезке $[0,t_0]$. При этом функция $x(\xi,t)$ равномерно непрерывна на замкнутом множестве пар $(\xi,t) \in \mathbb{R}^4$ таких, что $|\xi - \xi_0| \le \delta_1/2$, $t \in [0,t_0]$. Тогда найдется $\delta \in (0,\delta_1/2)$ такое, что при $|\xi - \xi_0| < \delta$ выполнено условие $|x(\xi,t) - x(\xi_0,t)| < \varepsilon$ при всех $t \in [0,t_0]$, где ε – константа из неравенства (2.20). Это означает, что точка ξ_0 принадлежит множеству $D_0(t_0)$ вместе со своей окрестностью радиуса δ. Утверждение А) доказано.

Б) Теперь пусть $\xi_0 = (z_0,\tau_0) \in D_\Sigma(t_0)$. Это означает, что непродолжаемое решение $y_0(t)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям (2.15), (2.16) с $\xi = \xi_0$, определено на отрезке $[\tau_0,t_0]$ и при всех $t \in [\tau_0,t_0]$ удовлетворяет условию $y_0(t) \in \Omega$.

В соответствии с предположением 2 введем на множестве $U_r(z_0)$ – трехмерной окрестности точки z_0 радиуса r, локальные координаты $\eta^* = (\eta_1, \eta_2, h)$. В силу леммы 4 существует $\delta_2 > 0$ такое, что для любой пары $\xi = (z, \tau)$, удовлетворяющей неравенствам

$$|z - z_0| < \delta_2, \quad |\tau - \tau_0| < \delta_2, \tag{2.21}$$

выполнены условия: $\tau < t_0$; непродолжаемое решение $y(t)$ уравнения (2.2) при условиях (2.15), (2.16) определено при $t = t_0$, а значит, и на всем отрезке $[\tau, t_0]$; при $t \in [\tau, \tau + \delta_2]$ для этого решения выполнено условие $y(t) \in U_r(z_0)$.

Тогда для точки $\xi = (z, \tau)$, удовлетворяющей условиям (2.21), можно определить функцию $\eta^*_\xi(t) = (\eta_{\xi,1}(t), \eta_{\xi,2}(t), h_\xi(t))$, ставящую в соответствие значению функции $y(t)$ в момент времени $t \in [\tau, \tau + \delta_2]$ набор локальных координат точки $y(t)$. Пусть $\eta^*_0(t) = (\eta_{0,1}(t), \eta_{0,2}(t), h_0(t))$, $t \in [\tau, \tau + \delta_2]$, – локальные координаты, соответствующие функции $y_0(t)$. При этом выполнено условие $dh_0/dt > 0$.

В силу леммы 3 функция $\eta^*_\xi(t)$ непрерывна по совокупности аргументов (ξ, t) при ξ удовлетворяющих условиям (2.21) и при $t \in [\tau, \tau + \delta_2]$. Тогда найдутся константы $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ и $\theta > 0$ такие, что при $|z - z_0| < \delta_3$, $|\tau - \tau_0| < \delta_3$, $t \in [\tau, \tau + \delta_3)$ выполнено условие

$$dh_\xi(t)/dt > \theta. \tag{2.22}$$

Теперь пусть $t_1 = \tau_0 + \delta_3/2$. Тогда для любой точки $\xi = (z, \tau)$, $z \in \Sigma$, $\tau \in R$ такой, что $|z - z_0| < \delta_3$, $|\tau - \tau_0| < \delta_3/4$ функция $\eta^*_\xi(t)$ определена на отрезке $[\tau, t_1]$, удовлетворяет условию (2.22) и при этом $t_1 - \tau > \delta_3/4$. Но тогда функция $x(\xi, t) = y(t)$, где $y(t)$ – решение уравнения (2.2) при условиях (2.15), (2.16), удовлетворяет условию

$$x(\xi, t) \in \Omega \quad \text{при} \quad t \in (\tau, t_1], \quad \rho(x(\xi, t), \Sigma) > \theta\delta_3/4 \equiv \varepsilon_1.$$

Теперь рассмотрим решение $y_0(t) = x(\xi_0, t)$ на отрезке $[t_1, t_0]$. Как и в случае А) найдется $\varepsilon_2 > 0$ такое, что $\rho(y_0(t), \Sigma) > \varepsilon_2$ при $t \in [t_1, t_0]$. Далее, в силу леммы 3 найдется $\delta_4 > 0$ такое, что при $|z - z_0| < \delta_4$, $|\tau - \tau_0| < \delta_4$ непродолжаемое решение $y(t)$ уравнения (2.2) при условиях (2.15), (2.16) с $\xi = (z, \tau)$ определено на отрезке $[t_1, t_0]$ и удовлетворяет условию $|y(t) - y_0(t)| < \varepsilon_2$ при $t \in [t_1, t_0]$. Но тогда $y(t) \in \Omega(t)$ при $t \in [t_1, t_0]$. Теперь если $\delta = \min(\delta_3, \delta_4)$, то при $|z - z_0| < \delta$, $|\tau - \tau_0| < \delta$ решение $y(t)$ удовлетворяет условию $y(t) \in \Omega$ при $t \in (\tau, t_0]$. Но это означает, что точка ξ_0 принадлежит множеству $D_\Sigma(t_0)$ вместе со своей окрестностью радиуса δ. Утверждение Б) доказано. Лемма доказана.

Лемма 5. *Множества $G_0(t)$ и $G_\Sigma(t)$ при каждом $t \in (0, T)$ являются открытыми.*

Доказательство. А) Рассмотрим множество $G_0(t)$, $t \in [0, T)$. Для выбранного момента времени t функция $x(\xi, t)$ определяет отображение точек $\xi \in D_0(t)$ в трехмерное пространство (точке ξ ставится в соответствие точка $x(\xi, t)$), причем множество $G_0(t)$ есть множество значений этого отображения. Пусть $\xi_0 \in D_0(t)$. По лемме 4 существует окрестность этой точки в пространстве $\mathbb{R}^3$, целиком лежащая в множестве $D_0(t)$, а по лемме 3 рассматриваемое отображение непрерывно дифференцируемо в данной окрестности. Рассмотрим якобиан этого отображения

$$J(\xi, t) = \left|\det\left(\frac{\partial x_i(\xi, t)}{\partial \xi_j}\right)\right|, \quad \xi \in D_0(t). \tag{2.23}$$

По формуле дифференцирования по времени якобиана перехода к лагранжевым переменным [18, формула (4.40), с. 164] и в силу уравнений (2.3) и начальных условий (2.4) имеем

$$\frac{\partial J(\xi, t)}{\partial t} = J(\xi, t)\operatorname{div}\mathbf{u}(x(\xi, t), t), \quad J(\xi, 0) = 1. \tag{2.24}$$

Из этих соотношений следует, что выполнено условие $J(\xi,t) \neq 0$ при всех $t \in [0,t^*(\xi))$, $\xi \in D_0(t)$. Действительно, рассматривая соотношения (2.24) как уравнения относительно функции J при заданной функции $\mathbf{u}$, можем записать

$$J(\xi,t) = J(\xi,0)\exp\left\{\int_0^t a(t')dt'\right\}, \quad a(t) = \operatorname{div}\mathbf{u}(x(\xi,t),t).$$

Тогда из теоремы об обратной функции [19, с. 489] следует, что в рассматриваемый момент времени t у рассматриваемой точки $\xi_0 \in D_0(t)$ найдется окрестность такая, что отображение, определяемое функцией $x(\xi,t)$, есть диффеоморфизм этой окрестности и некоторой окрестности точки $x_0 = x(\xi_0,t)$. Но это и означает, что точка x_0 лежит в множестве $G_0(t)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Значит множество $G_0(t)$ открыто.

Б) Рассмотрим множество $G_\Sigma(t)$, $t \in (0,T)$. Пусть

$$\xi_0 = (z_0,\tau_0) \in D_\Sigma(t), \quad z_0 \in \Sigma, \quad \tau_0 \in (0,t).$$

По предположению 2 точка z_0 лежит в области действия некоторой локальной карты φ_k на поверхности.

Каждую точку $\xi = (z,\tau)$, где $z \in \Sigma_k$, можно описать набором координат $\tilde{\eta} = (\eta_1,\eta_2,\tau)$ так, что $\xi = (\varphi_k(\eta),\tau)$, $\eta = (\eta_1,\eta_2)$. Пусть

$$\tilde{D}_k(t) = \{\tilde{\eta} = (\eta_1,\eta_2,\tau) | \eta = (\eta_1,\eta_2) \in V_k, \xi(\tilde{\eta}) = (\varphi_k(\eta),\tau) \in D_\Sigma(t)\}. \tag{2.25}$$

Рассмотрим функцию $\tilde{x}(\tilde{\eta},t) = x(\xi,t)$ при $\xi = (\varphi_k(\eta),\tau)$, $\eta \in V_k$, $t \in [\tau,t^*(\xi))$.

Пусть $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{D}_k(t)$. По лемме 4 существует окрестность этой точки в пространстве $\mathbb{R}^3$, целиком лежащая в множестве $\tilde{D}_k(t)$, а по лемме 3 для каждого $t \in (\tau,T)$ отображение, ставящее в соответствие точке $\tilde{\eta} \in \tilde{D}_k(t)$ точку $\tilde{x}(\tilde{\eta},t)$ является непрерывно дифференцируемым. Якобиан этого отображения можно представить в виде

$$\tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t) = \left|\left(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\eta_1}\times\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\eta_1}\right)\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\tau}\right|. \tag{2.26}$$

Функция $\tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t)$ и ее производная по t имеют предел при $t \to \tau$. В силу равенства

$$\tilde{x}(\tilde{\eta},t) = z \quad \text{при} \quad \tilde{\eta} = (\eta_1,\eta_2,\tau), \quad t = \tau, \quad \text{где} \quad z = \varphi_k(\eta),$$

имеем $\partial\tilde{x}/\partial\tau + \partial\tilde{x}/\partial t = 0$ и, значит, $\partial\tilde{x}/\partial\tau = -\mathbf{u}(\varphi_k(\eta),t)$ при $t = \tau$. Тогда

$$\tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t) = \left|(\boldsymbol{\tau}_1^k \times \boldsymbol{\tau}_2^k)\mathbf{u}\right| \quad \text{при} \quad t = \tau, \quad \boldsymbol{\tau}_i^k = \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_i}, \quad i = 1,2. \tag{2.27}$$

Заметим, что векторы $\boldsymbol{\tau}_i^k$, $i = 1,2$, есть независимые касательные векторы к поверхности Σ в точке $z = \varphi_k(\eta)$. Т.к. мы рассматриваем только такие элементы $\tilde{\eta}$, для которых $\mathbf{u}(z,\tau)\mathbf{n}(z) > 0$, то выполнено условие $\tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t) \neq 0$ при $t = \tau$. Опять заметим, что

$$\frac{\partial\tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t)}{\partial t} = \tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t)\operatorname{div}\mathbf{u}(\tilde{x}(\tilde{\eta},t),t). \tag{2.28}$$

Тогда $\tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t) \neq 0$ при всех $t \in [\tau,t^*(\xi))$.

Теперь, применяя теорему об обратной функции, опять можем утверждать, что существует окрестность точки $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{D}_k(t)$, для которой отображение, определяемое функцией $\tilde{x}(\tilde{\eta},t)$, есть диффеоморфизм этой окрестности и некоторой окрестности точки $x_0 = \tilde{x}(\tilde{\eta}_0,t)$. Но эта окрестность точки x_0 лежит в множестве $G_\Sigma(t)$. Значит, это множество открыто. Лемма доказана.

2.5. Движение частиц, заканчивающееся на поверхности

Далее нас также будут интересовать частицы, траектории которых заканчиваются на поверхности Σ. Пусть $S^{-}(t)$, $t \in [0,T]$, есть множество всех точек $z \in \Sigma$, в которых в момент времени t выполнено условие:

$$\boldsymbol{\omega}(z,t) \neq 0, \quad \mathbf{u}(z,t)\mathbf{n}(z) < 0. \tag{2.29}$$

Так же, для каждого момента времени $t \in [0,T]$ введем множество $G_{\Sigma}^{-}(t)$, элементами которого являются точки области Ω, в которых находятся частицы, движение которых заканчивается на поверхности Σ, причем, на участке этой поверхности, на котором в момент окончания движения выполнено условие (2.29). Математически множество $G_{\Sigma}^{-}(t)$ определим как множество всех точек $x \in \Omega$ таких, что $x = x(\xi,t)$, $\xi \in D_0(t) \cup D_{\Sigma}(t)$, и для которых выполнено условие:

$$t^*(\xi) < T, \quad \text{существует} \quad z = \lim_{t' \to t^*(\xi)} x(\xi,t'), \quad z \in S^{-}(t^*(\xi)). \tag{2.30}$$

Для анализа движения всех таких частиц можно ввести новую лагранжеву параметризацию, приписав каждой такой частице лагранжев параметр $\xi^{-} = (z,\tau)$, где $\tau \in (0,T)$ – момент окончания движения, $z \in S^{-}(\tau)$ – точка, в которой оканчивается движение. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial x^{-}(\xi^{-},t)}{dt} = \mathbf{u}(x^{-}(\xi^{-},t),t), \quad t \leq \tau, \tag{2.31}$$

$$x^{-}(\xi^{-},\tau) = z \quad \text{при} \quad \xi^{-} = (z,\tau), \quad \tau \in (0,T), \quad z \in S^{-}(\tau). \tag{2.32}$$

Заметим, что задача (2.31)–(2.32) полностью аналогична задаче (2.3), (2.5) с обращением времени. Применяя полученные выше для системы (2.3), (2.5) результаты к системе (2.31), (2.32), можем сформулировать следующие свойства ее решений.

Для каждого $\xi^{-} = (z,\tau)$, $\tau \in (0,T)$, $z \in S^{-}(\tau)$ существует непродолжаемое влево решение уравнения (2.31), определенное на интервале времени $t \in (t^{*-}(\xi^{-}),\tau]$, удовлетворяющее условию $x^{-}(\xi^{-},t) \in \Omega$ при $t < \tau$.

Далее, для обращенной по времени задачи (2.31), (2.32) введем множество $D_{\Sigma}^{-}(t)$ значений лагранжевой переменной, аналогичное множеству $D_{\Sigma}(t)$:

$$D_{\Sigma}^{-}(t) = \left\{\xi^{-} = (z,\tau), \tau \in (0,T), z \in S^{-}(\tau) \,\middle|\, t^{*-}(\xi^{-}) < t < \tau\right\}, \quad t \in (0,T).$$

При этом множество $G_{\Sigma}^{-}(t)$ задается формулой:

$$G_{\Sigma}^{-}(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = x^{-}(\xi^{-},t),\ \xi^{-} \in D_{\Sigma}^{-}(t)\right\}, \quad t \in (0,T),$$

множества $D_{\Sigma}^{-}(t)$ и $G_{\Sigma}^{-}(t)$ открыты (множество $D_{\Sigma}^{-}(t)$ открыто в смысле расстояния, введенного в лемме 4).

3. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ЧЕРЕЗ ЗАВИХРЕННОСТЬ

Напомним, что поле скоростей жидкости при выполнении условий (1.3), (1.4) и условии $|\boldsymbol{\omega}| \in L_1(\Omega)$ (как функция от координат) определяется в области Ω формулой [20], [21]:

$$\mathbf{w}(x,t) = \mathbf{w}_{\infty} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}(y,t) \times \mathbf{V}(x-y)dy, \quad \mathbf{V}(x-y) = \frac{1}{4\pi}\frac{x-y}{|x-y|^3} \tag{3.1}$$

($\mathbf{V}(x-y)$ – векторное поле, подчиняющееся закону Кулона).

Заметим, что поле скоростей $\mathbf{w}(x,t)$ можно доопределить для всех $x \in \mathbb{R}^3$ в соответствии с формулой (3.1). При этом для любой функции $\boldsymbol{\omega}(y,t)$, удовлетворяющей условиям $\boldsymbol{\omega} \in C^1(\bar{\Omega} \times [0,T])$, $|\boldsymbol{\omega}| \in L_1(\Omega)$ (как функция от координат) и $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0$, функция $\mathbf{w}(x,t)$, определяемая формулой (3.1), удовлетворяет условиям $\mathbf{w}\in C(R^3\times[0,T])$, $\mathbf{w}\in C^1(\Omega\times[0,T])$, $\mathbf{w}\in C^1(\Omega^-\times[0,T])$ и равенствам (см. [20], [21])

$$\operatorname{rot}\mathbf{w}=\boldsymbol{\omega}\quad\text{при}\quad x\in\Omega,\quad \operatorname{rot}\mathbf{w}=0\quad\text{при}\quad x\in\Omega^-\quad \operatorname{div}\mathbf{w}=0\quad\text{при}\quad x\in\Omega\cup\Omega^-.$$

Если при этом выполнено граничное условие (1.4), то справедливо равенство

$$\mathbf{w}=0\quad\text{при}\quad x\in\Omega^-. \tag{3.2}$$

Предположение 3. При каждом $t\in(0,T)$ выполнено равенство $\Omega'(t)=G_0(t)\cup G_\Sigma(t)$, множества $G_0(t)$ и $G_\Sigma(t)$ были определены в п. 2.4.

С физической точки зрения предположение 3 означает, что завихренность не может возникнуть внутри жидкости, а может быть только перенесена с поверхности или из области с начальной завихренностью частицами, которые движутся с переносной скоростью.

Таким образом, в формуле (3.1) вместо интегрирования по области Ω достаточно осуществить интегрирование по объединению областей $G_0(t)$ и $G_\Sigma(t)$. При этом в силу леммы 5 эти множества открыты, но, вообще говоря, могут быть неограниченными. Тогда пересечение этих множеств с любым открытым шаром измеримо по Лебегу и формулу (3.1) для поля скоростей можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{w}(x,t)=\mathbf{w}_\infty+\mathbf{w}_0(x,t)+\mathbf{w}_\Sigma(x,t),\\ \mathbf{w}_0(x,t)=\int\limits_{G_0(t)}\boldsymbol{\omega}(y,t)\times\mathbf{V}(x-y)dy,\quad \mathbf{w}_\Sigma(x,t)=\int\limits_{G_\Sigma(t)}\boldsymbol{\omega}(y,t)\times\mathbf{V}(x-y)dy,\end{gathered} \tag{3.3}$$

причем, оба интеграла существуют как интегралы Лебега.

Осуществим в возникших интегралах переход к интегрированию по лагранжевым координатам точек.

Для поля $\mathbf{w}_0(x,t)$ сразу можем записать:

$$\mathbf{w}_0(x,t)=\int\limits_{G_0(t)}\boldsymbol{\omega}(x(\xi,t),t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t))J(\xi,t)d\xi,,$$

где $J(\xi,t)$ – якобиан, определяемый формулой (2.23).

Рассмотрим поле $\mathbf{w}_\Sigma(x,t)$. Выделим на поверхности Σ участок Σ_k, на котором действует локальная карта φ_k. Соответственно на множестве $D_\Sigma(t)$ выделим часть $D_k(t)$, образованную точками $\xi=(z,\tau)\in D_\Sigma(t)$ такими, что $z\in\Sigma_k$, $k=1,\ldots,K$. Пусть также $G_k(t)$ есть подмножество множества $G_\Sigma(t)$, состоящее из точек $x=x(\xi,t)$, $\xi\in D_k(t)$.

Далее, $D_k(t)$ есть множество элементов $\xi=(z,\tau)$, для которых точка z представляется в виде $z=\varphi_k(\eta)$ так, что $\tilde\eta=(\eta_1,\eta_1,\tau)\in\tilde D_k(t)$, множество $\tilde D_k(t)$ определяется формулой (2.25). Тогда

$$\int\limits_{G_k(t)}\boldsymbol{\omega}(y,t)\times\mathbf{V}(x-y)dy=\int\limits_{(\eta_1,\eta_2,\tau)\in\tilde D_k(t)}\boldsymbol{\omega}(x(\xi,t),t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t))\tilde J_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t)d\eta_1d\eta_2d\tau,$$

якобиан $\tilde J_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t)$ определяется формулой (2.26).

Пусть

$$V_k^*(\tau,t)=\{\eta=(\eta_1,\eta_2)\in V_k\,|\,(\eta_1,\eta_2,\tau)\in\tilde D_k(t)\},\quad S_k(\tau,t)=\left\{z\in\Sigma\,\middle|\,z=\varphi_k(\eta),\,\eta\in V_k^*(\tau,t)\right\}.$$

Множество $S_k(\tau,t)$ есть часть поверхности Σ_k, на которой в момент τ начали движение жидкие частицы, находящиеся в потоке в момент времени t. При этом $V_k^*(\tau,t)$ есть множество значений параметра η, соответствующих точкам поверхности $S_k(\tau,t)$. Тогда последний интеграл можем переписать в виде

$$\int\limits_{G_k(t)}\boldsymbol{\omega}(y,t)\times\mathbf{V}(x-y)dy=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(\eta_1,\eta_2)\in V_k^*(t)}\boldsymbol{\omega}(x(\xi,t),t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t))\tilde J_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t)d\eta_1d\eta_2. \tag{3.4}$$

Действительно, для данных $x \in R^3$ и $t \in (0,T)$ введем обозначение

$$\mathbf{F}(\eta_1,\eta_2,\tau) = \boldsymbol{\omega}(x(\xi,t),t)\times \mathbf{V}(x - x(\xi,t))\tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t), \quad \tau \in (0,t), \quad (\eta_1,\eta_2)\in V_k^*(\tau,t).$$

Доопределим $\mathbf{F}(\eta_1,\eta_2,\tau) = 0$ при $\tau \in (0,t)$, $(\eta_1,\eta_2)\in V_k \setminus V_k^*(\tau,t)$. Заметим, что множество $V_k^*(\tau,t)$ есть открытое подмножество множества V_k. Поэтому оно измеримо. При этом

$$\int\limits_{G_k(t)} \boldsymbol{\omega}(y,t)\times \mathbf{V}(x-y)dy = \int\limits_{(\eta_1,\eta_2,\tau)\in V_k\times[0,t]} \mathbf{F}(\eta_1,\eta_2,\tau)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,$$

Интеграл справа существует как интеграл Лебега, поскольку существует интеграл слева. По теореме Фуббини (см. [22, гл. 5, § 6, с. 317]) заключаем, что верна формула (3.4), где внутренний интеграл существует по Лебегу при почти всех значениях $\tau \in [0,t]$.

Далее, заметим, что поверхностный интеграл I рода на поверхности Σ_k от функции $f(z)$, определенной на этой поверхности, можем представить в виде

$$\int\limits_{\Sigma_k} f(z)d\sigma_z = \int\limits_{(\eta_1,\eta_2)\in V_k(t)} f(\varphi_k((\eta_1,\eta_2)) J_k^0(\eta_1,\eta_2)d\eta_1 d\eta_2, \quad \text{где} \quad J_k^0(\eta_1,\eta_2) = \left\| \frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_1}\times\frac{\partial\varphi_k}{\partial\eta_2} \right\|.$$

Поэтому

$$\int\limits_{G_k(t)} \boldsymbol{\omega}(y,t)\times \mathbf{V}(x-y)dy = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_k(\tau,t)} \boldsymbol{\omega}(x(\xi,t),t)\times \mathbf{V}(x - x(\xi,t))J(\xi,t)d\sigma_z, \quad \text{где} \quad \xi = (z,\tau),$$
$$J(\xi,t) = \frac{\tilde{J}_k(\eta_1,\eta_2,\tau,t)}{J_k^0(\eta_1,\eta_2)}. \tag{3.5}$$

Легко показать, что функция $J(\xi,t)$ не зависит от выбора системы локальных карт φ_k, $k = 1,\ldots,K$, определяющей параметризацию поверхности. Действительно, поскольку функция $J_k^0(\eta_1,\eta_2)$ не зависит от времени, из формул (2.27) и (2.28) можем записать:

$$\frac{\partial J(\xi,t')}{\partial t'} = J(\xi,t')\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}(x(\xi,\tau),t'), \quad t' \in [\tau,t], \quad J(\xi,\tau) = \mathbf{u}(z,\tau)\mathbf{n}(z). \tag{3.6}$$

Для каждой пары $\xi = (z,\tau)$ функция $J(\xi,t')$ есть решение начальной задачи (3.6), которое не зависит от выбора параметризации.

Теперь введем вместо функции $\boldsymbol{\omega}(x,t)$ новую неизвестную функцию, которую назовем *лагранжевой плотностью завихренности.*

$$\boldsymbol{\psi}(\xi,t) = \boldsymbol{\omega}(x(\xi,t),t)J(\xi,t), \quad t \in [0,T), \quad \xi \in D_0(t)\cup D_\Sigma(t), \tag{3.7}$$

где мы доопределили $D_\Sigma(0) = \varnothing$.

Тогда

$$\mathbf{w}_0(x,t) = \int\limits_{D_0(t)} \psi(\xi,t)\times \mathbf{V}(x - x(\xi,t))d\xi, \quad \mathbf{w}_\Sigma(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t)} \psi(\xi,t)\times \mathbf{V}(x - x(\xi,t))d\sigma_z, \tag{3.8}$$

где

$$\Sigma_\omega(\tau,t) = \{ z \in S(\tau) \,|\, t < t^*(\xi), \xi = (z,\tau)\}, \quad t \in (0,T), \quad \tau \in (0,t). \tag{3.9}$$

Лагранжева плотность завихренности определяет количество завихренности, приходящейся на единицу объема в пространстве лагранжевых координат. Формулы (3.8) дают выражение для поля скоростей через лагранжеву плотность завихренности.

4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ ПЛОТНОСТИ ЗАВИХРЕННОСТИ

4.1. Уравнения переноса лагранжевой плотности завихренности

Для функции $\boldsymbol{\psi}(\xi,t)$, с учетом формул (2.24) и (3.6), в каждой точке $x = x(\xi,t)$ выполнено соотношение:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}(\xi,t)}{\partial t} = J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + J\boldsymbol{\omega}\operatorname{div}\mathbf{u}$$

Теперь из уравнения (1.14), с учетом начальных условий из задачи (3.6), получаем

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}(\xi,t)}{\partial t} = (\boldsymbol{\psi}\nabla)\,\mathbf{u}, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\xi,0) = \boldsymbol{\omega}_0(\xi) \quad \text{при} \quad \xi\in\Omega_0, \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\xi,\tau) = \boldsymbol{\gamma}(z,\tau) \quad \text{при} \quad \xi\in\Omega_\Sigma, \tag{4.3}$$

где мы обозначили через $\boldsymbol{\gamma}$ плотность потока завихренности на поверхности тела Σ:

$$\boldsymbol{\gamma}(z,\tau) = \boldsymbol{\omega}(z,\tau)\big(\mathbf{u}(z,\tau)\mathbf{n}(z)\big), \quad \tau\in[0,T], \quad z\in S(\tau). \tag{4.4}$$

Соотношения (4.1)–(4.3) при заданном поле скоростей $\mathbf{u}$ можно рассматривать как начальную задачу для функции $\boldsymbol{\psi}(\xi,t)$, $t\in[0,T]$, $\xi\in D_0(t)\cup D_\Sigma(t)$.

Формулы (4.1)–(4.3), вместе с формулами (3.3), (3.8) можно использовать для замыкания уравнений движения частиц (2.3)–(2.5), если найти уравнение для функции $\boldsymbol{\gamma}(z,\tau)$, определяемой соотношением (4.4), содержащее только функции $x(\xi,\tau)$ и $\boldsymbol{\psi}(\xi,\tau)$. Это соотношение будет получено.

4.2. Уравнение для потока завихренности с поверхности тела

Сделаем следующее дополнительное предположение.

Предположение 4. В каждый момент времени $t\in(0,T)$ почти всюду на поверхности Σ выполнено условие $\omega(z,t)\neq 0$.

Кроме того, предполагаем, что во всей области течения выполнено равенство (1.10).

Лемма 6. *При условии* (1.10) *функция* $\boldsymbol{\psi}(\xi,t)$ *является ограниченной.*

Доказательство. При условии (1.10) уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}(\xi,t)}{\partial t} = (\boldsymbol{\psi}\nabla)\,\mathbf{w}. \tag{4.5}$$

Заметим, что в силу начального условия (4.3) при $\tau\in(0,T)$ выполнены равенства

$$|\boldsymbol{\psi}(\xi,\tau)| = |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{un})| \le \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{\omega}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}|}{|\boldsymbol{\omega}|^2} \le \frac{1}{\mathrm{Re}}|\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}|,$$

где $\xi = (z,\tau)$, функции $\boldsymbol{\omega}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}$ берутся в точке $z\in\Sigma$ в момент времени t.

С учетом последней формулы найдется константа C_1 такая, что при всех $\xi = (z,\tau)\in\Omega_\Sigma$, выполнена оценка $|\boldsymbol{\psi}(\xi,\tau)|\le C_1$ и при всех $\xi\in\Omega_0$ выполнена оценка $|\boldsymbol{\psi}(\xi,0)|\le C_1$. В силу формулы (4.5) найдется константа C_2 такая, что $|\partial\boldsymbol{\psi}(\xi,t)/\partial t|\le C_2|\boldsymbol{\psi}(\xi,t)|$. Но тогда легко показать, что

$$|\boldsymbol{\psi}(\xi,t)| \le |\boldsymbol{\psi}(\xi,\tau)|e^{C_2T} \le C_1e^{C_2T} \tag{4.6}$$

(это следует из леммы Гронуолла [23, с. 85]). Лемма доказана.

Напомним, что мы доопределили поле скоростей $\mathbf{w}(x,t)$ для всех $x\in R^3$ по формуле (3.1), причем при этом при всех $x\in R^3$ справедливы выражения (3.3), (3.8). Из условия (3.2) следует

$$\frac{\partial\mathbf{w}(x,t)}{\partial t} = 0, \quad x\in\Omega^-.$$

Искомое соотношение для функции $\boldsymbol{\gamma}(z,\tau)$ – потока завихренности с поверхности тела, получим, подставив выражение для поля скоростей в виде (3.3), (3.8) в последнее равенство.

Рассмотрим производную по времени скорости $\mathbf{w}(x,t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{w}(x,t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\times\Bigg\{\int\limits_{D_0(t)} \boldsymbol{\psi}(\xi,t)\times \mathbf{V}(x-x(\xi,t))d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t)} \boldsymbol{\psi}(\xi_z,t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t))d\sigma_z - \\ - \int\limits_{D_0(t-\Delta t)} \boldsymbol{\psi}(\xi,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t-\Delta t))d\xi - \int\limits_0^{t-\Delta t} d\tau \int\limits_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t)} \boldsymbol{\psi}(\xi_z,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t-\Delta t))d\sigma_z\Bigg\}, \quad (4.7)$$

здесь $\xi_z = (z,\tau)$.

Суть дальнейшего рассуждения состоит в том, чтобы выделить из записанного выражения в правой части последнего равенства слагаемые, связанные с началом и окончанием движения лагранжевых частиц на поверхности тела в интервале времени $(t-\Delta t, t)$. Специфика и сложность этого рассуждения состоит в том, что учитывается стремление к бесконечности скорости движения индивидуальных частиц при стремлении завихренности к нулю и не используются никакие предположения о структуре границы множества, на котором завихренность не равна нулю. При этом из частиц, окончивших движение на поверхности тела, нас будут интересовать только те частицы, для которых выполнено условие (2.30) (т.е. закончившие движение на участке $S^-(t^*(\xi))$ поверхности Σ).

Мы рассматриваем случай $x\in\Omega^-$, т.к. при этом в подынтегральных выражениях в формуле (4.7) особенность отсутствует, что существенно в дальнейшем рассуждении.

Сначала отметим, что в каждый момент времени $t\in[0,T]$ поле скоростей, индуцируемое вихревыми частицами, сосредоточенными в множестве $G_\Sigma^-(t)$ (см. п. 2.5), представляется в виде

$$\int\limits_{G_\Sigma^-(t)} \boldsymbol{\omega}(y,t)\times\mathbf{V}(x-y)dy = \int\limits_t^T d\tau \int\limits_{z\in\Sigma_\omega^-(\tau,t)} \boldsymbol{\psi}^-(\xi_z^-,t)\times\mathbf{V}(x-x^-(\xi_z^-,t))d\sigma_z, \quad (4.8)$$

$$\Sigma_\omega^-(\tau,t) = \left\{z\in S^-(\tau)\,\middle|\, t^*(\xi_z^-) > t, \xi_z^- = (z,\tau)\right\}, \quad t\in(0,T), \quad \tau\in(t,T), \quad (4.9)$$

функция $\boldsymbol{\psi}^-(\xi^-,t)$ есть решение задачи

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^-(\xi^-,t)}{\partial t} = (\boldsymbol{\psi}^-\nabla)\mathbf{u}, \quad t^{*-}(\xi^-) < t \le \tau, \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\xi^-,\tau) = \gamma(z,\tau) \quad \text{при} \quad \xi^-\in D_\Sigma^-(t), \quad (4.11)$$

$$\gamma(z,\tau) = -\boldsymbol{\omega}(z,\tau)\big(\mathbf{u}(z,\tau)\mathbf{n}(z)\big), \quad \tau\in[0,T], \quad z\in S^-(\tau). \quad (4.12)$$

Соотношение (4.8) и уравнения (4.10)–(4.12) выводятся аналогично второму из соотношений (3.8) и уравнениям (4.1), (4.3)–(4.4).

Вернемся к формуле (4.7). Сравним множества, по которым ведется интегрирование для моментов $t-\Delta t$ и t в аналогичных интегралах в этой формуле. Заметим, что переменная ξ_z пробегает множество $D_\Sigma(t)$ во втором интеграле и множество $D_\Sigma(t-\Delta t)$ в четвертом интеграле (определение множества $D_\Sigma(t)$ было дано в п. 2.4). Для этих множеств справедливы выражения

$$D_\Sigma(t) = \left\{\xi = (z,\tau)\,\middle|\,\tau\in(0,t),\ z\in S_\omega(\tau,t)\right\},$$
$$D_\Sigma(t-\Delta t) = \left\{\xi = (z,\tau)\,\middle|\,\tau\in(0,t-\Delta t),\ z\in\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t)\right\},$$

множество $\Sigma_\omega(\tau,t)$ определено выражением (3.9).

Далее, справедливы следующие соотношения:

$$D_0(t)\backslash D_0(t-\Delta t) = \varnothing \quad \text{в силу предположения 3};$$

$$D_0(t-\Delta t)\backslash D_0(t) = \Delta D_0^\Sigma(t-\Delta t,t)\cup\Delta D_0(t-\Delta t,t),$$

где $\Delta D_0^\Sigma(t-\Delta t,t)$ есть множество элементов $\xi\in\Omega_0$ таких, что выполнено неравенство

$$t-\Delta t < t^*(\xi) \le t, \quad (4.13)$$

и при этом выполнено условие (2.30), а $\Delta D_0(t-\Delta t,t)$ есть множество остальных элементов $\xi\in\Omega_0$, для которых выполнено условие (4.13) (т.е. для которых не выполнено условие (2.30));

$$D_\Sigma(t)\backslash D_\Sigma(t-\Delta t)=\{\xi=(z,\tau)\,|\,\tau\in(t-\Delta t,t],\ z\in S_\omega(\tau,t)\};$$
$$D_\Sigma(t-\Delta t)\backslash D_\Sigma(t)=\Delta D_\Sigma(t-\Delta t,t)\cup\Delta D_\Sigma^\Sigma(t-\Delta t,t),$$

где $\Delta D_\Sigma^\Sigma(t-\Delta t,t)$ есть множество элементов $\xi=(z,\tau)$, $\tau\in(0,t-\Delta t]$, $z\in S(\tau)$, таких, что выполнены неравенство (4.13) и условие (2.30), $\Delta D_\Sigma(t-\Delta t,t)$ – множество остальных элементов $\xi=(z,\tau)$, $\tau\in(0,t-\Delta t]$, $z\in S(\tau)$, таких, что выполнены неравенство (4.13).

Множество $\Delta D_\Sigma(t-\Delta t,t)$ представим в виде

$$\begin{gathered}\Delta D_\Sigma(t-\Delta t,t)=\{\xi=(z,\tau)\,|\,\tau\in(0,t-\Delta t),\ z\in\Delta\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t,t)\},\\ \Delta\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t,t)=\{z\in S(\tau)\,|\,\tau\in(0,t-\Delta t],\ z\in\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t),\ t-\Delta t<t^*(\xi)\le t\\ \text{и не выполнено условие (2.30)}\}.\end{gathered}\tag{4.14}$$

Рассмотрим объединение множеств

$$\Delta D^\Sigma(t-\Delta t,t)=\Delta D_0^\Sigma(t-\Delta t,t)\cup\Delta D_\Sigma^\Sigma(t-\Delta t,t).$$

Построим множество $\Delta G^\Sigma(t-\Delta t,t)$, состоящее из точек $x\in\Omega$ таких, что $x=x(\xi,t-\Delta t)$, $\xi\in\Delta D^\Sigma(t-\Delta t,t)$. Все индивидуальные частицы, лагранжевы координаты которых лежат в множестве $\Delta D^\Sigma(t-\Delta t,t)$, заканчивают свое движение на поверхности Σ в момент времени, лежащий в промежутке $(t-\Delta t,t]$ с выполнением условия (2.30). Поэтому $\Delta G^\Sigma(t-\Delta t,t)\subset G^-(t-\Delta t)$.

Теперь перепишем формулу (4.7), выделив отдельно интегралы по множествам частиц, которые начали или окончили (с выполнением условия (2.30)) движение на поверхности Σ на промежутке времени $(t-\Delta t,t)$:

$$\frac{\partial\mathbf{w}(x,t)}{\partial t}=D_t'\mathbf{w}(x,t)+D_t''\mathbf{w}(x,t),\tag{4.15}$$

$$\begin{gathered}D_t'\mathbf{w}(x,t)=\lim_{\Delta t\to0}\left\{\int\limits_{D_0(t)\cap D_0(t-\Delta t)}\left(\frac{\boldsymbol{\psi}(\xi,t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t))-\boldsymbol{\psi}(\xi,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t-\Delta t))}{\Delta t}\right)d\xi+\right.\\ +\int\limits_0^{t-\Delta t}d\tau\int\limits_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t)\cap\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t)}\left(\frac{\boldsymbol{\psi}(\xi_z,t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t))-\boldsymbol{\psi}(\xi_z,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t-\Delta t))}{\Delta t}\right)d\sigma_z-\\ -\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\Delta D_0(t-\Delta t,t)}\boldsymbol{\psi}(\xi,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t-\Delta t))d\xi-\\ \left.-\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^{t-\Delta t}d\tau\int\limits_{z\in\Delta\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t,t)}\boldsymbol{\psi}(\xi_z,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t-\Delta t))d\sigma_z\right\},\end{gathered}\tag{4.16}$$

$$\begin{gathered}D_t''\mathbf{w}(x,t)=D_t''^{+}\mathbf{w}(x,t)+D_t'^{-}\mathbf{w}(x,t),\\ D_t''^{+}\mathbf{w}(x,t)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t-\Delta t}^{t}d\tau\int\limits_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t)}\boldsymbol{\psi}(\xi_z,t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t))d\sigma_z,\\ \left.D_t''^{-}\mathbf{w}(x,t)=-\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t-\Delta t}^{t}d\tau\int\limits_{z\in\Sigma_\omega^-(\tau,t-\Delta t)}\boldsymbol{\psi}^-(\xi_z,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t-\Delta t))d\sigma_z\right\},\quad\xi_z=(z,\tau).\end{gathered}\tag{4.17}$$

Далее исследуем подробно функцию $D_t''\mathbf{w}(x,t)$, определяемую формулой (4.17).

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим на поверхности Σ множества $\Sigma_\varepsilon=\Sigma_\varepsilon(t)$, состоящее из точек $z\in\Sigma$, таких, что $|\boldsymbol{\omega}(z,t)|\ge\varepsilon$ и $\mathbf{u}(z,t)\mathbf{n}(z)\ge\varepsilon$, и $\Sigma_\varepsilon^-=\Sigma_\varepsilon^-(t)$, состоящее из точек $z\in\Sigma$, таких, что $|\boldsymbol{\omega}(z,t)|\ge\varepsilon$ и $\mathbf{u}(z,t)\mathbf{n}(z)\le-\varepsilon$.

Лемма 7. *Для каждого* $t_0 \in (0,T)$ *и для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ *такое, что для каждого* $\tau \in (t_0 - \delta, t_0)$ *выполнены условия* $\Sigma_\varepsilon(t_0) \subset \Sigma_\omega(\tau, t_0)$ *и* $\Sigma_\varepsilon^-(t_0) \subset \Sigma_\omega^-(\tau, t_0 - \delta)$.

Доказательство. Как и в п. 2.4 рассмотрим непродолжаемые решения уравнения (2.2) $y(t)$, такие, что $(y(t), t) \in \Gamma$, Γ – множество, определяемое формулой (2.10) – расширенная область определения функции $\mathbf{u}$. Пусть T есть множество наборов (x, t, τ), $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in (0,T)$, $\tau \in (0,T)$, таких, что решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условию

$$y(\tau) = x, \tag{4.18}$$

определено в момент t. Тогда множество T открыто как множество в пространстве R^5, причем функция y непрерывно дифференцируема как функция переменных (x, t, τ) на множестве T (см. теоремы 14, 15 из [17]).

Пусть теперь A есть множество наборов (x, t, τ) таких, что $x \in \Sigma$, $|\boldsymbol{\omega}(x, t_0)| \ge \varepsilon$, $t = t_0$, $\tau = t_0$. Множество A есть замкнутое подмножество множества T. Тогда существует $\delta_1 > 0$ такое, что множество A лежит в множестве T вместе со своей δ_1-окрестностью. Из этого, в частности, следует, что при $|\tau - t_0| < \delta_1$ решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условию (4.18), определено на промежутке $[t_0 - \delta, t_0]$.

Осталось доказать, что при достаточно малом $\delta > 0$ это решение удовлетворяет условию $y(t) \in \Omega$ на промежутке $(\tau, t_0]$, при $x \in \Sigma_\varepsilon(t_0)$ и на промежутке $[t_0 - \delta, \tau)$, при $x \in \Sigma_\varepsilon^-(t_0)$, где $\tau \in (t_0 - \delta, t_0)$.

Т.к. функция y непрерывно зависит от $(x, t, \tau) \in T$, найдется $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ такое, что решение $y(t)$, удовлетворяющее условию (4.18), где $|\boldsymbol{\omega}(x, t_0)| \ge \varepsilon$ и $|\tau - t_0| < \delta_2$, удовлетворяет условию $y \in \Omega^{r_0}$ при $t \in [t_0 - \delta_2, t_0]$, Ω^{r_0} множество из предположения 1. Тогда точка $y(t)$ представляется в виде (2.6) и мы можем определить функцию $h(x, t, \tau)$, как значение параметра h из формулы (2.6), соответствующее указанному значению функции y.

Если $x \in \Sigma_\varepsilon(t_0)$, то при $\tau = t_0$ в точке $t = t_0$, выполнено условие $\partial h/\partial t = \mathbf{u}(x,t)\mathbf{n}(x) \ge \varepsilon$ (см. формулу (2.19)). Теперь мы можем выбрать такое $\delta \in (0, \delta_2)$, что при $x \in \Sigma_\varepsilon(t_0), \tau \in (t_0 - \delta, t_0)$, $t \in (\tau, t_0]$, выполнено условие $\partial h/\partial t \ge \varepsilon/2$. Но тогда на всем промежутке $t \in (\tau, t_0]$ координата h положительна и точка $y(t)$ лежит в области Ω. Тем самым мы доказали, что функция $x(\xi, t)$, являющаяся решением уравнения (2.3) при условии (2.5), где $\xi = (z, \tau)$, $z \in \Sigma_\varepsilon(t_0)$, $\tau \in (t_0 - \delta, t_0)$, определена на отрезке $[\tau, t_0]$ и удовлетворяет условию $x(\xi, t) \in \Omega$ для $t > \tau$. Но это и означает выполнение условия $\Sigma_\varepsilon(t_0) \subset \Sigma_\omega(\tau, t_0)$ при указанном значении параметра τ.

Аналогично, если $x \in \Sigma_\varepsilon^-(t_0)$, то при $\tau = t_0$ в точке $t = t_0$ выполнено условие $\partial h/\partial t = \mathbf{u}(x,t)\mathbf{n}(x) \le -\varepsilon$. Тогда мы можем выбрать число $\delta \in (0, \delta_2)$ так, что при $x \in \Sigma_\varepsilon^-(t_0)$, $\tau \in (t_0 - \delta, t_0)$, $t \in [t_0 - \delta, \tau)$, выполнено условие $\partial h/\partial t \le -\varepsilon/2$. Значит, координата h положительна и точка $y(t)$ лежит в области Ω при $t \in [t_0 - \delta, \tau)$, что означает выполнение условия $\Sigma_\varepsilon^-(t_0) \subset \Sigma_\omega^-(\tau, t_0 - \delta)$. Лемма доказана.

Рассмотрим слагаемое $D_t''^{+}\mathbf{w}_\Sigma$ из формулы (4.17).

Для рассматриваемой точки $x \in \Omega^-$ введем обозначение:

$$\mathbf{H}(z, \tau, t) = \boldsymbol{\psi}(\xi, t) \times \mathbf{V}(x - x(\xi, t)), \quad z \in \Sigma, \quad t \in (0, T], \quad \tau \in (0, t], \quad \xi = (z, \tau).$$

Тогда

$$\begin{gathered} D_t''^{+}\mathbf{w}_\Sigma(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int_{z \in \Sigma_\omega(\tau, t)} \mathbf{H}(z, \tau, t) d\sigma_z = \int_{z \in S(t)} \mathbf{H}(z, t, t) d\sigma_z + \lim_{\Delta t \to 0} I, \\ I = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int_{z \in S_\omega(\tau, t)} \mathbf{H}(z, \tau, t) d\sigma_z - \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int_{z \in S(t)} \mathbf{H}(z, t, t) d\sigma_z. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Найдется $\Delta t_0 = \Delta t_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при $z \in \Sigma_\varepsilon(t)$ и $\tau \in [t - \Delta t_0, t]$, $\tau' \in [\tau, t]$ выполнено условие $|\boldsymbol{\omega}(x(\xi, \tau'), \tau')| > \varepsilon/2$, $\xi = (z, \tau)$. При этом

$$|u(x(\xi, \tau'), \tau')| \le \frac{A}{\varepsilon}, \tag{4.20}$$

здесь и далее через A обозначены некоторые константы, не зависящие от ξ, τ, τ', ε, Δt, причем, в различных оценках значение константы A может быть различным.

Предположим, что $\Delta t < \Delta t_0$ и что $\Delta t_0 \le \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon, t)$ – константа из леммы 7. Тогда, с учетом леммы 7, можем записать

$$I = I_1 + I_2 - I_3,$$

$$I_1 = \int_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int_{z \in \Sigma_\varepsilon} \frac{\mathbf{H}(z, \tau, t) - \mathbf{H}(z, t, t)}{\Delta t} d\sigma_z,$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int_{z \in \Sigma_\omega(\tau, t) \setminus \Sigma_\varepsilon(t)} \mathbf{H}(z, \tau, t) d\sigma_z, \quad I_3 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int_{z \in S(t) \setminus \Sigma_\varepsilon(t)} \mathbf{H}(z, t, t) d\sigma_z.$$

Оценим разность $\mathbf{H}(z, \tau, t) - \mathbf{H}(z, t, t)$ в интеграле I_1:

$$\mathbf{H}(z, \tau, t) - \mathbf{H}(z, t, t) = \boldsymbol{\psi}(\xi, t) \times \mathbf{V}(x - x(\xi, t)) - \boldsymbol{\psi}(\xi_t, t) \times \mathbf{V}(x - x(\xi_t, t)),,$$

$$\xi = (z, \tau), \quad \xi_t = (z, t), \quad z \in \Sigma_\varepsilon(t), \quad \tau \in [t - \Delta t, t].$$

Заметим, что $x(\xi_t, t) = z = x(\xi, \tau)$ и $|x(\xi, t) - x(\xi_t, t)| \le A\Delta t/\varepsilon$ в силу уравнения (2.3) и оценки (4.20). Далее, $|\boldsymbol{\psi}(\xi, t) - \boldsymbol{\psi}(\xi_t, t)| \le |\boldsymbol{\psi}(\xi, t) - \boldsymbol{\psi}(\xi, \tau)| + |\boldsymbol{\psi}(\xi, \tau) - \boldsymbol{\psi}(\xi_t, t)|$. В силу условия (4.3), можем записать: $\boldsymbol{\psi}(\xi, \tau) = \boldsymbol{\gamma}(z, \tau)$, $\boldsymbol{\psi}(\xi_t, t) = \boldsymbol{\gamma}(z, t)$. Учитывая уравнение (4.5), лемму 6 и дифференцируя по времени функцию $\boldsymbol{\gamma}$, заключаем, что $|\boldsymbol{\psi}(\xi, t) - \boldsymbol{\psi}(\xi, \tau)| \le A\Delta t/\varepsilon$. Тогда

$$|\mathbf{H}(z, \tau, t) - \mathbf{H}(z, t, t)| \le A\Delta t/\varepsilon \quad \text{и} \quad |I_1| \le A\Delta t/\varepsilon.$$

Рассмотрим интеграл I_2. При каждом значении параметра τ множество, по которому идет интегрирование во внутреннем интеграле, можно представить в виде

$$\Sigma_\omega(\tau, t) \setminus \Sigma_\varepsilon(t) = S_1 \cup S_2,$$

$$S_1 \equiv S_1(\tau, t) = \{z \in \Sigma_\omega(\tau, t) \,|\, |\boldsymbol{\omega}(z, \tau)| \ge \varepsilon, \mathbf{u}(z, \tau)\mathbf{n}(z) < \varepsilon\},$$

$$S_2 \equiv S_2(\tau, t) = \{z \in \Sigma_\omega(\tau, t) \,|\, |\boldsymbol{\omega}(z, \tau)| < \varepsilon\}.$$

Параметр Δt_0 можно выбрать так, что при $\Delta t \le \Delta t_0$, $\tau \in [t - \Delta t_0, t]$, $z \in S_1$ выполнено условие $|\boldsymbol{\omega}(z, \tau)| \ge \varepsilon/2$. Далее заметим, что множество $B = \{(z, \tau) \,|\, \tau \in [t - \Delta t_0, t], |\boldsymbol{\omega}(z, t)| \ge \varepsilon\}$ замкнуто и ограничено, как подмножество пространства $\mathbb{R}^4$, а функция $\mathbf{u}(z, \tau)$ определена и непрерывна на этом множестве. Тогда функция $\mathbf{u}(z, \tau)$ равномерно непрерывна на этом множестве и найдется функция $\alpha(\varepsilon, \Delta t)$ такая, что

$$\mathbf{u}(z, \tau)\mathbf{n}(z) < \varepsilon + \alpha(\varepsilon, \Delta t) \quad \text{при} \quad z \in S_1, \quad \tau \in [t - \Delta t, t],$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ $\alpha(\varepsilon, \Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Т.к. функция $\boldsymbol{\omega}$ ограничена (на всей своей области определения), заключаем, что

$$|\boldsymbol{\psi}(\xi, t)| \le A(\varepsilon + \alpha(\varepsilon, \Delta t))$$

при $\xi = (z, \tau) \in B$, $t = \tau$. В силу неравенства (4.6) заключаем, что последняя оценка выполнена и при $\xi = (z, \tau) \in B$, $t \in [\tau, t]$ (вообще говоря, с некоторой другой константой A). Тогда

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int_{S_1(\tau, t)} \mathbf{H}(z, \tau, t) d\sigma_z \right| \le A(\varepsilon + \alpha(\varepsilon, \Delta t)).$$

Далее, константу Δt_0 при рассматриваемом $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, чтобы из условия $|\boldsymbol{\omega}(z, \tau)| < \varepsilon$ при $z \in \Sigma$, $\tau \in [t_0 - \Delta t, t_0]$ следовало условие $|\boldsymbol{\omega}(z, t)| < 2\varepsilon$. Тогда при $z \in S_2(\tau, t)$ выполнено условие $|\boldsymbol{\omega}(z,t)| < 2\varepsilon$ и, значит, мера множества S_2 подчинена оценке $\mu(S_2) \le \mu_\varepsilon$, где $\mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon(t)$ есть мера множества точек $\{z \in \Sigma \,\big|\, |\boldsymbol{\omega}(z,t)| < 2\varepsilon\}$. Значит,

$$\left|\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int_{S_2(\tau,t)} \mathbf{H}(z,\tau,t)d\sigma_z\right| \le A\mu_\varepsilon.$$

При этом в силу предположения 4 выполнено условие $\mu_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, для интеграла I_2 справедлива оценка $|I_2| \le A(\varepsilon + \alpha(\varepsilon,\Delta t) + \mu_\varepsilon)$.

Аналогично, для интеграла I_3 множество, по которому берется внутренний интеграл, представим в виде $S(t)\backslash\Sigma_\varepsilon(t) = S_3 \cup S_4$,

$$S_3 \equiv S_3(t) = \{z \in S(t)\,\big|\,|\boldsymbol{\omega}(z,t)| \ge \varepsilon, \mathbf{u}(z,t)\mathbf{n}(z) < \varepsilon\}, \quad S_4 \equiv S_4(t) = \{z \in S(t)\,\big|\,|\boldsymbol{\omega}(z,t)| < \varepsilon\}.$$

Также, как и при рассмотрении интеграла I_2, доказываем, что при $z \in S_3$ выполнена оценка $|\mathbf{H}(z,t,t)| \le A\varepsilon$, а мера множества S_4 удовлетворяет условию $\mu(S_4) \le \mu_\varepsilon$. Тогда $|I_3| \le A(\varepsilon + \mu_\varepsilon)$.

Таким образом, для интеграла I выполнена оценка

$$|I| \le A(\varepsilon + \mu_\varepsilon) + A\left(\alpha(\varepsilon,\Delta t) + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right).$$

Теперь для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $A(\varepsilon + \mu_\varepsilon) < \varepsilon_1/2$. Для найденного ε найдем $\delta \in (0,\Delta t_0(\varepsilon))$ такое, что при $\Delta t < \delta$ выполнено условие $A(\alpha(\varepsilon,\Delta t) + \Delta t/\varepsilon) < \varepsilon_1/2$. Тогда при $\Delta t < \delta$ выполнено условие $|I| \le \varepsilon_1$. Значит $I \to 0$ при $\Delta t \to 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, из формулы (4.19), с учетом формулы (4.3), можем записать:

$$D_t''^{+}\mathbf{w}_\Sigma(x,t) = \int_{S(t)} \boldsymbol{\gamma}(z,t) \times \mathbf{V}(x-z)d\sigma_z. \tag{4.21}$$

Для функции $D_t''^{-}\mathbf{w}_\Sigma$ из формулы (4.17), вводя для каждого $\varepsilon > 0$ на поверхности Σ множество $\Sigma_\varepsilon^- = \Sigma_\varepsilon^-(t)$, учитывая, что по лемме 7 при достаточно малом значении $\Delta t > 0$ выполнено условие $\Sigma_\varepsilon^-(t_0) \subset \Sigma_\omega^-(\tau,t_0)$ при $\tau \in (t-\Delta t, t)$, и проведя далее рассуждение, аналогичное рассуждению для функции $D_t''^{+}\mathbf{w}_\Sigma$, получим формулу:

$$D_t''^{-}\mathbf{w}_\Sigma(x,t) = \int_{S^-(t)} \boldsymbol{\gamma}(z,t) \times \mathbf{V}(x-z)d\sigma_z.$$

Собирая последнюю формулу, формулу (4.20) и доопределив

$$\boldsymbol{\gamma}(z,t) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{u}(z,t)\mathbf{n}(z) = 0, \tag{4.22}$$

получим соотношение

$$D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t) = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\gamma}(z,t) \times \mathbf{V}(x-z)d\sigma_z. \tag{4.23}$$

В силу предположений о гладкости поля скоростей жидкости $\mathbf{w}$ функция $\boldsymbol{\gamma}(z,t)$ в каждый момент времени дифференцируема на поверхности Σ как функция от переменной z за исключением множества нулевой меры. Теперь пусть $x \in \Sigma$ и в рассматриваемый момент времени функция $\boldsymbol{\gamma}$ дифференцируема на поверхности в точке x. Тогда из формулы (4.23) следует, что функция $D_t''\mathbf{w}_\Sigma$ имеет в точке x краевые значения $(D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t))^{\pm}$:

$$(D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t))^{\pm} = \pm\mathbf{n}(x) \times \boldsymbol{\gamma}(x,t) + \int_{\Sigma} \boldsymbol{\gamma}(z,t) \times \mathbf{V}(x-z)d\sigma_z, \tag{4.24}$$

здесь $(D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t))^{+}$ – краевое значение со стороны области Ω, $(D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t))^{-}$ – краевое значение со стороны области Ω^-, $D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t)$ – прямое значение, определяемое непосредственно формулой (4.23), где интеграл понимается в смысле главного значения (см. [24, теорема 2.24, с. 69–70]).

Производная $\partial\mathbf{w}/\partial t$ имеет в каждой точке на поверхности Σ краевое значение со стороны области Ω^-: $(\partial\mathbf{w}/\partial t)^{-} = 0$. Тогда функция $D_t'\mathbf{w}_\Sigma$ также имеет на поверхности Σ краевые значения

$(D_t'\mathbf{w}_\Sigma(x,t))^-$ со стороны области Ω^- и функция $\boldsymbol{\gamma}$ должна в каждый момент времени $t \in (0,T)$ удовлетворять соотношению

$$-\frac{1}{2}\mathbf{n}(x)\times\boldsymbol{\gamma}(x,t) + \int_\Sigma \boldsymbol{\gamma}(z,t)\times\mathbf{V}(x-z)d\sigma_z = \mathbf{f}(x,t), \quad x\in\Sigma, \tag{4.25}$$

$$\mathbf{f}(x,t) = -(D_t'\mathbf{w}_\Sigma(x,t))^-. \tag{4.26}$$

Соотношение (4.25) при заданной функции $\mathbf{f}(x,t)$ можно рассматривать как уравнение для потока завихренности $\boldsymbol{\gamma}$.

4.3. Анализ уравнения для потока завихренности с поверхности тела

Преобразуем соотношение (4.25), по-прежнему предполагая, что функция $\boldsymbol{\gamma}$ известна и определяется формулами (4.4), (4.12), (4.22).

Лемма 8. *Поле* $D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t)$, *определяемое формулой* (4.17), *удовлетворяет условиям*

$$\operatorname{div} D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t) = 0, \quad \operatorname{rot} D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t) = 0, \quad x\in\Omega\cup\Omega^-. \tag{4.27}$$

Доказательство. Первое из равенств (4.27) очевидным образом следует из формулы (4.23) и формул $\operatorname{div}_x\left(\boldsymbol{\gamma}(z)\times\mathbf{V}(x-z)\right) = -\boldsymbol{\gamma}(z)\times\operatorname{rot}_x\mathbf{V}(x-z) = 0$ при $x\in\Omega\cup\Omega^-$, $z\in\Sigma$.

Докажем второе равенство. Выражение (4.23) для поля $D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t)$ перепишем в виде

$$D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t) = -\operatorname{rot}\int_\Sigma \boldsymbol{\gamma}(z,t)F(x-z)d\sigma, \quad F(x-z) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-z|}.$$

Используя тождество (1.9) и учитывая, что $\Delta_x F(x-z) = 0$ при $x\in\Omega\cup\Omega^-$, $z\in\Sigma$, имеем

$$\operatorname{rot} D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t) = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_\Sigma \boldsymbol{\gamma}(z,t)F(x-z)d\sigma.$$

Рассмотрим при выбранном значении t функцию

$$q(x) = \operatorname{div}\int_\Sigma \boldsymbol{\gamma}(z,t)F(x-z)d\sigma.$$

Выражение для этой функции преобразуем к виду

$$q(x) = \int_\Sigma \boldsymbol{\gamma}(z,t)\operatorname{grad}_z F(x-z)d\sigma = -\int_\Sigma \boldsymbol{\gamma}(z,t)\operatorname{grad}_z F(x-z)d\sigma.$$

Для анализа последней формулы воспользуемся понятием поверхностной дивергенции векторного поля $\mathbf{f}(z)$, определенного на поверхности Σ:

$$\operatorname{Div}\mathbf{f}(x) = \lim_{d(\sigma)\to 0}\frac{1}{\mu(\sigma)}\int_{\partial\sigma}\mathbf{f}(z)\left(\mathbf{n}(z)\times\boldsymbol{\tau}(z)\right)ds, \quad x\in\Sigma,$$

где σ – измеримая часть поверхности Σ, краем которой является гладкая кривая $\partial\sigma$, выбранная так, что $x\in\sigma$, $x\notin\partial\sigma$, $d(\sigma)$ – диаметр поверхности σ, $\mu(\sigma)$ – ее площадь, $\boldsymbol{\tau}(z)$ – единичный направляющий вектор на контуре $\partial\sigma$, направление которого согласовано с направлением нормали к поверхности $\mathbf{n}(z)$ так же, как в формуле Стокса.

В силу предположения 1 для каждой скалярной или векторной функции f, определенной на поверхности Σ, можно ввести продолжение f^* в окрестности поверхности Σ по формуле $f^*(x) = f(z)$ при $x = z + h\mathbf{n}(z)$. Как показано в статье [25], на поверхности Σ для векторного поля $\mathbf{f}$ справедливы формулы:

$$\operatorname{Div}\mathbf{f} = \operatorname{div}\mathbf{f}^* = \mathbf{n}\operatorname{rot}[\mathbf{n}^*\times\mathbf{f}^*],$$

где $\mathbf{n}^*$ – продолжение поля вектора нормали.

Т.к. $\boldsymbol{\gamma}$ – касательное векторное поле, справедлива формула

$$\boldsymbol{\gamma}(z,t)\operatorname{grad}_z F(x-z) = \boldsymbol{\gamma}^*(z,t)\operatorname{grad}_z F^*(x-z) = \operatorname{div}_z(\boldsymbol{\gamma}^*(z,t)F^*(x-z)) - F^*(x-z)\operatorname{div}\boldsymbol{\gamma}^*(z,t),$$

$F^*(x-z)$ – продолжение функции $F(x-z)$ по переменной z. Но тогда

$$q(x) = -\int_\Sigma \operatorname{Div}_z(\boldsymbol{\gamma}(z,t)F(x-z))d\sigma + \int_\Sigma F(x-z)\operatorname{Div}\boldsymbol{\gamma}(z,t)d\sigma.$$

Первый интеграл в последней формуле равен 0, т.к. Σ – замкнутая поверхность ([25, формула (9)]).

Рассмотрим $\operatorname{Div}\boldsymbol{\gamma}$, используя формулу (1.12). В силу формул (4.4), (4.12), учитывая равенство $\boldsymbol{\omega}\mathbf{n} = 0$, выполненное на поверхности Σ, имеем

$$\boldsymbol{\gamma} = s \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{n}\mathbf{u}) = s \cdot \mathbf{n} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}],$$

$$s = 1 \quad \text{на поверхности } S(t), \quad s = -1 \quad \text{на поверхности } S^{-}(t).$$

Тогда $\mathbf{n}^* \times \boldsymbol{\gamma}^* = (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma})^* = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})^*$. Легко показать, что если поле $\mathbf{g}$ определено в окрестности поверхности Σ, то $\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{g}^* = \mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{g}$ (если ввести в точке $z \in \Sigma$ декартову систему координат с одной из осей, направленной по нормали к поверхности, то нормальную к поверхности составляющую вектора $\operatorname{rot}\mathbf{g}$ входят только производные по другим осям, которые одинаковы для функций $\mathbf{g}^*$ и $\mathbf{g}$). Учитывая уравнение (1.12) и условие (1.6), можем записать

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{\gamma} = -s \cdot \mathbf{n}\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] = -s \cdot \mathbf{n}\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t = -s \cdot \partial(\mathbf{n}\boldsymbol{\omega})/\partial t = 0.$$

Значит $q(x) = 0$ и вторая из формул (4.27) выполнена. Лемма доказана.

В силу леммы 8 в каждый момент времени поле $D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t)$ является потенциальным в областях Ω^- и Ω и его потенциал $u(x)$ есть гармоническая функция (здесь мы опустили зависимость функции u от времени t, считая, что функция $D_t''\mathbf{w}_\Sigma(x,t)$ рассматривается в фиксированный момент времени). Из формулы (4.24) следует, что на поверхности Σ терпит разрыв касательная компонента градиента потенциала, а нормальная компонента непрерывна. Поэтому функцию u можно искать как решение краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega^- \text{ и } \Omega, \quad (\partial u/\partial n)^{\pm} = f \quad \text{на } \Sigma, \quad u(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad f = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}.$$

Как доказано в статье [26], при условии $f \in C^1(\Sigma)$ решение такой задачи существует и представляется в виде потенциала двойного слоя:

$$u(x) = \int_\Sigma g(y)\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y}d\sigma_y, \quad x \in \Omega^- \cup \Omega, \tag{4.28}$$

где функция g – плотность потенциала двойного слоя, лежит в классе $C^2(\Sigma)$ и удовлетворяет уравнению

$$\int_\Sigma g(y)\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y}d\sigma_y = f(x), \quad f(x) = \mathbf{f}(x,t) \cdot \mathbf{n}(x) \quad \text{в рассматриваемый момент } t, \tag{4.29}$$

интеграл является гиперсингулярным и понимается в смысле конечного значения по Адамару:

$$\int_\Sigma g(y)\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y}d\sigma_y = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Sigma\setminus U_\varepsilon(x)} g(y)\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y}d\sigma_y - \frac{g(x)}{2\varepsilon}\right),$$

$U_\varepsilon(x)$ – открытый шар радиуса ε с центром в точке x. При этом необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (4.29) является условие

$$\int_\Sigma f(x)d\sigma_x = 0, \tag{4.30}$$

а решение уравнения (4.29) определено с точностью до постоянного слагаемого (существует единственное решение, удовлетворяющее условию (4.30)). Множество решений уравнения (4.29) порождает единственную функцию $\mathbf{u}$ в области Ω и множество функций, отличающихся на постоянное слагаемое в области Ω^-. Функция $D_t''\mathbf{w}_\Sigma = \operatorname{grad} u$ является единственной и представляется виде (4.23), где (см. [24, теорема 2.23, с. 68–69])

$$\boldsymbol{\gamma}(x,t) = \mathbf{n}(x) \times \operatorname{Grad} g(x), \tag{4.31}$$

$\operatorname{Grad} g$ – поверхностный градиент функции g.

Еще одно уточнение связано с альтернативной формой записи выражения для функции $D_t'\mathbf{w}$. Для значения $\mathbf{w}(x, t-\Delta t)$ справедливо выражение

$$\mathbf{w}(x,t-\Delta t) = \mathbf{w}_\infty + \int_{D_0(t)\cap D_0(t-\Delta t)} \boldsymbol{\psi}(\xi, t-\Delta t) \times \mathbf{V}(x - x(\xi, t-\Delta t))d\xi +$$

$$+ \int_0^{t-\Delta t} d\tau \int_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t)\cap\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t)} \boldsymbol{\psi}(\xi_z, t-\Delta t) \times \mathbf{V}(x - x(\xi_z, t-\Delta t))d\sigma_z +$$

$$+\int\limits_{\Delta D_0(t-\Delta t,t)}\boldsymbol{\psi}(\xi,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t-\Delta t))d\xi+\int\limits_{\Delta D_0(t-\Delta t,t)}\boldsymbol{\psi}(\xi,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t-\Delta t))d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{t-\Delta t}d\tau\int\limits_{z\in\Delta\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t,t)}\boldsymbol{\psi}(\xi_z,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t-\Delta t))d\sigma_z+$$

$$+\int\limits_0^{t-\Delta t}d\tau\int\limits_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t)\setminus(\Sigma_\omega(\tau,t)\cup\Delta\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t,t))}\boldsymbol{\psi}(\xi_z,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t-\Delta t))d\sigma_z.$$

Сравнивая последнее выражение с формулой (4.16) для функции $D_t'\mathbf{w}$ и учитывая равенство $\mathbf{w}(x,t-\Delta t)=0$ при $x\in\Omega^-$, для таких точек x можем записать:

$$\begin{aligned}D_t'\mathbf{w}(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Bigg\{&\mathbf{w}_\infty+\int\limits_{D_0(t)\cap D_0(t-\Delta t)}\boldsymbol{\psi}(\xi,t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t))d\xi+\\&+\int\limits_0^{t-\Delta t}d\tau\int\limits_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t)\cap\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t)}\boldsymbol{\psi}(\xi_z,t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi_z,t))d\sigma_z+\\&+\int\limits_{\Delta D_0^\Sigma(t-\Delta t,t)}\boldsymbol{\psi}(\xi,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t-\Delta t))d\xi+\\&+\int\limits_0^{t-\Delta t}d\tau\int\limits_{z\in\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t)\setminus(\Sigma_\omega(\tau,t)\cup\Delta\Sigma_\omega(\tau,t-\Delta t,t))}\boldsymbol{\psi}(\xi_z,t-\Delta t)\times\mathbf{V}(x-x(\xi,t-\Delta t))d\sigma_z\Bigg\}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Выражение в фигурных скобках есть сумма скоростей набегающего потока, скорости, индуцируемой в момент времени t теми вихрями, которые уже находились в потоке в момент времени $t-\Delta t$, и скорости, которую в момент времени $t-\Delta t$ индуцировали вихри, окончившие свое движение в промежуток $(t-\Delta t,t)$, причем, не на поверхности тела.

5. ФОРМУЛИРОВКА ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Таким образом, построена замкнутая система уравнений для описания течений вязкой жидкости в рамках лагранжева подхода. Эта система содержит уравнения (2.3)–(2.5) и (4.1)–(4.3) относительно неизвестных функций $x(\xi,t)$ и $\boldsymbol{\psi}(\xi,t)$, где $\xi\in\Omega_0\cup\Omega_\Sigma$, $t\ge 0$ при $\xi\in\Omega_0$, $t\ge\tau$ при $\xi=(z,\tau)\in\Omega_\Sigma$, функция $\mathbf{u}$ определяется формулой (1.13), поле скоростей $\mathbf{w}$ определяется формулами (3.3), (3.8). В начальном условии (4.2) функция $\boldsymbol{\omega}_0(\xi)$ предполагается заданной, а функция $\boldsymbol{\gamma}(x,t)$ в начальном условии (4.3) определяется в каждый момент времени t формулой (4.31), где функция $g(x)$ есть решение уравнения (4.29).

Эти уравнения получены из уравнений Навье–Стокса при предположении, что всюду в жидкости выполнены формулы (1.8) и (1.10), а также при дополнительных предположениях 3 и 4. Заметим, что формулы (1.8) и (1.10) выполнены точно для осесимметричных течений (а также для плоских течений).

Аналогичные уравнения были предложены для плоских и осесимметричных течений Г.Я. Дынниковой и легли в основу численного метода вязких вихревых доменов [12], [13].

Новизна результатов, полученных в настоящей работе, состоит в следующем.

Во-первых, выдвинута гипотеза, что рассматриваемый подход применим к произвольным трехмерным течениям вязкой жидкости при больших значениях числа Рейнольдса. Эта гипотеза основана на рассуждении, показывающем, что формулы (1.8) и (1.10) должны выполняться при больших значениях числа Рейнольдса в соответствии с теорией пограничного слоя. Вся система уравнений сформулирована именно для такого случая существенно трехмерного течения.

Во-вторых, проведен анализ законов движения индивидуальных частиц жидкости, движущихся в соответствии с уравнениями (2.3)–(2.5). При естественных предположениях о поле скоростей жидкости доказано существование интегрального представления для этого поля скоростей с интегралами по лагранжевым координатам (формулы (3.3), (3.8)). Нетривиальность этого результата заключается в том, что поле переносной скорости $\mathbf{u}$ в правых частях уравнения (2.3) неограничено и стремится к бесконечности при приближении к точкам, в которых завихренность $\boldsymbol{\omega}$ равна 0. Отметим, что предположение 4, а также формула (1.10), в этой части работы не использованы.

В-третьих, получено уравнение для потока завихренности с поверхности тела – уравнение (4.25). Заметим, что уравнение, аналогичное уравнению (4.25), для плоских и осесимметричных незакрученных течений было выписано в работах Г.Я. Дынниковой [12], [13], но без подробного вывода. Здесь следует отметить, что это уравнение сразу может быть записано путем формального применения к интегралу в выражении для поля скоростей (3.1) известной формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему, предполагая, что поток завихренности есть только на части границы этого объема, совпадающей с поверхностью тела (см., например, [27, формула (8.16), с. 122]). Однако эта формула применима в случае, когда объем ограничен кусочно-гладкой замкнутой поверхностью, индивидуальные частицы движутся со скоростью, определенной и непрерывной в данном объеме вместе с некоторой его окрестностью, а подынтегральная функция является гладкой. В настоящей статье, по сути, доказывается применимость этой формулы к рассматриваемой задаче. Приведенное доказательство использует предположения 3 и 4, однако допускает обращение в нуль завихренности на поверхности тела (что соответствует реальным физическим течениям) и в потоке. За счет этого учитывается стремление скорости движения частиц к бесконечности при стремлении завихренности к нулю и не используются никакие предположения о структуре границы множества, на котором завихренность не равна нулю.

В-четвертых, отметим, что само уравнение (4.25) в случае трехмерных течений имеет другую структуру, нежели в плоском и осесимметричном случае. Это векторное уравнение относительно неизвестного касательного векторного поля на поверхности. Доказано, что в данной задаче решение этого уравнения следует искать в классе касательных векторных полей, для которых поверхностная дивергенция равна нулю на всей поверхности, и что при этом уравнение (4.25) сводится к эквивалентному гиперсингулярному интегральному уравнению (4.29) относительно скалярной функции при наличии соотношения (4.31).

Отметим, что уравнение (4.25) и его аналог – уравнение (4.29), возникают в задачах о потенциальном обтекании тел идеальной несжимаемой жидкостью и лежат в основе некоторых из панельных методов вычислительной аэродинамики [3], [4]. В таких задачах естественным является представление поля скоростей в виде градиента потенциала двойного слоя. В книге [28, с. 126, 139] показано, что краевая задача Неймана для уравнения Лапласа сводится к уравнению (4.29). Численные методы решения уравнения (4.29) хорошо отработаны (см. [3], [4], [28], [29]) и могут быть использованы в задаче, рассматриваемой в настоящей статье. Заметим также, что в рамках дискретных моделей можно использовать выражение (4.32) при нахождении правой части уравнения (4.25).

Построенная в настоящей статье математическая модель может быть использована как теоретическая основа для уточнения и развития некоторых классов вихревых численных методов решения задач об отрывном обтекании тел. В статье не ставится цель дать формулировку конкретных численных методов, но ниже даются некоторые комментарии в этом направлении.

Так, предложенная математическая модель объясняет применимость подхода к моделированию отрывных течений в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости, когда моделируется сброс завихренности со всей поверхности тела (работы Г.А. Щеглова, И.К. Марчевского и соавт. [10], [11]). В указанных работах течение аппроксимируется системой дискретных вихревых элементов: изолированных вихревых отрезков в работе [10], вихревых отрезков, сгруппированных в замкнутые вихревые ломаные линии (вихревые петли) в [11]. На каждом дискретном шаге интегрирования по времени концы вихревых отрезков сдвигаются по скорости жидкости – при этом аппроксимируются уравнения (2.3) и (4.1) с $\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Далее на поверхность тела помещаются новые вихревые элементы, интенсивности которых находятся из системы линейных уравнений, аппроксимирующей условие равенства нулю скорости на поверхности. Фактически при этом приближенно решается уравнение (4.25). После этого вновь образовавшиеся вихревые элементы перемещаются на некоторую малую высоту над поверхностью (эта высота задается эмпирически), и далее рассматривается их движение вместе с потоком жидкости, как и всех остальных вихревых элементов.

Такой подход можно трактовать как смещение вновь образовавшихся вихревых элементов с эмпирической переносной скоростью $\mathbf{u}$, как в уравнениях (2.3). А далее, фактически, принимается гипотеза, что после своего образования частица сразу покинула вязкий слой и ее движение происходит в соответствии с уравнением (2.3), в котором диффузионной скоростью уже можно пренебречь.

Предложенная в настоящей работе математическая модель указывает на пути для развития такого подхода в направлении разделения течения на вязкий пограничный слой, в котором необходимо производить аппроксимацию диффузионной скорости $\mathbf{w}'$, и на область внешнего течения, где диффузионная скорость полагается равной нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Апаринов В.А., Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Михайлов А.А.* Расчет нестационарных аэродинамических характеристик тел при отрывном обтекании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 2. № 16. С. 1558–1566.
3. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995. 520 с.
4. *Katz J., Plotkin A.* Low-Speed Aerodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 613 p.
5. *Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2006. № 4. С. 78–92.
6. *Ogami Y., Akamatsu T.* Viscous flow simulation using the discrete vortex model – the diffusion velocity method // Comput. Fluids. 1991. V. 19 № 3–4, P. 433–441.
7. *Koumoutsakos P., Leonard A., Pépin F.* Boundary conditions for viscous vortex methods // J. Comput. Phys. 1994. V. 113. № 1. P. 52–61.
8. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P.* Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 320 p.
9. *Koumoutsakos P.* Multiscale Flow Simulations Using Particles // Annu. Rev. Fluid Mech. 2005. V. 37. P. 457–487.
10. *Marchevsky I.K., Shcheglov G.A.* 3D vortex structures dynamics simulation using vortex fragmentons // ECCOMAS 2012, e-Book Full Papers, Vienna. 2012. P. 5716–5735.
11. *Shcheglov G.A., Dergachev S.A.* Hydrodynamic loads simulation for 3D bluff bodies by using the vortex loops based modification of the vortex particle method // 5th International Conference on Particle-Based Methods – Fundamentals and Applications, PARTICLES 2017. 2017. P. 725–731. http://www.eccomas.org/vpage/1/14/2017
12. *Дынникова Г.Я.* Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2003. № 5. С. 11–19.
13. *Дынникова Г.Я.* Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // Докл. АН. 2004. Т. 399. № 1. С. 42–46.
14. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 176–178.
15. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
16. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
17. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
18. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. Учебник. М.: Мир, 1974. 319 с.
19. *Зорич В.А.* Математический анализ. В 2-х ч. М.: ФАЗИС; Наука, ч. 1, 1997. 568 с.
20. *Wu J.C., Thompson J.F.* Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier–Stokes equations using an integro-differential formulation // Comput. Fluids. 1973. V. 1. № 2. P. 197–215.
21. *Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H., Ingber M.S.* Accuracy Considerations for Implementing Velocity Boundary Conditions in Vorticity Formulations. Sandia Report. 1996. 52 p. https://doi.org/10.2172/242701
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
23. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Мышкиса А.Д., Олейник О.А. М.: Изд-во МГУ, 1984. 296 с.
24. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 311 с.
25. *Захаров Е.В., Рыжаков Г.В., Сетуха А.В.* Численное решение трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеальнопроводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 9. С. 1253–1263.
26. *Рыжаков Г.В., Сетуха А.В.* О сходимости численного метода решения некоторого гиперсингулярного интегрального уравнения на замкнутой поверхности // Дифференц. ур-ния. 2010. Т. 46. № 9. С. 1343–1353.
27. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
28. *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.
29. *Сетуха А.В., Семёнова А.В.* О численном решении некоторого поверхностного гиперсингулярного интегрального уравнения методами кусочно-линейных аппроксимаций и коллокаций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 59. № 6. С. 900–1006.