ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 3, с. 489–502

УДК 517.968

ВЫТЕСНЕНИЕ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В СИСТЕМЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРУБОК[1)]

© 2020 г. Г. В. Монаков[1,*], С. Б. Тихомиров[1,**], А. А. Яковлев[2,3,***]

[1] 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

[2] 190000 Санкт-Петербург, Почтамтская ул., 3, ПАО Газпромнефть, Россия

[3] 634050 Томск, пр-т Ленина, 30, Томский политехниеский университет, Россия

*e-mail: st049008@student.spbu.ru

**e-mail: s.tikhomirov@spbu.ru

***e-mail: yakovlev.aale@gazpromneft.ru; ya@tpu.ru

Поступила в редакцию 05.09.2019 г.
Переработанный вариант 05.09.2019 г.
Принята к публикации 18.11.2019 г.

Рассматривается процесс закачки воды в пласт, заполненный более вязкой жидкостью, в простейшей модели межскважинного пространства, описываемого системой из параллельных трубок. Жидкости предполагаются несмешиваемыми с четкой границей в каждой из трубок. Основной задачей является возможность восстановления параметров межскважинного пространства по характеристике вытеснения – данным о вытеснении каждой из жидкостей. Для изучаемой модели предъявлено явное решение прямой задачи. Показано, что задача о восстановлении среды, являющаяся, по сути, обратной задачей, может быть решена с точностью до однопараметрического семейства, и установлено, в какой топологии обратная задача устойчива. Библ. 12.

Ключевые слова: вязкие жидкости, течение в пористой среде, обратная задача, неподвижные точки, уравнение Вольтерра.

DOI: 10.31857/S004446692003014X

1. ВВЕДЕНИЕ

Разработка математической модели для процесса вторичной добычи на нефтяных месторождениях является актуальной для современной индустрии задачей [1], [2]. В этой статье мы изучаем упрощенную квази-одномерную модель пористой среды, которая может быть описана и решена явно. В нашей модели межскважинное пространство описывается набором параллельных трубок, не взаимодействующих друг с другом. Трубки обладают различными длинами и площадями поперечного сечения. В [3]–[5] приведен обзор подобных моделей пористой среды. Структура нашей модели предполагает, что левый конец всех трубок соединен с нагнетающей скважиной, а правый – с добывающей. Каждая трубка разделена на два сегмента, наполненных несмешиваемыми фазами (например, водой и нефтью). Разность давлений между скважинами является параметром. Мы предполагаем, что сечение трубок постоянно, движение жидкостей подчиняется закону Дарси, и вытесняемая жидкость (нефть) более вязкая, чем вытесняющая (вода), а значит, обладает меньшей подвижностью.

В этой работе мы изучаем обратную задачу – зная зависимость количества добытой нефти от количества закачанной воды (характеристику вытеснения), определить геометрию резервуара, то есть найти длины и площади сечения трубок. Подобные вопросы в литературе, связанной с нефтедобычей, известны как задачи “history matching” [6]. Отметим, что мы не предполагаем знания разности давлений на добывающей и нагнетающей скважине.

Исследуемая задача восходит к модели Dykstra–Parsons из [7]. Частный случай нашей модели, отвечающий постоянной разности давлений, рассмотрен в [6]. Отметим, что нам не удалось найти в литературе изучения обратной задачи для данной модели. Кроме того, представление пори-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке С. Тихомирова и Г. Монакова грантом Президента РФ (проект 075-15-2019-204), а также Г. Монакова программой социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпромнефть”.

стой среды в виде набора трубок широко описано в литературе, например при описании механизма капиллярного давления в модели Buckley-Leverett в [8] и при вычислении относительных проницаемостей в [9], [10].

Задача “history matching” заключается в восстановлении геометрии резервуара по измерениям на нагнетающей и добывающей скважинах. Величины, доступные для измерения — это дебиты воды и нефти, а также разность давлений на скважинах как функция от времени. Несложно видеть, что знаний дебита воды (или нефти) и разности давлений достаточно для восстановления геометрии в рассматриваемой модели. Однако на практике данные о разности давлений недоступны или недостаточно точны. Наш главный результат заключается в том, что геометрия резервуара может быть устойчиво восстановлена по характеристике вытеснения, которая является параметрической кривой, выражаемой в терминах дебитов воды и нефти.

Решение данной задачи естественным образом разбивается на три части: доказательство единственности решения, построение алгоритма нахождения решения и исследование устойчивости решения в зависимости от начальных данных. В разд. 4 показано, что функция вытеснения не изменяется при гомотетии меры, так что единственность решения необходимо устанавливать с точностью до численного параметра, фиксирующего гомотетию. Главными результатами являются теоремы 2 и 4. Теорема 2 показывает единственность меры при фиксированной функции вытеснения и дополнительном численном параметре, упомянутом выше. Мера при этом определяется как неподвижная точка сжимающего оператора, что дает нам алгоритм для ее численного приближения. Теорема 4 утверждает, что процесс восстановления меры является устойчивым относительно возмущений функции вытеснения в подходящем функциональном классе.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 мы формулируем задачу для одной трубки и приводим явную формулу, описывающую движение раздела фаз. В разд. 3 мы вычисляем дебиты воды и нефти как функции от времени для системы из конечного числа трубок. В разд. 4 мы описываем предельный переход в нашей модели, устремляя число трубок к бесконечности, а также показываем гомотетию, лишающую обратную задачу единственности решения. Разд. 5 содержит формулировку и доказательство главного результата, заключающегося в единственности решения обратной задачи с точностью до гомотетии. Разд. 6 содержит результаты, связанные с устойчивостью обратной задачи.

На протяжении всей статьи $\circ$ означает композицию функций, $L^\infty(I)$, $C(I)$, $C^1(I)$ обозначают пространства ограниченных почти всюду по мере Лебега функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций соответственно, $\mathrm{Lip}(f)$ означает константу Липшица функции f.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ С ОДНОЙ ТРУБКОЙ

Рассмотрим две скважины, соединенные тонкой трубкой длины L и площади сечения S. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ трубка заполнена нефтью вязкости μ_o. Далее мы начинаем закачивать воду вязкости μ_w в нагнетающую скважину, расположенную в точке $x = 0$. Одним из ключевых предположений данной работы является неравенство $\mu_w < \mu_o$. Разность давлений между нагнетающей и добывающей скважинами является функцией времени, мы обозначим ее за $\Delta p(t)$. В нашей постановке задачи все жидкости являются несжимаемыми, а значит нефть и, спустя некоторое время, вода начнут вытекать из добывающей скважины. Обозначим скорость добычи нефти через $Q_o(t)$, а скорость добычи воды через $Q_w(t)$. Мы предполагаем, что наша трубка достаточно тонкая ($L^2 \gg S$), и все характеристики системы зависят только от координаты x, что означает, что в нашей трубке только одна точка на оси x соответствует соприкосновению воды и нефти (обозначим расстояние между нагнетающей скважиной и этой точкой за $l(t)$), а также давление $p(t,x)$ и скорость течения жидкости $v(t,x)$ зависят только от координаты x и момента времени t. Так как течение жидкости удовлетворяет уравнению неразрывности, несложно видеть, что $v(t,x_1) = v(t,x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in [0, L]$, из чего следует, что скорость течения $v(t)$ зависит только от момента времени t и $\frac{dl}{dt}(t) = v(t)$. Следующим важным предположением является то, что течение в трубке подчиняется закону Дарси:

$$v(t) = -\frac{k}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial x}(t,x),$$

где k — положительная константа (проницаемость). Это уравнение справедливо для всех точек $x \le l(t)$. Рассмотрим $x \ge l(t)$. В этих точках трубы находится нефть, из-за чего вязкость в правой части уравнения меняется:

$$v(t) = -\frac{k}{\mu_o}\frac{\partial p}{\partial x}(t, x).$$

Интегрируя первое уравнение от $x = 0$ до $x = l(t)$ и второе уравнение от $x = l(t)$ до $x = L$ и суммируя полученные равенства с коэффициентами μ_w и μ_o соответственно, получаем, что

$$v(t)(l(t)\mu_w + (L - l(t))\mu_o) = -k(p(t, l(t)) - p(t, 0)) - k(p(t, L) - p(t, l(t))).$$

Так как $p(t, 0) - p(t, L) = \Delta p(t)$, последнее можно переписать в виде

$$\frac{dl}{dt}(t) = \frac{k\Delta p(t)}{l(t)\mu_w + (L - l(t))\mu_o}.$$

Для краткости введем обозначения: $\kappa = \frac{\mu_w}{\mu_o} < 1$ и $c(t) = \frac{k}{\mu_o}\Delta p(t)$. После этого мы получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dl}{dt}(t) = \frac{c(t)}{l(t)\kappa + L - l(t)}. \tag{2.1}$$

Оно может быть решено явно, и так как $l(0) = 0$, получаем

$$\frac{\kappa - 1}{2}l(t)^2 + Ll(t) = F(t), \quad \text{где} \quad F(t) := \int_0^t c(\tau)d\tau.$$

Вспоминая, что $l(t) \le L$, получаем

$$l(t) = \frac{L - \sqrt{L^2 - 2(1 - \kappa)F(t)}}{1 - \kappa}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая величина: $F(t^*)$, $t^* = \sup\{t \in [0, +\infty) : l(t) < L\}$:

$$L = \frac{L - \sqrt{L^2 - 2(1 - \kappa)F(t^*)}}{1 - \kappa},$$

откуда

$$F(t^*) = \frac{1 + \kappa}{2}L^2. \tag{2.3}$$

3. ОПИСАНИЕ И СВОЙСТВА МОДЕЛИ С НЕСКОЛЬКИМИ ТРУБКАМИ

Рассмотрим систему из n параллельных тонких трубок с длинами L_1, L_2, ..., L_n и площадями поперечного сечения $S_1, S_2, \ldots, S_n$, соединяющих нагнетающую и добывающую скважины. В момент времени $t = 0$ все трубки заполнены нефтью, и, как и в предыдущей модели, мы начинаем закачивать воду в нагнетающую скважину. Обозначим объемы нефти и воды, выкачанные к моменту времени t за $\tilde{V}_o(t)$ и $\tilde{V}_w(t)$ соответственно. Величины $\tilde{V}_o(t)$, $\tilde{V}_w(t)$ и $Q_o(t)$, $Q_w(t)$, как несложно видеть, связаны следующим соотношением:

$$\tilde{V}_o(t) = \int_0^t Q_o(\tau)d\tau, \quad \tilde{V}_w(t) = \int_0^t Q_w(\tau)d\tau.$$

Кроме того, объем нефти, выкачанный к моменту времени t, можно вычислить следующим образом:

$$\tilde{V}_o(t) = l_1(t)S_1 + l_2(t)S_2 + \ldots + l_n(t)S_n.$$

Предположим, что $L_1 < L_2 < \ldots < L_n$. Обозначим за t_k момент прорыва воды в k-й трубке, а именно $t_k = \sup\{t \in [0, +\infty) : l_k(t) \le L_k\}$. Из формулы (2.2) видно, что величина $l_k(t)$ зависит от длины трубки L_k и не зависит от ее площади сечения, а формула (2.3), неравенство $L_1 < L_2 < \ldots < L_n$ и монотонность функции F гарантируют выполнение неравенств $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Из последнего на полуинтервале $t \in [t_k, t_{k+1})$ несложно следует равенство:

$$\tilde{V}_o(t) - \tilde{V}_o(t_k) = \sum_{j=k+1}^{n} (l_j(t) - l_j(t_k))S_j,$$

так как трубки с номерами $\{1, 2, \ldots, k\}$ уже заполнены водой, и нефть из них больше не добывается. Подставляя соотношение (2.2) в последнее равенство, получаем

$$\tilde{V}_o(t) - \tilde{V}_o(t_k) = \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{L_j - \sqrt{L_j^2 - 2(1-\kappa)F(t)}}{1-\kappa} - \frac{L_j - \sqrt{L_j^2 - 2(1-\kappa)F(t_k)}}{1-\kappa} \right) S_j =$$
$$= \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\sqrt{L_j^2 - 2(1-\kappa)F(t_k)} - \sqrt{L_j^2 - 2(1-\kappa)F(t)}}{1-\kappa} S_j.$$

Аналогичную формулу можно получить для скорости добычи воды (при выводе мы воспользовались тем, что на полуинтервале $t \in [t_k, t_{k+1})$ вода добывается из трубок с номерами $\{1, 2, \ldots, k\}$):

$$Q_w(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{dl_j}{dt}(t) S_j.$$

Пользуясь формулой (2.1) и соотношением $l_j(t) = L_j$ для $t_k \le t < t_{k+1}$ и $1 \le j \le k$, получаем

$$Q_w(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{c(t)}{L_j \kappa} S_j = \frac{c(t)}{\kappa} \sum_{j=1}^{k} \frac{S_j}{L_j},$$
$$\tilde{V}_w(t) - \tilde{V}_w(t_k) = \frac{F(t) - F(t_k)}{\kappa} \sum_{j=1}^{k} \frac{S_j}{L_j}, \quad \text{где} \quad t_k \le t \le t_{k+1}.$$

Возвращаясь к формуле (2.3) и, подставляя $t^* = t_k$, получаем

$$F(t_k) = \frac{1+\kappa}{2} L_k^2.$$

В этом разделе мы получили формулы (справедливые для $t_k \le t < t_{k+1}$), выражающие объем добытой нефти и объем добытой воды:

$$\tilde{V}_o(t) - \tilde{V}_o(t_k) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\sqrt{L_j^2 - 2(1-\kappa)\frac{1+\kappa}{2}L_k^2} - \sqrt{L_j^2 - 2(1-\kappa)F(t)}}{1-\kappa} S_j, \tag{3.1}$$

$$\tilde{V}_w(t) - \tilde{V}_w(t_k) = \frac{F(t) - \frac{1+\kappa}{2}L_k^2}{\kappa} \sum_{j=1}^{k} \frac{S_j}{L_j}. \tag{3.2}$$

Отметим, что в данной системе величина $F(t)$ может быть заменена произвольным монотонным по t параметром, что позволяет нам рассматривать кривую $(\tilde{V}_w(t), \tilde{V}_o(t))$, как зависящую только от наборов длин трубок $L_1, L_2, \ldots, L_n$ и площадей их сечений $S_1, S_2, \ldots, S_n$, но не от функции $F(t)$, которая всего лишь задает некоторую конкретную параметризацию.

Замечание 1. Несмотря на простоту модели, она отражает такое важное и сложное для моделирования явление как возникновение вязких пальцев [11]. Предположим, что у нас есть набор сравнимых, но различных по длине трубок. Скорость вытеснения жидкости будет выше в более коротких трубках, так как в них сопротивление, оказываемое вязким трением, будет меньше. Чем больше воды будет прокачано в коротких трубках, тем меньше будет становиться вязкая сила трения в них в сравнении с длинными трубками, из-за чего разница в скорости вытеснения в коротких и длинных трубках будет расти. Этот процесс отвечает росту вязких пальцев. В то же время модель не отражает других важных явлений, таких как деление вязких пальцев, изменение топологии водяного пятна и других.

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

В этом разделе мы совершим предельный переход, устремив количество трубок в предыдущей модели к бесконечности, для моделирования непрерывной среды. Для этого удобно будет рассмотреть следующую конструкцию: пусть μ — конечная мера с компактным носителем в $(0,+\infty)$. Ее физический смысл можно описать следующим образом: мера интервала $(a,b)\subset(0,+\infty)$ равна суммарной площади сечения всех трубок с длинами в интервале (a,b). В этой постановке предыдущая модель представляется линейной комбинацией точечных нагрузок, а именно мера $\mu=\sum_{k=1}^{n}S_k\delta_{L_k}$ соответствует набору из n трубок с длинами $L_1,L_2,\ldots,L_n$ и площадями сечений $S_1,S_2,\ldots,S_n$, где

$$\delta_L(A)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad L\in A,\\ 0, & \text{если} \quad L\notin A.\end{cases}$$

Мы хотим рассматривать формулы (3.1) и (3.2), как относящиеся к дискретной мере μ, выписанной выше, и продолжить их с сохранением непрерывности на пространство всех мер (топологию на пространстве мер мы введем позднее, см. определение 1). Строго говоря, мы ищем отображение, сопоставляющее мере μ пару функций V_w и V_o так, что в случае дискретной меры μ полученные функции V_w и V_o являются репараметризациями (3.1) и (3.2), то есть существует непрерывная биекция ξ такая, что $\tilde V_o(\xi(t))=V_o(t)$, $\tilde V_w(\xi(t))=V_w(t)$. Наше отображение будет непрерывным из пространства мер с некоторой топологией в пространство непрерывных функций со стандартной нормой.

Определение 1. Обозначим через $\mathcal{X}$ банахово пространство всех конечных борелевских мер μ на $(0,+\infty)$ таких, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}\,d|\mu|(y)<\infty$$

с нормой

$$\|\mu\|_X=\int_0^{+\infty}\frac{1}{y}\,d|\mu|(y).$$

Лемма 1. *Отображения*

$$\mu\mapsto V_w,\quad \mu\mapsto V_o,$$

заданные формулами

$$V_w(\alpha)=\frac{1+\kappa}{\kappa}\int_0^{\alpha}t\int_0^{t}\frac{1}{y}\,d\mu(y)dt, \tag{4.1}$$

$$V_o(\alpha)=(1+\kappa)\int_0^{\alpha}t\int_t^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y^2-(1-\kappa^2)t^2}}\,d\mu(y)dt, \tag{4.2}$$

удовлетворяют

$$V_w\left(\sqrt{\frac{2}{1+k}F(t)}\right)=\tilde V_w(t),\quad V_o\left(\sqrt{\frac{2}{1+k}F(t)}\right)=\tilde V_o(t), \tag{4.3}$$

для $\mu=\sum_{k=1}^{n}S_k\delta_{L_k}$ *и являются непрерывными из пространства* $\mathcal{X}$ *в пространство* $C(0,M)$ *для любого числа* $M>0$.

Доказательство. Отображения (4.1) и (4.2), очевидно, являются непрерывными в описанных топологиях. Подставим $\mu=\sum_{k=1}^{n}S_k\delta_{L_k}$. Тогда для $\alpha\in[L_k,L_{k+1}]$ получаем

$$V_w(\alpha)=\frac{1+\kappa}{\kappa}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{L_j^2-L_{j-1}^2}{2}\sum_{i=1}^{j}\frac{S_i}{L_i}+\sum_{j=1}^{k}\frac{S_j}{L_j}\frac{\alpha^2-L_k^2}{2}\right).$$

Из этого следует (3.2) для $\sqrt{\frac{2}{1+k}F(t)} = \alpha$. Формула (3.1) получается аналогично.

Выбор топологии на пространстве мер обусловлен тем, что множество линейных комбинаций δ-мер плотно в $\mathscr{X}$, а значит, продолжение отображений $\tilde{V}_w$ и $\tilde{V}_o$, описанное в лемме, единственно.

Определение 2. Функция V_w, заданная равенством (4.1), не убывает, функция V_o, заданная равенством (4.2), возрастает, значит, множество точек $\mathscr{L}(\mu) = \{(V_o(\alpha) + V_w(\alpha)), V_w(\alpha)\}_{\alpha>0}$ является графиком монотонной функции. Обозначим ее G.

Отметим, что функция G играет важную роль в приложениях. Она называется характеристикой вытеснения и показывает, как доля добычи воды изменяется со временем.

В дальнейшем мы будем решать задачу, часто называемую “history matching”, то есть будем пытаться найти параметры среды (меру μ), зная характеристику вытеснения G.

Заметим, что формулы (4.1) и (4.2) могут быть упрощены следующим образом:

$$V_w(\alpha) = \frac{1+\kappa}{\kappa}\int_0^{\alpha}\int_0^{t}\frac{t}{y}d\mu(y)dt = \frac{1+\kappa}{\kappa}\int_0^{\alpha}\frac{1}{y}\int_y^{\alpha}tdtd\mu(y) = \frac{1+\kappa}{2\kappa}\int_0^{\alpha}\frac{\alpha^2-y^2}{y}d\mu(y),$$

$$V_o(\alpha) = (1+\kappa)\int_0^{\alpha}\int_t^{\infty}\frac{t}{\sqrt{y^2-(1-\kappa^2)t^2}}d\mu(y)dt = (1+\kappa)\int_0^{\infty}\int_0^{\min(y,\alpha)}\frac{t}{\sqrt{y^2-(1-\kappa^2)t^2}}dtd\mu(y) =$$

$$= \frac{-1}{1-\kappa}\int_0^{\infty}\sqrt{y^2-(1-\kappa^2)t^2}\Big|_0^{\min(y,\alpha)}d\mu(y) = \int_0^{\alpha}yd\mu(y) + \frac{1}{1-\kappa}\int_{\alpha}^{\infty}\left(y-\sqrt{y^2-(1-\kappa^2)\alpha^2}\right)d\mu(y).$$

Для удобства будущих ссылок выпишем полученные после упрощения формулы:

$$V_w(\alpha) = \frac{1+\kappa}{2\kappa}\int_0^{\alpha}\frac{\alpha^2-y^2}{y}d\mu(y), \tag{4.4}$$

$$V_o(\alpha) = \int_0^{\alpha}yd\mu(y) + \frac{1}{1-\kappa}\int_{\alpha}^{\infty}\left(y-\sqrt{y^2-(1-\kappa^2)\alpha^2}\right)d\mu(y). \tag{4.5}$$

Задача восстановления меры μ по кривой $\mathscr{L}(\mu)$ инвариантна относительно следующего преобразования.

Замечание 2. Пусть две меры μ_1, μ_2 удовлетворяют соотношению $\mu_1(A) = k\mu_2(kA)$ для всех множеств $A \subset \mathbb{R}_+$, где $k \in \mathbb{R}_+$ и $k\cdot A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{k} \in A\}$. Тогда $\mathscr{L}(\mu_1) = \mathscr{L}(\mu_2)$.

Доказательство. Несложно видеть, что

$$V_{w,\mu_1}(\alpha) = \frac{1+\kappa}{2\kappa}\int_0^{\alpha}\frac{\alpha^2-y^2}{y}d\mu_1(y) = \frac{1+\kappa}{2\kappa}\int_0^{\alpha}\frac{\alpha^2-y^2}{y}kd\mu_2(ky) = \frac{1+\kappa}{2\kappa}\int_0^{l}\frac{(k\alpha)^2-(ky)^2}{ky}d\mu_2(ky) =$$

$$= \frac{1+\kappa}{2\kappa}\int_0^{k\alpha}\frac{(k\alpha)^2-(x)^2}{x}d\mu_2(x) = V_{w,\mu_2}(k\alpha).$$

Аналогичное вычисление показывает, что $V_{o,\mu_1}(\alpha) = V_{o,\mu_2}(k\alpha)$. Таким образом, мы установили, что кривая $\mathscr{L}(\mu_1)$ является репараметризацией кривой $\mathscr{L}(\mu_2)$.

5. ЕДИНСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МЕРЫ ПО КРИВОЙ ВЫТЕСНЕНИЯ

Как было отмечено выше, для любой ненулевой меры μ кривая $(V_o(\alpha) + V_w(\alpha), V_w(\alpha))$ является графиком монотонной функции, $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$V_w(\alpha) = G(V_o(\alpha) + V_w(\alpha)), \quad \alpha \geq 0. \tag{5.1}$$

Отметим, что $G(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, так как $V_w(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to \infty$. Кроме того, G является липшицевой функцией с константой Липшица, не превосходящей 1.

Лемма 2. *Функция* G, *заданная соотношением* (5.1), *удовлетворяет следующему условию*:

$$|G(x) - G(y)| \le |x - y| \tag{5.2}$$

для всех $x, y \in [0, +\infty)$.

Доказательство. Поскольку функция $V_w + V_o$ является монотонной биекцией $[0, +\infty)$ на себя, для любых точек $x, y \in [0, +\infty)$ мы можем выбрать два значения $\alpha_1 < \alpha_2$ таких, что $V_w(\alpha_1) + V_o(\alpha_1) = x$ и $V_w(\alpha_2) + V_o(\alpha_2) = y$. Запишем (5.11) для них и подставим первое во второе:

$$G(V_o(\alpha_2) + V_w(\alpha_2)) - G(V_o(\alpha_1) + V_w(\alpha_1)) = V_w(\alpha_2) - V_w(\alpha_1).$$

Так как V_w и V_o не убывают, получаем

$$V_w(\alpha_2) - V_w(\alpha_1) \le (V_w(\alpha_2) - V_w(\alpha_1)) + (V_o(\alpha_2) - V_o(\alpha_1)) = |V_w(\alpha_2) + V_o(\alpha_2) - V_w(\alpha_1) - V_o(\alpha_1)|.$$

Таким образом, имеем

$$G(V_o(\alpha_2) + V_w(\alpha_2)) - G(V_o(\alpha_1) + V_w(\alpha_1)) \le |(V_w(\alpha_2) + V_o(\alpha_2)) - (V_w(\alpha_1) + V_o(\alpha_1))|,$$

что и означает (5.2).

С этого момента мы предполагаем, что мера μ имеет компактный носитель. При этом предположении функция G на некотором луче $[c, +\infty)$ линейна и имеет угловой коэффициент 1.

Определение 3. Мы будем называть функцию, удовлетворяющую этому свойству, *квазилинейной*.

Определение 4. Минимум, среди всех констант c, таких что G линейна с единичным угловым коэффициентом на луче $[c, +\infty)$, мы будем называть *правым концом* G.

Обратная задача заключается в восстановлении меры μ по известной функции G. Для этого мы будем рассматривать (5.1) как нелинейное уравнение на функцию V_w, находить его решение, а затем восстанавливать меру μ по функции V_w.

Отметим, что в предыдущем разделе мы показали, что если мера μ решает уравнение (5.1), то все меры $\mu_k(A) = k\mu(kA)$ также являются решениями. Ниже мы приведем один из способов зафиксировать одну дополнительную численную константу в дополнение к функции G таким образом, чтобы эта пара задавала меру μ однозначно. Первым делом нам понадобится исключить меру μ из уравнения (5.1) и выразить $V_o(\alpha) + V_w(\alpha)$ в терминах $V_w(\alpha)$. Кроме того, в дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\mu \in \mathscr{X}$ *— мера с носителем на интервале* $I \subset (0, +\infty)$, *и* V_w *функция*, *заданная равенством* (4.1). *Тогда* V_w *дифференцируема во всех точках* $s \ge 0$, *которые не являются точечными нагрузками для* μ (*то есть во всех точках* $s \ge 0$ *таких*, *что* $\mu(\{s\}) = 0$), *и*, *более того*,

$$\mu[0, s] = \frac{\kappa}{1 + \kappa}\left[V_w'(s) - \int_0^s \frac{V_w'(t)}{t} dt\right]. \tag{5.3}$$

Доказательство. Доказательство леммы является простым вычислением.

Пусть $\alpha_{\max} > 0$ будет произвольным числом таким, что $\mu[\alpha_{\max}, +\infty) = 0$. Определим

$$R(\alpha) = \sqrt{\alpha_{\max}^2 - (1 - \kappa^2)\alpha^2}.$$

Лемма 4. *Если функции* $V_w(\alpha)$, $V_o(\alpha)$ *удовлетворяют соотношениям* (4.4), (4.5), *то для любой точки* $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$ *выполнено следующее равенство*:

$$\begin{gathered} V_o(\alpha) + V_w(\alpha) = \frac{\kappa}{1 - \kappa^2}(\alpha_{\max} - R(\alpha))V_w(\alpha_{\max}) + \frac{\kappa}{1 - \kappa^2}\left(\frac{\alpha_{\max}^2 + (R(\alpha))^2}{\alpha_{\max}R(\alpha)} - 2\right)V_w(\alpha_{\max}) + \\ + \kappa(1 - \kappa^2)\alpha^4 \int_\alpha^{\alpha_{\max}} \frac{V_w(y)}{y^2(y^2 - (1 - \kappa^2)\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} dy. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения достаточно подставить равенства (4.4) и (4.5) в (5.4).

Теперь подставим равенство (5.4) в (5.1):

$$V_w(\alpha) = G\left(\frac{\kappa}{1-\kappa^2}(\alpha_{\max} - R(\alpha))V_w'(\alpha_{\max}) + \frac{\kappa}{1-\kappa^2}\frac{(\alpha_{\max} - R(\alpha))^2}{\alpha_{\max}R(\alpha)}V_w(\alpha_{\max}) + \right.$$
$$\left. + \kappa(1-\kappa^2)\alpha^4\int_\alpha^{\alpha_{\max}}\frac{V_w(y)}{y^2(y^2-(1-\kappa^2)\alpha^2)^{3/2}}dy\right).$$

Как уже было отмечено, помимо функции G нам необходимо зафиксировать еще один численный параметр, чтобы получить единственное решение уравнения. Предположим, что нам дано число $\alpha_{\max}$ и график функции G на отрезке $[0, V_w(\alpha_{\max}) + V_o(\alpha_{\max})]$. В дальнейшем нам понадобятся значения $V_w(\alpha_{\max})$ и $V_w(\alpha_{\max})$, они могут быть получены из перечисленных выше данных. Из формулы (4.4) несложно видеть, что

$$V_w(\alpha_{\max}) = \frac{(1+\kappa)\alpha_{\max}^2}{2\kappa}\int_0^\infty \frac{1}{y}d\mu(y) - \frac{1+\kappa}{2\kappa}\int_0^\infty y d\mu(y),$$
$$V_o(\alpha_{\max}) = \int_0^\infty y d\mu(y), \quad V_w(\alpha_{\max}) = \frac{(1+\kappa)\alpha_{\max}}{\kappa}\int_0^\infty \frac{1}{y}d\mu(y).$$

Так как значения $V_w(\alpha_{\max}) + V_o(\alpha_{\max})$ и $G(V_w(\alpha_{\max}) + V_o(\alpha_{\max})) = V_w(\alpha_{\max})$ могут быть получены из графика функции G, мы можем восстановить $V_w(\alpha_{\max})$ и $V_w(\alpha_{\max})$ из графика:

$$V_w(\alpha_{\max}) = G(V_w(\alpha_{\max}) + V_o(\alpha_{\max})), \tag{5.5}$$

$$V_w(\alpha_{\max}) = 2\cdot V_w(\alpha_{\max}) + \frac{1+\kappa}{\kappa}V_o(\alpha_{\max}). \tag{5.6}$$

Введем следующее обозначение:

$$h(\alpha) = \frac{\kappa}{1-\kappa^2}(\alpha_{\max} - R(\alpha))V_w'(\alpha_{\max}) + \frac{\kappa}{1-\kappa^2}\frac{(\alpha_{\max} - R(\alpha))^2}{\alpha_{\max}R(\alpha)}V_w(\alpha_{\max}).$$

Используя (5.5) и (5.6) последняя формула может быть преобразована к следующему виду:

$$h(\alpha) = \frac{\kappa}{1-\kappa^2}(\alpha_{\max} - R(\alpha))\left(2G(V_{\max}) + \frac{1+\kappa}{\kappa}(V_{\max} - G(V_{\max}))\right) + \frac{\kappa}{1-\kappa^2}\frac{(\alpha_{\max} - R(\alpha))^2}{\alpha_{\max}R(\alpha)}G(V_{\max}). \tag{5.7}$$

Здесь V_{max} является обозначением для $V_o(\alpha_{\max}) + V_w(\alpha_{\max})$. Таким образом, значение функции G в точке $V_{\max}$ и значение параметра $\alpha_{\max}$ определяют функцию h.

Определим оператор $T : L^\infty(0, \alpha_{\max}) \to L^\infty(0, \alpha_{\max})$:

$$(TV)(\alpha) = \kappa(1-\kappa^2)\alpha^4\int_\alpha^{\alpha_{\max}}\frac{V(y)}{y^2(y^2-(1-\kappa^2)\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}dy. \tag{5.8}$$

Следующая лемма содержит необходимые нам свойства введенного оператора.

Лемма 5. (i). *Оператор $T : L^\infty(0, \alpha_{\max}) \to L^\infty(0, \alpha_{\max})$ удовлетворяет неравенству*

$$\|T\| \le \frac{1-\kappa}{1+\kappa}.$$

Область значений T состоит из функций, непрерывных на отрезке $[0, \alpha_{\max}]$, а значит, его можно рассматривать как оператор из пространства $L^\infty(0, \alpha_{\max})$ в $C(0, \alpha_{\max})$.

(ii). *Пусть $\alpha_{\min} \in (0, \alpha_{\max})$, $I = (\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$. Тогда формула* (5.8) *задает ограниченный оператор из пространства $C(I)$ в $C^1(I)$, а также из пространства $C^1(I)$ в $C^2(I)$.*

Доказательство. (i). Для произвольной функции $V \in L^{\infty}(0,\alpha_{\max})$, и произвольной точки $\alpha \in (0,\alpha_{\max})$ справедливо следующее:

$$|T(V)(\alpha)| \le \kappa(1-\kappa^2)\alpha^4 \int\limits_{\alpha}^{\alpha_{\max}} \frac{|V(y)|}{y^2(y^2-(1-\kappa^2)\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} dy \le \kappa(1-\kappa^2) \int\limits_{1}^{\frac{\alpha_{\max}}{\alpha}} \frac{\|V\|_{\infty}}{x^2(x^2-(1-\kappa^2))^{\frac{3}{2}}} dx \le$$

$$\le \kappa(1-\kappa^2)\|V\|_{\infty}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x^2-(1-\kappa^2))^{\frac{3}{2}}} = \kappa(1-\kappa^2)\frac{2-(1-\kappa^2)-2\sqrt{1-(1-\kappa^2)}}{\left(1-\kappa^2\right)^2\sqrt{1-(1-\kappa^2)}}\|V\|_{\infty} = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}\|V\|_{\infty}.$$

(ii). Функция

$$K(y,\alpha) = \kappa(1-\kappa^2)\frac{\alpha^4}{y^2(y^2-(1-\kappa^2)\alpha^2)^{3/2}}$$

лежит в пространстве $C^{\infty}\left(\overline{\Delta}\right)$, где $\Delta = \{(x,y)\alpha_{\min} \le x \le y \le \alpha_{\max}\}$. Перепишем оператор T в следующем виде:

$$(TV)(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\alpha_{\max}} V(y)K(y,\alpha)dy.$$

Утверждение (*ii*) следует из элементарных свойств интегрального оператора Фредгольма и дифференцирования последней формулы.

Следующая теорема является главным результатом данного раздела.

Теорема 1. *Пусть G — неотрицательная неубывающая квазилинейная липшицева функция, удовлетворяющая условию* $\mathrm{Lip}(G) \le 1$ *и* $\alpha_{\max}$ *— положительное число. Зададим функцию h равенством* (5.7) *с* $V_{\max}$, *равным правому концу* G. *Тогда существует единственная функция* $V \in L^{\infty}(0,\alpha_{\max})$ *такая, что*

$$V(\alpha) = G(h(\alpha) + (TV)(\alpha))$$

почти всюду на $(0,\alpha_{\max})$.

Доказательство. В этом доказательстве $\|\cdot\|_{\infty}$ будет обозначать норму функции в пространстве $L^{\infty}(0,\alpha_{\max})$. Достаточно доказать, что отображение

$$\psi \mapsto G\circ(h+T\psi) \tag{5.9}$$

является строгим сжатием на $L^{\infty}([0,\alpha_{\max}])$. Из этого, применяя теорему о неподвижной точке сжимающего оператора [12], получаем существование и единственность решения. Для произвольной функции $V_1, V_2 \in L^{\infty}([0,\alpha_{\max}])$, справедливо следующее:

$$\|G\circ(h+TV_1) - G\circ(h+TV_2)\|_{\infty} \le \|h+TV_1-(h+TV_2)\|_{\infty} = \|T(V_1-V_2)\|_{\infty} \le \frac{1-\kappa}{1+\kappa}\|V_1-V_2\|_{\infty}.$$

Здесь первое неравенство обеспечивается предположением $\mathrm{Lip}(G) \le 1$, а второе — утверждением леммы 5. Так как $\frac{1-\kappa}{1+\kappa} < 1$, оператор (5.9) оказывается строгим сжатием, что и завершает доказательство.

Теперь мы докажем, что функция G и значение $\alpha_{\max}$ задают не более чем одну меру μ. Как показано в теореме 1, мы можем единственным образом восстановить функцию V_w, которая удовлетворяет нашему уравнению. Единственность соответствующей меры содержится в следующем утверждении.

Утверждение. *Пусть* $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{X}$ *— меры с носителями на отрезке* $[0,T]$. *Если для всех точек* $\alpha \in [0,T]$ *справедливо*

$$\int\limits_0^{\alpha} t\int\limits_0^{t} \frac{1}{y}d\mu_1(y)dt = \int\limits_0^{\alpha} t\int\limits_0^{t} \frac{1}{y}d\mu_2(y)dt, \tag{5.10}$$

то $\mu_1 = \mu_2$.

Доказательство. Введем вспомогательные обозначения:

$$\mu = \mu_1 - \mu_2; \quad F(t) = t\int_0^t \frac{1}{y}d\mu(y).$$

Из равенства (5.10) следует, что для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}_+$ справедливо

$$\int_0^\alpha F(t)dt = 0,$$

а значит, $F(t) = 0$ почти всюду. Значит, для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено равенство

$$\int_0^t \frac{1}{y}d\mu(y) = 0.$$

Значит, мера $\frac{1}{y}d\mu(y)$ нулевая, и, так как $\frac{1}{y} > 0$, мера μ является нулевой, что и требовалось доказать.

В следующем следствии мы формулируем теорему единственности в терминах мер, а также приводим ее более общую локальную версию.

Следствие. Рассмотрим две меры $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{X}$ и функции G_1 и G_2, графиками которых являются кривые $\mathscr{L}(\mu_1)$ и $\mathscr{L}(\mu_2)$ соответственно. Предположим, что правые концы функций G_1 и G_2 совпадают, равны $V_{\max}$ и соответствуют общему значению $\alpha_{\max}$, а также существует точка $V_0 \in [0, V_{\max})$ такая, что $G_1(s) = G_2(s)$ для всех чисел $s > V_0$. Обозначим через α_0 точку, в которой справедливо равенство $h(\alpha_0) = V_0$. Тогда меры μ_1, μ_2 совпадают на луче $(\alpha_0, +\infty)$. В частности, если $G_1 \equiv G_2$ на $(0, +\infty)$, то $\mu_1 \equiv \mu_2$.

Доказательство. Обозначим через V_1 и V_2 решения из теоремы 1, соответствующие функциям G_1 и G_2 соответственно. Достаточно доказать, что функции V_1 и V_2 совпадают на интервале $(\alpha_0, \alpha_{\max})$. Отметим, что точка $\alpha = 0$ не играет роли в доказательстве леммы 5(i), а значит, если функция f ограниченна на $(\alpha_0, \alpha_{\max})$, то функция Tf определена на интервале $(\alpha_0, \alpha_{\max})$, отображение $\psi \mapsto h + T\psi$ переводит $L^\infty(\alpha_0, \alpha_{\max})$ в себя и является строгим сжатием. Из определения α_0 получаем $h(\alpha) + (T\psi)(\alpha) > V_0$ для произвольной функции $\psi \in L^\infty(\alpha_0, \alpha_{\max})$, $\alpha > \alpha_0$, а значит, $G_1 \circ (h + T\psi) = G_2 \circ (h + T\psi)$ для всех функций $\psi \in L^\infty(\alpha_0, \alpha_{\max})$. Итак, уравнение $\psi = G_1 \circ (T\psi + h)$ имеет единственное решение в $L^\infty(\alpha_0, \alpha_{\max})$. Доказательство этого факта дословно повторяет доказательство теоремы 1, и ограничение функций V_1 и V_2 на интервал $(\alpha_0, \alpha_{\max})$ совпадают с этим решением.

Далее мы приводим интерпретацию нашего результата в терминах, близких к нефтедобывающей индустрии.

Замечание 3. Знание любого из перечисленных пунктов эквивалентно знанию всех:

- распределение длин трубок (μ);
- характеристика вытеснения (G);
- дебиты воды и нефти на добывающей скважине ($\tilde{V}_o$ и $\tilde{V}_w$).

Как демонстрирует следующий пример, предположения теоремы 1 не гарантируют существования положительной меры μ такой, что выполнено (4.1).

Пример. Рассмотрим функцию

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le 2, \\ -1, & 2 < x \le 2 + \frac{1}{100}, \end{cases}$$

и меру $\mu = \rho(x)dx$. Несложно видеть, что функции V_w и V_o, соответствующие мере μ, дифференцируемы, и

$$V_w'(\alpha) = \frac{1+\kappa}{\kappa}\alpha\int_0^\alpha \frac{1}{y}d\mu(y),$$

$$V_o'(\alpha) = (1+\kappa)\alpha\int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{y^2-(1-\kappa^2)\alpha^2}}d\mu(y).$$

А значит, функция V_w не убывает, и функция V_o возрастает на отрезке $\left[0, 2+\frac{1}{100}\right]$, значит, полученная по ним функция G удовлетворяет всем предположениям теоремы 1. Кроме того, ясно, что функция G не может быть получена из положительной меры, так как аргумент единственности из доказательства теоремы 1 так же проходит для меры произвольного знака.

6. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

После доказательства единственности решения уравнения $V(\alpha) = G(h(\alpha) + (TV)(\alpha))$ нас интересует его зависимость от функции G.

Теорема 2. *Пусть $G_{1,2}$ — две неотрицательные неубывающие квазилинейные функции, G_1 — липшицева на луче $[0,+\infty)$ с показателем Липшица $\mathrm{Lip}(G_1) \le 1$, и пусть c_1, c_2 — правые концы G_1, G_2, а $V_{\max}$ — произвольное число, $V_{\max} \ge \max\{c_1, c_2\}$. Зафиксируем произвольное $\alpha_{\max} > 0$, обозначим через h_1, h_2 функции, задаваемые равенством (5.7) для $G = G_1$ и $G = G_2$ соответственно. Более того, пусть V_1 и V_2 удовлетворяют соотношениям*

$$V_1(\alpha) = G_1(h_1(\alpha) + (TV_1)(\alpha)), \tag{6.1}$$

$$V_2(\alpha) = G_2(h_2(\alpha) + (TV_2)(\alpha)). \tag{6.2}$$

Тогда

$$\|V_1 - V_2\|_{L^\infty(0,\alpha_{\max})} \le \frac{1-\kappa}{2\kappa}(\alpha_{\max}+1)\|G_1 - G_2\|_{L^\infty(0,V_{\max})}.$$

Доказательство. Введем следующее обозначение: $\delta = \|G_1 - G_2\|_{L^\infty(0,V_{\max})}$. В этом доказательстве будем обозначать через $\|\cdot\|$ норму в пространстве $L^\infty(0,\alpha_{\max})$. Вычитая равенство (6.2) из (6.1), получаем

$$\|V_1 - V_2\| = \|G_1\circ(h_1 + TV_1) - G_2\circ(h_2 + TV_2)\| \le \|G_1\circ(h_1+TV_1) - G_1\circ(h_2+TV_2)\| +$$
$$+ \|G_1\circ(h_2+TV_2) - G_2\circ(h_2+TV_2)\| \le \|h_1 - h_2\| + \|T(V_1 - V_2)\| + \delta.$$

Используя лемму 5, получаем

$$\|T(V_1 - V_2)\| \le \frac{1-\kappa}{1+\kappa}\|V_1 - V_2\|.$$

Так как $\frac{1-\kappa}{1+\kappa} < 1$, справедливо следующее неравенство:

$$\|V_1 - V_2\| \le \frac{1+\kappa}{2\kappa}(\|h_1 - h_2\| + \delta).$$

Остается оценить норму разности $h_1 - h_2$. Используя неравенство $R(\alpha) \ge \kappa\alpha_{\max}$, получаем

$$|h_1(\alpha) - h_2(\alpha)| \le \frac{\kappa}{1-\kappa^2}(\alpha_{\max} - R(\alpha))\left(\frac{1+\kappa}{\kappa} - 2\right)|G_1(V_{\max}) - G_2(V_{\max})| +$$
$$+ \frac{\kappa}{1-\kappa^2}\frac{(\alpha_{\max} - R(\alpha))^2}{\alpha_{\max}R(\alpha)}|G_1(V_{\max}) - G_2(V_{\max})| =$$

$$= \frac{\kappa}{1-\kappa^2}\left[(\alpha_{\max} - R(\alpha))\frac{1-\kappa}{\kappa} + \frac{(\alpha_{\max} - R(\alpha))^2}{\alpha_{\max}R(\alpha)}\right]|G_1(V_{\max}) - G_2(V_{\max})| \le$$

$$\le \frac{\kappa}{1-\kappa^2}\left(\alpha_{\max}\frac{(1-\kappa)^2}{\kappa} + \frac{(1-\kappa)^2}{\kappa}\right)\delta \le \frac{1-\kappa}{1+\kappa}(\alpha_{\max} + 1)\,\delta.$$

Собирая все вместе, получаем

$$\|V_1 - V_2\| \le \frac{1-\kappa}{2\kappa}(\alpha_{\max} + 1)\,\delta,$$

что завершает доказательство.

Следующее утверждение содержит ключевой в этом разделе технический результат об устойчивости решения интересующего нас уравнения в некоторых функциональных классах.

Утверждение. *Пусть для функций* G_1, G_2 *выполнены все предположения теоремы* 2.

(i). *Пусть* $G_1, G_2 \in C^1[0, V_{\max}]$, *и* ω – *модуль непрерывности функции* G_2'. *Пусть функции* V_1, V_2 *равны нулю на интервале* $(0, \alpha_{\min})$ *для некоторого числа* $\alpha_{\min} > 0$.

Тогда существует константа

$$c = c(\alpha_{\max}, V_{\max}, \alpha_{\min}, \kappa)$$

такая, что

$$\left\|V_1' - V_2'\right\|_{L^\infty(0,\alpha_{\max})} \le c\left(\|G_1 - G_2\|_{C^1(0,V_{\max})} + \omega\left(\|G_1 - G_2\|_{C(0,V_{\max})}\right)\right). \tag{6.3}$$

(ii). *Пусть* G_ϵ, $\epsilon \ge 0$ – *семейство неубывающих квазилинейных липшицевых функций*, $G_\epsilon(0) = 0$, $\mathrm{Lip}(G_\epsilon) \le 1$, *и* $G_\epsilon' \to G_0'$ *в пространстве* $L^1(0, V_{\max})$ *при* $\epsilon \to 0$. *Определим функции* V_ϵ *и* h_ϵ *по* G_ϵ *в соответствии с теоремой* 1 *и* (5.7). *Тогда* $V_\epsilon' \to V_0'$ *в пространстве* $L^1(0, \alpha_{\max})$.

Доказательство. (i). Через $\|\cdot\|$ мы будем обозначать норму в пространстве $L^\infty(0, V_{\max})$, или $L^\infty(0, \alpha_{\max})$, в зависимости от контекста. Доказательство будет схожим с предыдущим, но сначала отметим, что при сделанных предположениях функции $V_{1,2}$ лежат в пространстве $C^1([0, \alpha_{\max}])$ и, дифференцируя уравнения (6.1) и (6.2), получаем

$$\begin{aligned} V_1' - V_2' &= G_1' \circ (h_1 + TV_1)\left(h_1' + \frac{d(TV_1)}{d\alpha}\right) - G_2' \circ (h_2 + TV_2)\left(h_2' + \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right) = \\ &= G_1' \circ (h_1 + TV_1)\left(h_1' + \frac{d(TV_1)}{d\alpha} - \left(h_2' + \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right)\right) + \left[G_1' \circ (h_1 + TV_1) - G_2' \circ (h_1 + TV_1)\right]\times \\ &\times\left(h_2' + \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right) + \left(G_2' \circ (h_1 + TV_1) - G_2' \circ (h_2 + TV_2)\right)\left(h_2' + \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Поочередно оценивая три слагаемых в правой части, получаем

$$\begin{aligned} \left\|V_1' - V_2'\right\| &\le \left\|G_1'\right\|\left(\left\|h_1' - h_2'\right\| + \left\|\frac{d(T(V_1 - V_2))}{d\alpha}\right\|\right) + \left\|G_1' - G_2'\right\|\left\|h_2' + \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right\| + \\ &+ \left\|G_2' \circ (h_1 + TV_1) - G_2' \circ (h_2 + TV_2)\right\|\left\|h_2' + \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right\| \le \left\|h_1' - h_2'\right\| + \left\|\frac{d(T(V_1 - V_2))}{d\alpha}\right\| + \\ &+ \left\|G_1' - G_2'\right\|\left\|h_2' + \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right\| + \omega(\|h_1 - h_2\| + \|TV_1 - TV_2\|)\left\|h_2' + \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right\|. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\left\|G_1'\right\| \le 1$, следующим из леммы 2.

Теперь оценим три слагаемых в правой части (6.5) по отдельности. В соответствии с леммой 5 найдется константа c_1 такая, что

$$\|TV_1 - TV_2\| \le c_1\|V_1 - V_2\|, \quad \left\|\frac{d(TV_1)}{d\alpha} - \frac{d(TV_2)}{d\alpha}\right\| \le c_1\|V_1 - V_2\|,$$

и $\left\|\dfrac{d(TV_2)}{d\alpha}\right\| \le c_1 V_{\max}$.

Используя (5.7), представим функцию h в виде

$$h(\alpha) = p(\alpha)V_{\max} + q(\alpha)G(V_{\max}),$$

где функции $p, q \in C^{\infty}([\alpha_{\min}, \alpha_{\max}])$ не зависят от G. Несложно видеть, что найдется константа c_2 такая, что

$$\|h_1 - h_2\| \le c_2\|G_1 - G_2\|, \quad \left\|h_1' - h_2'\right\| \le c_2\|G_1 - G_2\|,$$

и $\left\|h_2'\right\| \le c_2$.

Объединяя эти оценки и (6.5), а также используя субаддитивность модуля непрерывности и неравенство

$$\|V_1 - V_2\| \le c_3\|G_1 - G_2\|$$

для некоторой константы c_3 по теореме 2, мы получаем (6.3).

(ii) При доказательстве этого пункта нам понадобится

Лемма 6. *Пусть для всех достаточно маленьких чисел* $\epsilon \ge 0$ *функция* φ_ϵ *является* C^1 *— диффеоморфизмом интервала* I, *и* $\varphi_\epsilon \to \varphi_0$, $\varphi_\epsilon^{-1} \to \varphi_0^{-1}$ *в* $C^1(I)$. *Тогда для произвольной функции* $f \in L^1(I)$, *композиция* $f \circ \varphi_\epsilon$ *определена, лежит в пространстве* $L^1(I)$, *и*

$$\| f \circ \varphi_0 - f \circ \varphi_\varepsilon \|_{L^1(I)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Доказательство. Утверждение леммы моментально следует из аналогичного утверждения для $f \in C^{\infty}(I)$ и плотности $C^{\infty}(I)$ в $L^1(I)$.

Теперь закончим доказательство утверждения. Для этого нам достаточно оценить L^1 норму разности $V_\epsilon - V_0$. Рассуждая так же, как в доказательстве предыдущего пункта, мы сможем оценить первые два слагаемых в правой части выражения (6.4). Для оценки последнего слагаемого нам необходимо доказать, что

$$\left\|(G_0' \circ (h_\epsilon + TV_\epsilon) - G_0' \circ (h_0 + TV_0))\left(h_0' + \frac{d(TV_0)}{d\alpha}\right)\right\|_{L^1(0,\alpha_{\max})} \to 0.$$

Так как функция $\left(h_0' + \dfrac{d(TV_0)}{d\alpha}\right)$ ограничена, достаточно доказать, что

$$\left\|G_0' \circ (h_\epsilon + TV_\epsilon) - G_0' \circ (h_0 + TV_0)\right\|_{L^1(0,\alpha_{\max})} \to 0.$$

Последнее следует из леммы 6, что и завершает доказательство утверждения.

Следующая теорема является главным результатом об устойчивости решения в нашей работе.

Теорема 3. (i). *Пусть* μ_1, μ_2 *— две меры с компактными носителями, лежащими в отрезке* $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, $\alpha_{\min} > 0$. *Обозначим через* V_1, V_2 *функции, заданные равенством* (4.1) *с* $\mu = \mu_1$ *и* $\mu = \mu_2$ *соответственно. Предположим, что* $G_1, G_2 \in C^1[0, V_{\max}]$, *и обозначим за* ω *модуль непрерывности функции* G_2'. *Тогда*,

$$\sup_{x \le \alpha_{\max}} \|\mu_1[0,x] - \mu_2[0,x]\| \le c\left(\|G_1 - G_2\|_{C^1(0,V_{\max})} + \omega\left(\|G_1 - G_2\|_{C(0,V_{\max})}\right)\right)$$

для некоторой константы

$$c = c(\alpha_{\max}, V_{\max}, \alpha_{\min}, \kappa). \tag{6.6}$$

(ii). *Пусть* μ_ε, $\epsilon \geq 0$ — *семейство мер с носителями на отрезке* $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, $\alpha_{\min} > 0$. *Обозначим через* V_ϵ *и* G_ϵ *соответствующие им функции, заданные равенствами* (4.1), (5.1) *с* $\mu = \mu_\epsilon$. *Предположим, что* $G'_\epsilon \to G'_0$ *в пространстве* $L^1(0, V_{\max})$ *при* $\epsilon \to 0$. *Тогда имеем*

$$\int_0^{\alpha_{\max}} |\mu_\varepsilon[0,x] - \mu_0[0,x]| dx \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0.$$

Доказательство. Применяя формулу (5.3) к мерам из формулировки теоремы, вычитая результаты и используя утверждение 6, получаем требуемое.

Отметим, что константа c в (6.6) может быть вычислена явно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.* Theory of Fluid Flows through Natural Rocks. Dordrecht: Kluwr Academic, 1990.
2. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. New York: Elsevier, 1972.
3. *Sahimi M.* Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock. Weinheim: Wiley, 2011.
4. *Rajaram H., Ferrand L.A., Celia, M.A.* Prediction of relative permeabilities for unconsolidated soils using pore-scale network models // Water Resources Research. 1997. V. 33. P. 43–52.
5. *Chu J., Engquist B., Prodanovic M., Tsai R.* A multiscale method coupling network and continuum models in porous media I: steady-state single phase flow // Multiscale Modeling & Simulation. 2012. V. 10. P. 515–549.
6. *Datta-Gupta A., King M. J.* Streamline Simulation: Theory and Practice. Society of Petroleum Engineers, 2007.
7. *Dykstra H., Parsons R.* The Prediction of Oil Recovery by Water Flood, Secondary Recovery of Oil in the United States, 2nd ed. American Petroleum Institute, 1950.
8. *Buckley S., Leverett M.* Mechanism of fluid displacement in sands // Trans. AIME. Society of Petroleum Engineers. 1942. V. 146. P. 107–116.
9. *Stone H.L.* Probability model for estimating three-phase relative permeability // J. Petroleum Technology. 1970. V. 22. P. 214–218.
10. *Stone H.L.* Estimation of three-phase relative permeability and residual oil data // J. Can. Pet. Tech. 1973. V. 12. P. 53–62.
11. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences. 1958. V. 245. P. 312–329.
12. *Simon B., Reed M.* Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis Volume 1. New York: Academic Press, 1981.