ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 3, с. 413–428

УДК 519.652

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ[1)]

© 2020 г. И. А. Блатов[1,*], А. И. Задорин[2,], Е. В. Китаева[3]**

[1] 443010 Самара, ул. Льва Толстого, 23, Поволжский гос. ун-т телекоммуникаций и информатики, Россия

[2] 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Ин-т матем. СО РАН, Россия

[3] 443086 Самара, Московское шоссе, 34, Самарский национальный исследовательский ун-т, Россия

*e-mail: blatow@mail.ru

**e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Поступила в редакцию 14.03.2019 г.
Переработанный вариант 02.09.2019 г.
Принята к публикации 18.11.2019 г.

Исследован вопрос сплайн-интерполяции функции одной переменной с большими градиентами в пограничном слое. Известно, что применение полиномиальных сплайнов для интерполяции такой функции приводит к существенным погрешностям, если малый параметр соизмерим с шагом сетки. Построен обобщенный сплайн, являющийся аналогом кубического сплайна. Сплайн является точным на составляющей, отвечающей за большие градиенты функции в пограничном слое. Погранслойная составляющая рассматривается как функция общего вида, в частности, рассмотрен случай экспоненциального пограничного слоя. Исследованы вопросы существования, единственности и точности построенного сплайна. Библ. 24. Табл. 2.

Ключевые слова: функция одной переменной, пограничный слой, малый параметр, обобщенный сплайн, оценка погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466920030059

1. ВВЕДЕНИЕ

На основе сингулярно возмущенных задач моделируются различные конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией. Решение такой задачи имеет большие градиенты в области пограничного слоя [1], [2], вследствие чего применение классических разностных схем [3] может приводить к погрешностям порядка $O(1)$ [4].

Вопросы интерполяции сплайнами исследовались в ряде работ, например, в [5], [6]. Однако задача интерполяции функций с большими градиентами в пограничном слое слабо исследована. В [7] была оценена погрешность кубического сплайна на сетке Бахвалова в сплайн-коллокационном методе. Известно применение полиномиальных и обобщенных сплайнов для построения разностных схем для сингулярно возмущенных задач на основе метода сплайн-коллокации, например, в [8]–[12]. В этих работах доказывается, что построенные схемы обладают погрешностью, равномерной по малому параметру. Однако вопрос оценки погрешности сплайнов между узлами сетки, в случае больших градиентов функции, не рассматривается. В ряде работ исследуется формосохранение при интерполяции сплайнами, например, в [13].

Погрешность полиномиальных сплайнов в случае функций с большими градиентами в пограничном слое оценивалась в [14]–[16]. Доказано, что в случае равномерной сетки погрешность параболического сплайна по Субботину [6] и кубического сплайна неограниченно растет с уменьшением значения малого параметра ε, если зафиксировать шаг сетки. Таким образом, актуальна задача построения сплайнов для функций с большими градиентами в пограничном слое, погрешность которых равномерна по малому параметру.

[1)]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований СО РАН № 1.1.3., проект 0314-2019-0009.

В [15], [16] доказано, что погрешность параболического сплайна по Субботину и кубического сплайна при наличии экспоненциального пограничного слоя становится равномерной по малому параметру, если применять сетку Шишкина [2].

В [17] предложен другой подход к построению сплайна, погрешность которого равномерна по малому параметру ε. Построен сплайн класса $C^2[0,1]$, точный на погранслойной составляющей $\Phi(x) = e^{-mx/\varepsilon}$, где $x \in [0,1]$, $m > 0$, $\varepsilon \in (0,1]$, соответствующей экспоненциальному пограничному слою [2], [18]. Доказано, что построенный сплайн обладает погрешностью порядка $O(h^3)$ равномерно по малому параметру ε, где h — шаг равномерной сетки.

В данной работе строится обобщенный сплайн класса $C^2[0,1]$ для интерполяции функции с погранслойной составляющей общего вида, отвечающей за большие градиенты функции и известной с точностью до множителя. Строится сплайн, точный на погранслойной составляющей, для которого получены оценки погрешности, равномерные по большим градиентам функции в пограничном слое.

Итак, пусть для интерполируемой функции $u(x)$ справедлива декомпозиция:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

где регулярная составляющая $p(x)$ имеет ограниченные производные до некоторого порядка и не задана, погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна и отвечает за большие градиенты функции $u(x)$ в пограничном слое, постоянная γ не задана. В частности, задание $\Phi(x) = e^{-mx/\varepsilon}$ соответствует экспоненциальному пограничному слою и $\Phi(x) = \sqrt{x+\varepsilon}$ — степенному пограничному слою.

Ранее для функции вида (1.1) в [19] построен аналог квадратичного сплайна, точный на погранслойной составляющей $\gamma\Phi(x)$. В [19] обоснована оценка погрешности построенного сплайна порядка $O(h^2)$ равномерно по функции $\Phi(x)$ и ее производным.

Основные обозначения. Под C и C_j будем понимать положительные постоянные, не зависящие от погранслойной составляющей $\Phi(x)$, ее производных и от шага сетки h, при этом один и тот же символ C_j может обозначать различные постоянные, если это не вызывает недоразумений. Предполагаем, что в случае сингулярного возмущения постоянные C_j не зависят от параметра ε. Будем писать $f = O(g)$, если справедлива оценка $|f| \le C|g|$ и $f = O^*(g)$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$. Пусть $C[a,b]$ — пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|\cdot\|_{C[a,b]}$, $C^k[a,b]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций. Пусть δ_{ij} обозначает символ Кронекера. Через I обозначим единичную матрицу. Запись $D = \mathrm{diag}\{d_1,\dots,d_n\}$ означает представление квадратной $n\times n$-диагональной матрицы D с диагональными элементами d_i, а $A = \mathrm{tridiag}\{a_i, c_i, b_i\}$-трехдиагональной матрицы A с элементами a_i, c_i, b_i на главной и соседних диагоналях. Пусть

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le m\le n}\sum_{k=1}^n |a_{mk}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\le k\le n}\sum_{m=1}^n |a_{mk}|$$

суть нормы квадратной $n\times n$ матрицы.

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛОГА КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

Зададим равномерную сетку Ω :

$$\Omega = \{x_n : x_n = nh,\ n = 0,1,\dots,N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1\}, \quad \Delta_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Предполагаем, что функция $u(x)$ вида (1.1) задана в узлах сетки, $u_n = u(x_n)$, $n = 0,1,2,\dots,N$. Ниже будем предполагать, что

$$\Phi^{(3)}(x) \ne 0, \quad x \in (x_{n-1}, x_n), \quad n = 1,2,\dots,N. \tag{2.1}$$

При выполнении условия (2.1) система функций $\{1, x, x^2, \Phi(x)\}$ является линейно независимой на интервале $[x_{n-1}, x_n]$, так как определитель Вронского для этих функций не обращается в нуль на интервале (x_{n-1}, x_n) [20]. Следовательно, эти функции можно использовать на каждом сеточном интервале как базис при построении неполиномиального сплайна.

При построении сплайна $S_\Phi(u,x)$ для функции $u(x)$ вида (1.1) исходим из того, чтобы сплайн был точным на составляющей $\Phi(x)$ и $S_\Phi(u,x)\in C^2[0,1]$. Для этого на произвольном сеточном интервале $[x_{n-1}, x_n]$ зададим интерполяцию второй производной сплайна $S_\Phi(u,x)$ следующим образом:

$$S''_\Phi(u,x) = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1})\frac{\Phi''(x)-\Phi''_{n-1}}{\Phi''_n - \Phi''_{n-1}}, \quad x\in\Delta_n, \tag{2.2}$$

где $M_n = S''_\Phi(u,x_n)$, $\Phi''_n = \Phi''(x_n)$. В силу (2.1) соотношение (2.2) задано корректно. Дважды интегрируя в (2.2) и учитывая условия интерполяции $S_\Phi(u,x_{n-1}) = u_{n-1}$, $S_\Phi(u,x_n) = u_n$, получаем

$$\begin{aligned} S_\Phi(u,x) = {} & \frac{M_n - M_{n-1}}{\Phi''_n - \Phi''_{n-1}}\left(\Phi(x) - \Phi_{n-1} - \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h}(x - x_{n-1}) - \frac{1}{2}\Phi''_{n-1}(x-x_{n-1})(x-x_n)\right) + \\ & + \frac{1}{2}M_{n-1}(x-x_{n-1})(x-x_n) + (u_n - u_{n-1})\frac{x-x_{n-1}}{h} + u_{n-1}, \quad x\in\Delta_n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Остается найти постоянные M_n. По построению $S_\Phi(u,x)\in C^2[0,1]$, поэтому для $n = 1,2,\ldots,N-1$ имеет место равенство

$$S'_\Phi(u,x_n - 0) = S'_\Phi(u,x_n + 0). \tag{2.4}$$

Учитывая (2.3), (2.4) и накладываемые условия $S''_\Phi(u,0) = u''(0)$, $S''_\Phi(u,1) = u''(1)$, получаем систему уравнений

$$A_nM_{n-1} + (1 - A_n - B_n)M_n + B_nM_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}, \quad 0 < n < N, \tag{2.5}$$

$$M_0 = u''(0), \quad M_N = u''(1), \tag{2.6}$$

где

$$A_n = \frac{1}{h^2(\Phi''_n - \Phi''_{n-1})}\left(\Phi_n - \Phi_{n-1} - h\Phi'_n + \frac{h^2}{2}\Phi''_n\right), \tag{2.7}$$

$$B_n = \frac{1}{h^2(\Phi''_{n+1} - \Phi''_n)}\left(\Phi_{n+1} - \Phi_n - h\Phi'_n - \frac{h^2}{2}\Phi''_n\right). \tag{2.8}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2.1). *Тогда система уравнений* (2.5), (2.6) *однозначно разрешима*.

Доказательство. Систему (2.5), (2.6) запишем в матричном виде:

$$HM = F. \tag{2.9}$$

Пусть d_n – величина диагонального преобладания для n-го столбца матрицы H. Тогда при $1 < n < N$ имеем $d_n = 1 - (B_{n-1} + A_n) - (B_n + A_{n+1})$. Докажем, что при всех n будет $d_n > 0$. Сначала покажем, что при всех n

$$1/4 \le A_{n+1} + B_n < 1/2. \tag{2.10}$$

Имеем

$$A_{n+1} + B_n = \frac{1}{h^2(\Phi''_{n+1} - \Phi''_n)}\left[2\Phi_{n+1} - 2\Phi_n - h\Phi'_{n+1} - h\Phi'_n + \frac{h^2}{2}\Phi''_{n+1} - \frac{h^2}{2}\Phi''_n\right].$$

Следовательно,

$$A_{n+1} + B_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{h^2(\Phi''_{n+1} - \Phi''_n)}[2\Phi_{n+1} - 2\Phi_n - h\Phi'_{n+1} - h\Phi'_n].$$

Применяя разложения в ряд Тейлора около узла x_n с остаточным членом в интегральной форме

$$\Phi(x) = \Phi(x_n) + \Phi'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}\Phi''(x_n)(x - x_n)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_n}^{x} \Phi^{(3)}(t)(x - t)^2 dt, \tag{2.11}$$

получаем

$$A_{n+1} + B_n = \frac{1}{2} - \frac{\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)(s - x_n)\Phi^{(3)}(s)ds}{h^2 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi^{(3)}(s)ds}. \tag{2.12}$$

Из (2.1), (2.12) следует $A_{n+1} + B_n < 1/2$. Учитывая неравенство

$$(x_{n+1} - s)(s - x_n) \le h^2/4, \quad s \in [x_n, x_{n+1}],$$

из (2.12) получаем $A_{n+1} + B_n \ge 1/4$.

Итак, при выполнении условия (2.1) справедливо двойное неравенство (2.10). Следовательно, при всех n $d_n > 0$ и матрица H системы (2.5), (2.6) имеет строгое диагональное преобладание по столбцам и не вырождена. Следовательно, система (2.5), (2.6) однозначно разрешима. Лемма доказана.

В соответствии с леммой 1 и (2.3) сплайн $S_\Phi(u, x)$ определяется однозначным образом.

Покажем, что сплайн $S_\Phi(u, x)$ является точным на погранслойной составляющей $\Phi(x)$. Пусть $u(x) = \Phi(x)$. Несложно убедиться, что тогда $M_j = \Phi''_j$, $j = 0, 1, \ldots, N$ является единственным решением системы (2.5), (2.6). Тогда из (2.3) получаем, что $S_\Phi(\Phi, x) = \Phi(x)$. Таким образом, $S_\Phi(u, x) \in C^2[0, 1]$ и $S_\Phi(\Phi, x) = \Phi(x)$.

Получим оценки на коэффициенты A_n, B_n. Учитывая разложение (2.11), из (2.7), (2.8) получаем

$$A_n = \frac{1}{2}\frac{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \Phi^{(3)}(t)(t - x_{n-1})^2 dt}{h^2 \int_{x_{n-1}}^{x_n} \Phi^{(3)}(t)dt}, \quad B_n = \frac{1}{2}\frac{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi^{(3)}(t)(t - x_{n+1})^2 dt}{h^2 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi^{(3)}(t)dt}. \tag{2.13}$$

Из (2.13) следует, что при выполнении условий (2.1) верно

$$0 < A_n < 1/2, \quad 0 < B_n < 1/2. \tag{2.14}$$

Лемма 2. *Пусть матрица* H *соответствует* (2.9). *Тогда при всех* $x \in [0, 1]$ *справедливы оценки*

$$\left|S''_\Phi(u, x) - u''(x)\right| \le \gamma, \tag{2.15}$$

$$\left|S'_\Phi(u, x) - u'(x)\right| \le \gamma h, \quad \left|S_\Phi(u, x) - u(x)\right| \le \gamma\frac{h^2}{4}, \tag{2.16}$$

где

$$\gamma = \left\|H^{-1}\right\|_\infty \left(\max_{0<n<N} \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \left[\frac{h}{3}\left|p^{(4)}(s)\right| + \left|p^{(3)}(s)\right|\right] ds + 2\max_{0<n\le N} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left|p^{(3)}(s)\right| ds\right).$$

Доказательство. Остановимся на обосновании оценки (2.15). Сначала получим оценку погрешности в узлах сетки. Пусть $Z_n = M_n - u''_n$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Тогда

$$HZ = F - HU, \quad U_n = u''_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.17}$$

В соответствии с представлением (1.1) и тем, что в случае $u(x) = \Phi(x)$ вектор $\{\Phi''_n\}$, $n = 0,1,\dots,N$, является решением системы (2.5), (2.6), получаем

$$A_n Z_{n-1} + (1 - A_n - B_n)Z_n + B_n Z_{n+1} = G_n, \quad G_n = \frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{h^2} - \\ - (A_n p''_{n-1} + (1 - A_n - B_n)p''_n + B_n p''_{n+1}), \quad 0 < n < N, \quad Z_0 = 0, \quad Z_N = 0. \tag{2.18}$$

Запишем G_n в виде

$$G_n = \left(\frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{h^2} - p''_n\right) + A_n(p''_n - p''_{n-1}) + B_n(p''_n - p''_{n+1}). \tag{2.19}$$

Учитывая (2.14), получаем

$$|G_n| \le \frac{h}{6}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \left|p^{(4)}(s)\right| ds + \frac{1}{2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \left|p^{(3)}(s)\right| ds. \tag{2.20}$$

Из (2.9) следует $\|M\|_\infty \le \left\|H^{-1}\right\|_\infty \|F\|_\infty$. Применяя оценку (2.20), получаем

$$\max_n \left|M_n - u''_n\right| \le \left\|H^{-1}\right\|_\infty \max_n \left[\frac{h}{6}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \left|p^{(4)}(s)\right| ds + \frac{1}{2}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \left|p^{(3)}(s)\right| ds\right]. \tag{2.21}$$

Теперь оценим погрешность в произвольной точке. Пусть $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Учитывая (2.2), получаем

$$S''_\Phi(u, x) - u''(x) = (M_{n-1} - u''_{n-1}) + ((M_n - u''_n) - (M_{n-1} - u''_{n-1}))\frac{\Phi''(x) - \Phi''_{n-1}}{\Phi''_n - \Phi''_{n-1}} + \\ + u''_{n-1} + (u''_n - u''_{n-1})\frac{\Phi''(x) - \Phi''_{n-1}}{\Phi''_n - \Phi''_{n-1}} - u''(x). \tag{2.22}$$

Учитывая представление (1.1) и то, что интерполяционная формула

$$u''(x) \approx u''_{n-1} + (u''_n - u''_{n-1})\frac{\Phi''(x) - \Phi''_{n-1}}{\Phi''_n - \Phi''_{n-1}}$$

является точной в случае $u''(x) = \Phi''(x)$, из (2.22) получаем

$$S''_\Phi(u, x) - u''(x) = (M_{n-1} - u''_{n-1}) + ((M_n - u''_n) - (M_{n-1} - u''_{n-1}))\frac{\Phi''(x) - \Phi''_{n-1}}{\Phi''_n - \Phi''_{n-1}} + \\ + p''_{n-1} + (p''_n - p''_{n-1})\frac{\Phi''(x) - \Phi''_{n-1}}{\Phi''_n - \Phi''_{n-1}} - p''(x). \tag{2.23}$$

В силу (2.1) справедлива оценка

$$\left|(\Phi''(x) - \Phi''_{n-1})/(\Phi''_n - \Phi''_{n-1})\right| \le 1. \tag{2.24}$$

Учитывая (2.21), (2.24), из (2.23) получаем (2.15).

Получим первую оценку в (2.16). Пусть $x \in [x_{n-1}, x_n]$, $r(x) = S_\Phi(u, x) - u(x)$. В силу условий интерполяции $r(x_{n-1}) = 0$, $r(x_n) = 0$. Тогда найдется точка $s_n \in (x_{n-1}, x_n)$, в которой $r'(s_n) = 0$. Тогда имеем

$$r'(x) = r'(x) - r'(s_n) = r''(\tau_n)(x - s_n), \quad \tau_n \in (x_{n-1}, x_n). \tag{2.25}$$

Учитывая оценку (2.15), получаем требуемую оценку.

Аналогично, применяя известный подход, можно получить вторую оценку в (2.16). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть для функции* $u(x)$ *справедливо представление* (1.1), *где* $p(x) \in C^4[0,1]$, *для функции* $\Phi(x)$ *справедливо условие* (2.1), *и для некоторой постоянной* C_1

$$\frac{\int\limits_{x_n+h/4}^{x_{n+1}-h/4} \Phi^{(3)}(t)dt}{\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi^{(3)}(t)dt} \ge C_1, \quad 1 \le n \le N-1. \tag{2.26}$$

Тогда найдется такая константа h_0, *что для* $h \in (0,h_0]$ *для некоторой постоянной* C *справедливы оценки погрешности*:

$$\left|S_\Phi^{(i)}(u,x) - u^{(i)}(x)\right| \le Ch^{3-i}, \quad x \in [0,1], \quad 0 \le i \le 2. \tag{2.27}$$

Доказательство. Учитывая (2.26), имеем

$$\frac{\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1}-s)(s-x_n)\Phi^{(3)}(s)ds}{h^2\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi^{(3)}(s)ds} \ge \frac{\int\limits_{x_n+h/4}^{x_{n+1}-h/4} (x_{n+1}-s)(s-x_n)\Phi^{(3)}(s)ds}{h^2\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi^{(3)}(s)ds} \ge \frac{h^2}{16}\frac{\int\limits_{x_n+h/4}^{x_{n+1}-h/4} \Phi^{(3)}(s)ds}{h^2\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi^{(3)}(s)ds} \ge \frac{C_1}{16} > 0.$$

Отсюда и из (2.12) при $n \ge 1$ имеем

$$A_{n+1} + B_n \le \frac{1}{2} - \frac{C_1}{16}. \tag{2.28}$$

Поэтому для величины диагонального преобладания n-го столбца матрицы H d_n получаем

$$d_n = 1 - (B_{n-1} + A_n) - (B_n + A_{n+1}) \ge \frac{C_1}{8}, \quad n \ge 2. \tag{2.29}$$

Но поскольку $A_n \le 1/2$ в силу (2.10), то с учетом (2.28) имеем

$$d_0 = 1 - A_1 \ge 1/2, \quad d_1 = 1 - A_1 - (B_1 + A_2) \ge 1/2 - (B_1 + A_2) \ge \frac{C_1}{16}. \tag{2.30}$$

Из (2.28)–(2.30) следует, что матрица H имеет строгое диагональное преобладание по столбцам, поэтому $\left\|H^{-1}\right\|_1 \le C$. Но тогда в силу теоремы Демко для матриц обратных к ленточным [24] справедливо также и $\left\|H^{-1}\right\|_\infty \le C$.

Учитывая (2.10) в (2.19), для некоторой постоянной C_2 получаем

$$|G_n| \le \left|\frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{h^2} - p_n''\right| + \left|A_n\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} p'''(t)dt\right| + \left|B_n\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} p'''(t)dt\right| \le Ch.$$

Учитывая неравенство $\left\|H^{-1}\right\|_\infty \le C$, по аналогии с (2.21) получаем

$$\max_n\left|M_n - u_n''\right| \le C_4h. \tag{2.31}$$

Далее требуемая оценка (2.27) получается по аналогии с леммой 2. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть дополнительно к условиям леммы* 3 *при всех* n *выполнено*

$$\left|(B_n - A_n)\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} p'''(t)dt\right| \le Ch^2. \tag{2.32}$$

Тогда при всех $x \in [0,1]$ *справедливы оценки погрешности*

$$\left|S_\Phi^{(i)}(u,x) - u^{(i)}(x)\right| \le Ch^{4-i}, \quad 0 \le i \le 2. \tag{2.33}$$

Доказательство. Из (2.19) имеем

$$G_n = \left(\frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{h^2} - p_n''\right) + A_n(p_n'' - p_{n-1}'') + B_n(p_n'' - p_{n+1}'') =$$

$$= \left(\frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{h^2} - p_n''\right) - A_n(p_{n-1}'' - 2p_n'' + p_{n+1}'') - (B_n - A_n)\int_{x_n}^{x_{n+1}} p'''(t)dt.$$

Отсюда в силу (2.32)

$$\|G\|_\infty \le Ch^2,$$

откуда в силу условия $\|H^{-1}\|_\infty \le C$ (см. доказательство леммы 3) получаем, что $\max_n |M_n - u_n''| \le Ch^2$. Далее требуемые оценки (2.33) получаются аналогично доказательству леммы 2.

Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $\Phi(x) = \sqrt{x + \varepsilon}$, $p'''(0) = 0$, $|p^{(4)}(x)| \le C$. Несложно показать, что тогда выполнены условия леммы 4 и справедливы оценки погрешности (2.33).

Замечание 2. Пусть для некоторых постоянных C_1, C_2 имеем

$$0 < C_1 \le |\Phi^{(3)}(x)| \le C_2, \quad |\Phi^{(4)}(x)| \le C_2.$$

Тогда выполнены неравенства (2.26) и (2.32). Следовательно, в соответствии с леммой 4 справедливы оценки погрешности (2.33).

Оценки устойчивости. Применение классических полиномиальных формул для аппроксимации $u''(0)$, $u''(1)$ в краевых условиях (2.6) приводит к существенным погрешностям в области больших градиентов [21]. Для приближения $u''(0)$, $u''(1)$ можно применять построенный в [22] интерполянт, который учитывает декомпозицию (1.1) и является точным на погранслойной составляющей $\Phi(x)$. В соответствии с [22], дифференцированием этого интерполянта получаются разностные формулы для вычисления производные, также точные на погранслойной составляющей. Если эти формулы применять для вычисления $u''(0)$, $u''(1)$, то построенный сплайн остается точным на составляющей $\Phi(x)$.

Оценим влияние погрешностей при вычислении производных $u''(0)$, $u''(1)$ на точность построенного сплайна. Система (2.5), (2.6) может быть записана в виде (2.9). Для задачи (2.9) справедлива оценка устойчивости:

$$\|M - \tilde{M}\|_\infty \le \|H^{-1}\|_\infty \|F - \tilde{F}\|_\infty, \tag{2.34}$$

где $\tilde{M}$ – решение задачи (2.9) с возмущенной правой частью $\tilde{F}$.

Пусть $\tilde{u}''(0)$, $\tilde{u}''(1)$ – приближенные значения для производных $u''(0)$, $u''(1)$ и $\tilde{S}_\Phi(u, x)$ – соответствующий возмущенным значениям сплайн. Тогда в соответствии с (2.34) при условии $\tilde{F}_n = F_n$, $1 \le n \le N - 1$

$$\|M - \tilde{M}\|_\infty \le \|H^{-1}\|_\infty \max\{|u''(0) - \tilde{u}''(0)|, |u''(1) - \tilde{u}''(1)|\}. \tag{2.35}$$

Тогда в соответствии с (2.2), (2.35) имеем

$$|S_\Phi''(u, x) - \tilde{S}_\Phi''(u, x)| \le 2\|H^{-1}\|_\infty \max\{|u''(0) - \tilde{u}''(0)|, |u''(1) - \tilde{u}''(1)|\}. \tag{2.36}$$

Учитывая, что $S_\Phi(u, x_n) = \tilde{S}_\Phi(u, x_n) = u_n$, $n = 0, 1, \ldots, N$, по аналогии с леммой 2 можно показать, что при всех $x \in [0, 1]$ получаем

$$|S_\Phi'(u, x) - \tilde{S}_\Phi'(u, x)| \le 2h\|H^{-1}\|_\infty \max\{|u''(0) - \tilde{u}''(0)|, |u''(1) - \tilde{u}''(1)|\}, \tag{2.37}$$

$$|S_\Phi(u, x) - \tilde{S}_\Phi(u, x)| \le \frac{h^2}{2}\|H^{-1}\|_\infty \max\{|u''(0) - \tilde{u}''(0)|, |u''(1) - \tilde{u}''(1)|\}. \tag{2.38}$$

Таким образом, получены оценки устойчивости (2.36)–(2.38) построенного сплайна и его производных к погрешностям при задании $u''(0), u''(1)$ в краевых условиях.

3. СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В данном разделе оценим погрешность построенного сплайна в важном частном случае, когда функция $u(x)$, имеющая представление (1.1), имеет специальный вид, соответствующий решению сингулярно возмущенной краевой задачи. В этом случае погранслойная составляющая $\Phi(x)$ зависит от малого параметра $\varepsilon \in (0,1]$.

Итак, пусть

$$\Phi(x) = g(x,\varepsilon) f(x/\varepsilon). \tag{3.1}$$

Сделаем следующие ограничения.

1. Функции $g(x,\varepsilon)$ и $f(y)$ трижды непрерывно дифференцируемы по $x \in [0,1]$ и $y \in [0,+\infty)$ соответственно, и справедливы неравенства

$$\begin{gathered} C_1 \le |g(x,\varepsilon)| \le C_2, \quad f^{(3)}(y) \ne 0, \quad \left|g^{(i)}(x,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^{1-i}, \quad 1 \le i \le 2, \\ \left|f^{(j)}(y)\right| \le C\left|f^{(3)}(y)\right|, \quad 0 \le j \le 2, \quad x \in [0,1], \quad y \in [0,+\infty). \end{gathered} \tag{3.2}$$

2.

$$\int_0^{+\infty} y^n \left|f^{(3)}(y)\right| dy \le C, \quad n = 0,1,2.$$

3. При $h/\varepsilon \ge 1$ и k целых неотрицательных

$$C_1 \le \int_0^{+\infty} y^n f^{(3)}(y + kh/\varepsilon)dy \Big/ \int_0^{+\infty} f^{(3)}(y + kh/\varepsilon)dy \le C_2, \quad n = 1,2, \tag{3.3}$$

где C_1, C_2 не зависят от k, ε, h.

4. Для любого $y \ge 0$ имеем

$$\max_{t\in[0,1]}\left|f^{(3)}(y+t)\right| \Big/ \min_{t\in[0,1]}\left|f^{(3)}(y+t)\right| \le C. \tag{3.4}$$

Замечание 3. Представление (3.1) имеет широкий класс функций, описывающих пограничный слой [1], [20]. В частности, ограничения 1–4 справедливы для квазиполинома вида

$$\Phi(x) = \left(1 + \sum_{i=1}^{K} \alpha_i x^i\right) e^{-mx/\varepsilon}, \quad K > 0, \quad m > 0, \quad x \in [0,1],$$

где многочлен $1 + \sum_{i=1}^{K} \alpha_i x^i$ не имеет действительных корней. Данный квазиполином с точностью $O(\varepsilon^{K+1})$ задает погранслойную асимптотику в случае экспоненциального пограничного слоя.

Лемма 5. *Пусть функция* $\Phi(x)$ *имеет вид* (3.1) *и выполнены условия* 1–4. *Тогда найдется такая постоянная* C_0, *что при* $\varepsilon \in (0, C_0]$, $h \in (0,1]$ *для некоторых постоянных* C_3, C_4 *справедливы оценки*

$$C_3 \min\left\{\frac{1}{h}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\right\} \le \left\|H^{-1}\right\|_\infty \le C_4 \min\left\{\frac{1}{h}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\right\}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из (3.2) следует, что

$$\Phi^{(3)}(x) = (g(x,\varepsilon) + O(\varepsilon)) f^{(3)}(x/\varepsilon). \tag{3.6}$$

Вначале рассмотрим случай $h/\varepsilon \ge C_5 \ge 1$, где C_5 – достаточно большая константа. Из (2.13), (3.2), (3.3), (3.6) находим

$$A_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y^2(g(\varepsilon y + nh, \varepsilon) + O(\varepsilon))f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} (g(\varepsilon y + nh, \varepsilon) + O(\varepsilon))f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} = O^*\left(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y^2 f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}\right) = O\left(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\right), \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}
B_n = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} \left(\frac{h}{\varepsilon} - y\right)^2 \Phi^{(3)}\left(\varepsilon y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} \Phi^{(3)}\left(\varepsilon y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{h}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y\Phi^{(3)}\left(\varepsilon y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} \Phi^{(3)}\left(\varepsilon y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} + \\
+ \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y^2\Phi^{(3)}\left(\varepsilon y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} \Phi^{(3)}\left(\varepsilon y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{h}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y(g(\varepsilon y + nh, \varepsilon) + O(\varepsilon))f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} (g(\varepsilon y + nh, \varepsilon) + O(\varepsilon))f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} + \\
+ \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y^2(g(\varepsilon y + nh, \varepsilon) + O(\varepsilon))f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} (g(\varepsilon y + nh, \varepsilon) + O(\varepsilon))f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{h}O^*\left(\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} yf^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}\right) + \\
+ \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{h^2}O^*\left(\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y^2 f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}\right) = \frac{1}{2} - \left|O^*\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right| + O\left(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\right).
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Из полученных выражений для A_{n+1} и B_n получаем, что матрица H имеет вид

$$H = H_1 + H_2, \tag{3.9}$$

где $H_1 = M + J$ – верхнетреугольная двухдиагональная матрица с показателем диагонального преобладания $O^*(\varepsilon/h)$, где M – диагональная часть H, J – матрица, все ненулевые элементы которой являются элементами верхней наддиагонали H_1. Для матрицы H_2 справедлива оценка

$$\|H_2\|_\infty = O\left(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\right).$$

Находим обратную матрицу с помощью конечного ряда Неймана:

$$H_1^{-1} = (M(I + M^{-1}J))^{-1} = (I + M^{-1}J)^{-1}M^{-1} = \sum_{i=0}^{N-2}(-1)^i(M^{-1}J)^i M^{-1}.$$

Учитывая, что $\left\|M^{-1}\right\|_\infty \le 2$, а в силу диагонального преобладания с показателем $O^*(\varepsilon/h)$ будет $\left\|M^{-1}J\right\|_\infty = 1 - O^*(\varepsilon/h)$, получаем

$$\left\|H_1^{-1}\right\|_\infty = O^*\left(\left\|\sum_{i=0}^{N-2}(-1)^i(M^{-1}J)^i\right\|_\infty\right) = O^*\left(\min\left\{\frac{1}{h}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\right\}\right).$$

Последнее соотношение справедливо, так как строчные суммы модулей элементов матрицы $\sum_{i=0}^{N-2}(-1)^i(M^{-1}J)^i$ оцениваются сверху и снизу суммами геометрических прогрессий вида $\eta(\varepsilon,h)^m$, где $\eta(\varepsilon,h)=1-O^*(\varepsilon/h)$. Минимум получается в силу того, что каждое слагаемое меньше единицы, а всего их $N-1=O^*(h^{-1})$.

Из представления $H=H_1+H_2$ и полученных оценок на нормы матриц H_1^{-1}, H_2 при достаточно малом ε/h получаем (3.5), при этом $h/\varepsilon\geq C_5$.

Пусть теперь $h/\varepsilon<C_5$. Докажем, что в этом случае матрица H имеет строгое диагональное преобладание с показателем преобладания, не зависящим от h и ε. Аналогично (3.7), (3.8) из (2.12) находим

$$A_{n+1}+B_n=\frac{1}{2}-\frac{\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x_{n+1}-s)(s-x_n)\Phi^{(3)}(s)ds}{h^2\int_{x_n}^{x_{n+1}}\Phi^{(3)}(s)ds}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}}y(h/\varepsilon-y)(g(\varepsilon y+nh,\varepsilon))f^{(3)}\left(y+n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}}(g(\varepsilon y+nh,\varepsilon))f^{(3)}\left(y+n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}+O(\varepsilon). \tag{3.10}$$

Но в силу условия 4 имеем

$$\max_{y\in[0,h/\varepsilon]}\left|f^{(3)}(y+nh/\varepsilon)\right|/\min_{y\in[0,h/\varepsilon]}\left|f^{(3)}(y+nh/\varepsilon)\right|\leq C_6.$$

Поэтому для C_1 и C_2 из (3.2) будем иметь

$$\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}}y(h/\varepsilon-y)(g(\varepsilon y+nh,\varepsilon))f^{(3)}\left(y+n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}}(g(\varepsilon y+nh,\varepsilon))f^{(3)}\left(y+n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}\geq\frac{1}{C_6}\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}}y(h/\varepsilon-y)(g(\varepsilon y+nh,\varepsilon))dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}}(g(\varepsilon y+nh,\varepsilon))dy}\geq$$
$$\geq\frac{C_1}{C_2C_6}\frac{\varepsilon^2}{h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}}y(h/\varepsilon-y)dy}{\frac{h}{\varepsilon}}=\frac{C_1}{C_2C_6}\cdot\frac{1}{6}=C_7>0. \tag{3.11}$$

Из (2.5), (2.6), (3.10), (3.11) следует, что при достаточно малых ε матрица H имеет строгое диагональное преобладание с показателем преобладания, не зависящим от h и ε, откуда следует равномерная ограниченность $\left\|H^{-1}\right\|_\infty$ и оценка (3.5) при $h/\varepsilon<C_5$. Лемма доказана.

Из лемм 2, 5 следует справедливость оценок

$$\left|S_\Phi^{(i)}(u,x)-u^{(i)}(x)\right|\leq C\min\left\{h^{2-i},h^{3-i}+\frac{h^{4-i}}{\varepsilon}\right\},\quad x\in[0,1],\quad 0\leq i\leq 2. \tag{3.12}$$

Оценки (3.12) можно улучшить при дополнительных ограничениях на функцию $f(y)$. Сделаем ограничения дополнительно к 1–4:

5. Условия 2 и 3 выполнены и для $n=3$.

6. При $h/\varepsilon \ge 1$ и k целых неотрицательных

$$\frac{\int_0^{h/\varepsilon} y^n f^{(3)}\left(y + k\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{h/\varepsilon} f^{(3)}\left(y + k\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} = \tilde{K}_n + O(\varepsilon), \quad n = 1, 2, \tag{3.13}$$

где $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ – положительные постоянные, не зависящие от k.

Ограничения 1–6 справедливы, в частности, для квазиполинома из замечания 3.

Теорема 1. *Пусть для функции* $u(x)$ *справедливо представление* (1.1), *где* $p(x) \in C^4[0,1]$ *и для некоторой постоянной* C_4 $\left|p^{(3)}(x)\right|, \left|p^{(4)}(x)\right| \le C_4$, *для функции* $\Phi(x)$ *справедливо представление* (3.1) *и выполнены условия* 1–6. *Тогда найдется постоянная* C_0 *такая, что при* $\varepsilon \le C_0$ *для некоторой постоянной* C *справедливы оценки погрешности*:

$$\left|S_\Phi^{(i)}(u, x) - u^{(i)}(x)\right| \le Ch^{3-i}, \quad 0 \le i \le 2. \tag{3.14}$$

Доказательство. При $h/\varepsilon \le C$ оценки (3.14) вытекают из (3.12). Поэтому достаточно рассмотреть случай $h/\varepsilon \ge C$, где $C > 1$ – достаточно большая, не зависящая от ε и h константа.

Лемма 6. *Пусть выполнены предположения* 1–6. *Тогда для* $C > 1$ *при* $\varepsilon \in (0,1]$, $h \in (0,1]$ *таких, что* $h/\varepsilon \ge C$, *для* A_n *и* B_n *справедливы представления*

$$A_n = \mu(\varepsilon, h) + O(\varepsilon), \quad B_n = \nu(\varepsilon, h) + O(\varepsilon), \tag{3.15}$$

где μ, ν *не зависят от* n.

Доказательство. В силу предположений 1–6 при некотором $\theta \in (0,1)$ имеем

$$A_{n+1} = \frac{\varepsilon^2}{2h^2}\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y^2(g(nh,\varepsilon) + \varepsilon y g'(\theta\varepsilon y + nh) + O(\varepsilon))f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} (g(nh,\varepsilon) + \varepsilon y g'(\theta\varepsilon y + nh) + O(\varepsilon))f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2h^2}\left(\frac{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} y^2 g(nh,\varepsilon) f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy}{\int_0^{\frac{h}{\varepsilon}} g(nh,\varepsilon) f^{(3)}\left(y + n\frac{h}{\varepsilon}\right)dy} + O(\varepsilon)\right) = \mu(\varepsilon, h) + O(\varepsilon),$$

где в соответствии с (3.13) $\mu(\varepsilon, h) = \varepsilon^2/(2h^2)\tilde{K}_2$. Доказательство для B_n аналогично. Лемма доказана.

Обозначим через $\hat{H}$ матрицу $(N-1)$-го порядка системы (2.18) после исключения из нее компонент Z_0, Z_N. В силу леммы 5, (3.7) и (3.8) эта матрица имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + O(\varepsilon), \tag{3.16}$$

где

$$\hat{H}_0 = \mathrm{tridiag}\{\mu(\varepsilon, h), 1 - \mu(\varepsilon, h) - \nu(\varepsilon, h), \nu(\varepsilon, h)\} = \mathrm{tridiag}\{a, c, b\} \tag{3.17}$$

есть трехдиагональная тёплицева матрица $(N-1)$-го порядка с диагональным преобладанием и неотрицательными элементами при достаточно малых значениях ε/h, у которой

$$a = O^*\left(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\right), \quad b = \frac{1}{2} - \left|O^*\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right| + O^*\left(\frac{\varepsilon^2}{h^2}\right), \quad c = 1 - a - b = \frac{1}{2} + \left|O^*\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right|. \tag{3.18}$$

Лемма 7. *Пусть матрица* $\hat{H}_0$ *соответствует* (3.16)–(3.18). *Тогда найдутся такие константы* C_6, C_7, C_8, *что при* $\varepsilon/h \le C_8$ *матрица* $\hat{H}_0$ *обратима и имеет место представление*

$$\hat{H}_0^{-1} = DB_1 + B_2, \tag{3.19}$$

где $D = \operatorname{diag}\{d_{ii}\}$ *— диагональная матрица,* $B_1 = \{b_{ij}^1\}$ *— верхняя треугольная матрица, причем справедливы соотношения*:

$$\|B_1\|_\infty \le C_6 \min\left\{h^{-1}, 1 + \frac{h}{\varepsilon}\right\}, \quad \|B_2\|_\infty \le C_6, \quad \|D\|_\infty \le C_7, \tag{3.20}$$

$$b_{ij}^1 = (-1)^{j-i}\kappa_{\varepsilon,h}^{j-i}, \quad j \ge i, \quad \kappa_{\varepsilon,h} = 1 - O^*\left(\frac{\varepsilon}{h}\right). \tag{3.21}$$

Доказательство. Обратимость $\hat{H}_0$ вытекает из диагонального преобладания, которое следует из (3.16)–(3.18) при достаточно малых ε/h ($\varepsilon/h \le C_8$).

Докажем (3.19)–(3.21). Представим $\hat{H}_0$ в виде

$$\hat{H}_0 = (1 - a - b)\tilde{H}. \tag{3.22}$$

Тогда в силу (3.16)–(3.18) справедливо представление $\tilde{H} = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2$, $\tilde{H}_s = \{\tilde{h}_{ij,s}\}$, $s = 1, 2$, где

$$\tilde{h}_{ij,1} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \kappa_{\varepsilon,h}, & j = i + 1, \\ 0, & j \ne i, \quad i + 1, \end{cases} \qquad \kappa_{\varepsilon,h} = 1 - O^*\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) \in (0,1), \quad \|\tilde{H}_2\|_\infty \le C\frac{\varepsilon^2}{h^2}. \tag{3.23}$$

В силу (3.18) формулы (3.19)–(3.21) достаточно доказать для матрицы $\tilde{H}$.

Учитывая (3.23), получаем, что $\tilde{H}_1 = I - L$, где L — нильпотентная матрица, т.е. $L^s = 0$ при $s \ge N$. Поэтому матрица $\tilde{H}_1^{-1} = \{\tilde{h}_{ij,-1}\}$ представима конечным рядом Неймана

$$\tilde{H}_1^{-1} = I + \sum_{s=1}^{N-2} L^s, \quad \tilde{h}_{ij,-1} = (-1)^{j-i}\kappa_{\varepsilon,h}^{j-i}, \quad j \ge i, \quad \kappa_{\varepsilon,h} = 1 - \left|O^*\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right|. \tag{3.24}$$

Отсюда

$$\left\|\tilde{H}_1^{-1}\right\|_\infty = O^*\left(\frac{h}{\varepsilon}\right). \tag{3.25}$$

Из (3.22)–(3.25) следует, что при достаточно малых $\frac{\varepsilon}{h}$, $\left(\frac{\varepsilon}{h} \le C_8\right)$, матрица $\tilde{H}$ обратима и $\left\|\tilde{H}^{-1}\right\|_\infty = O\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)$. При этом в силу (3.23), (3.25) получим

$$\tilde{H}^{-1} = \tilde{H}_1^{-1}(I + \tilde{H}_2\tilde{H}_1^{-1})^{-1} = \tilde{H}_1^{-1}(I + M) = \tilde{H}_1^{-1} + \tilde{H}_1^{-1}M, \tag{3.26}$$

где $\|M\|_\infty = O\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)$.

Из (3.24)–(3.26) следует представление вида (3.19)–(3.23) для $\tilde{H}^{-1}$, в котором $D = I$, $B_1 = \tilde{H}_1^{-1}$, $B_2 = \tilde{H}_1^{-1}M$. Лемма доказана.

Из (3.16), (3.19)–(3.20) следует, что при достаточно малых ε для матрицы $\hat{H}^{-1}$ справедливо представление

$$\hat{H}^{-1} = \hat{H}_0^{-1} + A_1, \quad \|A_1\|_\infty \le C. \tag{3.27}$$

Докажем справедливость оценки

$$\left\|\hat{H}_0^{-1}G\right\|_\infty \le Ch, \tag{3.28}$$

где G определено в (2.18). В силу представления (3.19) для обоснования (3.28) достаточно доказать, что

$$\|B_1G\|_\infty \le Ch. \tag{3.29}$$

Оценим первую компоненту вектора B_1G. Оценки остальных компонент аналогичны. В силу (3.21) имеем

$$(B_1G)_1 = \sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1}\kappa_{\varepsilon,h}^{n-1}G_n. \tag{3.30}$$

Для оценки суммы (3.30) воспользуемся преобразованием Абеля [23, с. 306]. Положим $a_n = G_n$, $b_n = (-1)^{n-1}\kappa_{\varepsilon,h}^{n-1}$, $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Тогда верно

$$\sum_{n=1}^{N-1}a_nb_n = a_{N-1}b_{N-1} - \sum_{n-1}^{N-2}(a_{n+1} - a_n)B_n. \tag{3.31}$$

Поскольку в силу (2.20), (3.21) имеем

$$\left|a_{N-1}b_{N-1}\right| = \left|G_{N-1}\kappa_{\varepsilon,h}^{N-2}\right| \le \left|G_{N-1}\right| \le Ch, \quad \left|B_n\right| = \frac{1+(-1)^{n-1}\kappa_{\varepsilon,h}^{n-1}}{1+\kappa_{\varepsilon,h}} \le 1,$$

то в силу (3.31) для обоснования оценки (3.29) достаточно установить оценку

$$\left|G_{n+1} - G_n\right| \le Ch^2, \quad 1 \le n \le N-2. \tag{3.32}$$

В силу (2.18), (3.15) имеем

$$\begin{aligned}G_{n+1} - G_n &= O(h^2) + A_{n+1}(p''_{n+1} - p''_n) + B_{n+1}(p''_{n+1} - p''_{n+2}) - A_n(p''_n - p''_{n-1}) - B_n(p''_n - p''_{n+1}) = \\ &= O(h^2) + (A_{n+1} - A_n)(p''_{n+1} - p''_n) + A_n(p''_{n+1} - 2p''_n + p''_{n-1}) + (B_{n+1} - B_n)(p''_{n+1} - p''_n) + \\ &+ B_n(-p''_n + 2p''_{n+1} - p''_{n+2}) = O(h^2) + O(\varepsilon)O(h) + O(h^2) + O(\varepsilon)O(h) + O(h^2) = O(h^2).\end{aligned}$$

Итак, получили (3.32), что обосновывает оценку (3.29), из которой следует оценка (3.28).

Теперь из (3.28), (3.27), (2.18), (2.20) получаем

$$\max_n\left|M_n - u''_n\right| = \left\|\hat{H}^{-1}G\right\|_\infty \le \left\|\hat{H}_0^{-1}G\right\|_\infty + \|A_1G\|_\infty \le Ch. \tag{3.33}$$

Далее, используя (2.23) и (3.33), получаем $\left|S''_\Phi(u,x) - u''(x)\right| \le Ch$, что соответствует требуемой оценке (3.14) при $i = 2$. Оценки в (3.14) при $i = 0,1$ выводятся по аналогии с леммой 2. Итак, теорема 1 доказана.

Замечание 4. В теореме 1 оценки погрешности (3.14) получены в случае $\varepsilon \le C_0$, где C_0 – достаточно малая положительная постоянная. Производные решения сингулярно возмущенной задачи являются равномерно ограниченными, если параметр ε отделен от нуля [2]. Поэтому в случае $\varepsilon \ge C_0$ справедливы оценки (2.26) и для оценки погрешности сплайна можно применить замечание 2.

3.1. Замечания об устойчивости

Из леммы 5 и оценок (2.34)–(2.38) следует, что при $h/\varepsilon \le C$ сплайн $S_\Phi(u,x)$ будет устойчивым к возмущению правой части F в (2.9). В случае $h/\varepsilon \gg 1$ устойчивости по правой части F в соответствии с (3.5) не будет. Однако можно убедиться, что устойчивость к возмущению вторых производных $u''(0)$, $u''(1)$ сохранится и в этом случае. Действительно, $u''(0)$, $u''(1)$ входят только в первое и последнее уравнения системы (2.5), (2.6) после исключения из нее M_0 и M_N. Поэтому для устойчивости по $u''(0)$, $u''(1)$ достаточно установить оценки

$$\left\|\hat{H}^{-1}e_k\right\|_\infty \le C, \quad k = 1, \quad N-1, \tag{3.34}$$

где e_k есть k-й единичный орт.

Таблица 1. Погрешность и вычисленный порядок точности сплайна (2.3) в случае функции (4.1)

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
10^{-2}	4.33×10^{-4}	4.21×10^{-5} 3.36	3.01×10^{-6} 3.81	1.78×10^{-7} 4.08	1.03×10^{-8} 4.11	6.12×10^{-10} 4.07
10^{-3}	4.83×10^{-4}	6.02×10^{-5} 3.00	7.43×10^{-6} 3.09	8.82×10^{-7} 3.08	9.21×10^{-8} 3.26	7.29×10^{-9} 3.65
10^{-4}	4.84×10^{-4}	6.05×10^{-5} 3.00	7.57×10^{-6} 3.00	9.45×10^{-7} 3.00	1.18×10^{-7} 2.99	1.46×10^{-8} 3.01
10^{-5}	4.86×10^{-4}	6.05×10^{-5} 3.00	7.57×10^{-6} 3.00	9.46×10^{-7} 3.00	1.18×10^{-7} 2.99	1.47×10^{-8} 3.00

В силу (3.27), (3.19)–(3.21) будет

$$\left\|\hat{H}^{-1}e_k\right\|_\infty \le \left\|\hat{H}_0^{-1}e_k\right\|_\infty + \|A_1e_k\|_\infty \le C_1\|B_1e_k\|_\infty + C_2.$$

Но $\|B_1e_k\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le N-1}\left|b_{ik}^1\right| \le 1$ в силу (3.21) и оценки (3.34) доказаны.

Следовательно, по аналогии с оценкой (2.38), для некоторой постоянной C справедлива оценка устойчивости:

$$\left|S_\Phi(u,x) - \tilde{S}_\Phi(u,x)\right| \le Ch^2 \max\left\{\left|u''(0) - \tilde{u}''(0)\right|, \left|u''(1) - \tilde{u}''(1)\right|\right\}. \tag{3.35}$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Зададим функцию $u(x)$ вида (1.1)

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + (1+x)e^{-x/\varepsilon}, \quad x\in[0,1], \quad \varepsilon\in(0,1], \tag{4.1}$$

где $\Phi(x) = (1+x)e^{-x/\varepsilon}$. В табл. 1 представлена максимальная погрешность сплайна (2.3) в зависимости от значений ε и N. Максимум погрешности берется по узлам сетки, полученной из сетки Ω делением каждого сеточного интервала на 10 равных частей. Результаты вычислений согласуются с оценкой (3.14) при $i = 0$. С увеличением параметра ε погрешность сплайна становится порядка $O(h^4)$, что соответствует замечанию 2.

Отметим, что в [16] численные эксперименты показали, что в случае функции вида (4.1) и равномерной сетки при заданном шаге h погрешность кубического сплайна неограниченно растет с уменьшением параметра ε.

Теперь зададим функцию с составляющей, соответствующей степенному пограничному слою

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + \sqrt{x+\varepsilon}, x\in[0,1]. \tag{4.2}$$

В табл. 2 аналогичным образом представлены погрешности в случае сплайна (2.3) и функции (4.2). В (4.2) $p(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$, $p'''(0) = 0$, поэтому в силу замечания 1 результаты вычислений согласуются с оценкой (2.33) при $i = 0$.

Таблица 2. Погрешность и вычисленный порядок точности сплайна (2.3) в случае функции (4.2)

ε	N					
	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
1	1.62×10^{-4}	9.92×10^{-6} 4.03	6.10×10^{-7} 4.02	3.79×10^{-8} 4.01	2.36×10^{-9} 4.01	1.47×10^{-10} 4.01
10^{-1}	2.74×10^{-4}	1.53×10^{-5} 4.16	9.14×10^{-7} 4.07	5.57×10^{-8} 4.04	3.44×10^{-9} 4.02	2.14×10^{-10} 4.01
10^{-2}	3.03×10^{-4}	1.68×10^{-5} 4.17	9.97×10^{-7} 4.08	6.08×10^{-8} 4.04	3.75×10^{-9} 4.02	2.33×10^{-10} 4.01
10^{-3}	3.06×10^{-4}	1.70×10^{-5} 4.17	1.04×10^{-6} 4.03	6.40×10^{-8} 4.02	3.90×10^{-9} 4.04	2.35×10^{-10} 4.05
10^{-4}	3.06×10^{-4}	1.70×10^{-5} 4.17	1.05×10^{-6} 4.03	6.53×10^{-8} 4.01	4.08×10^{-9} 4.00	2.54×10^{-10} 4.01
10^{-8}	3.07×10^{-4}	1.70×10^{-5} 4.17	1.05×10^{-6} 4.03	6.53×10^{-8} 4.01	4.08×10^{-9} 4.00	2.55×10^{-10} 4.01

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение кубического сплайна дефекта один для интерполяции функций с большими градиентами в случае равномерной сетки может приводить к неприемлемым погрешностям. Построен неполиномиальный аналог кубического сплайна на основе того, чтобы сплайн был точным на составляющей, отвечающей за большие градиенты интерполируемой функции. Эта составляющая рассматривается как функция общего вида, известная с точностью до множителя. Доказано, что такой сплайн можно построить однозначным образом. В случае ограничений на погранслойную составляющую, выполняемых при наличии экспоненциального пограничного слоя, получены оценки погрешности для сплайна и его производных, равномерные по малому параметру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
2. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
4. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6. № 2. С. 237–248.
5. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
6. *Бор К.Де.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
7. *Блатов И.А., Стрыгин В.В.* Метод коллокации четвертого порядка точности для сингулярно возмущенных краевых задач // Сиб. матем. журнал. 1993. Т. 34. № 1. С. 16–31.
8. *Mohammadi Reza.* Exponential B-Spline Solution of Convection-Diffusion Equations // Applied Mathematics. 2013. V. 4. P. 933–944.
9. *Kadalbajoo M.K., Anuradha J.* Exponentially fitted cubic spline for two-parameter singularly perturbed boundary value problems // Internat. Journal of Computer Mathematics. 2012. V. 89. № 6. P. 836–850.
10. *Chandra S., Rao Sekhara, Kumar Mukesh.* Exponential B-spline collocation method for self-adjoint singularly perturbed boundary value problems // Applied Numerical Mathematics. 2008. V. 58 P. 1572–1581.
11. *Суорн Сингх, Суручи Сингх, Р. Арора.* Численное решение одномерного гиперболического уравнения второго порядка методом коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов // Сиб. журн. вычисл. матем. 2017. Т. 20. № 2. С. 201–213.

12. *Homa Zadvan, Jalil Rashidinia*. Tension spline method for the solution of elliptic equations // Journal of Taibah University for Science. 2019. V. 13. № 1. P. 604–610.
13. *Волков Ю.С., Шевалдин В.Т.* Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. Р. 145–152.
14. *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* Об интерполяции параболическим сплайном функций с большими градиентами в пограничном слое // Сиб. матем. журнал. 2017. Т. 58. № 4. С. 745–760.
15. *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* О равномерной сходимости параболической сплайн-интерполяции на классе функций с большими градиентами в пограничном слое // Сиб. ж. вычисл. матем. 2017. Т. 20. № 2. С. 131–144.
16. *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* Об интерполяции кубическими сплайнами функций с большими градиентами в пограничном слое // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 1. С. 9–28.
17. *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* О равномерной по параметру сходимости экспоненциальной сплайн-интерполяции при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 3. С. 365–382.
18. *Kellogg R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32. P. 1025–1039.
19. *Zadorin A.I.* Spline interpolation of functions with a boundary layer component // Internat. J. Numerical Analys. and Model. S. B. 2011. V. 2. № 2–3. P. 262–279.
20. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
21. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. ж. вычисл. матем. 2007. Т. 10. № 3. С. 267–275.
22. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Sib. Electronic Mathem. Reports. 2012. V. 9. P. 445–455.
23. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II. М.: Наука, 1970.
24. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14. № 4. P. 616–619.