ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 3, с. 534–546

УДК 519.6:519.8

СИНТЕЗ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НА ОСНОВЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

© 2020 г. Я. И. Рабинович

119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

e-mail: jacrabin@rambler.ru

Поступила в редакцию 13.06.2019 г.
Переработанный вариант 07.10.2019 г.
Принята к публикации 18.11.2019 г.

Для построения численных методов аппроксимации множества Парето используется предложенная в работе [1] универсальная вычислительная процедура. Численные методы разработаны на основе предположений, необходимых для доказательства сходимости универсальной процедуры к множеству Парето. Библ. 4.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, множество Парето, численные методы, универсальная процедура.

DOI: 10.31857/S0044466920030151

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была развита методология решения задач многокритериальной оптимизации в рамках универсальной вычислительной процедуры, позволяющей использовать существующие численные методы скалярной оптимизации для аппроксимации множества Парето. Без предъявления дополнительных требований к вектору частных критериев эффективности и множеству допустимых решений, универсальная процедура используется в настоящей работе как инструмент разработки численных методов построения множества Парето.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в s-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^s$ определена m-мерная непрерывная вектор-функция

$$w(x) \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

образующая вектор частных критериев эффективности, принимающий на непустом компактном множестве допустимых решений (допустимом множестве)

$$X \subset \mathbb{R}^s \tag{2}$$

положительные значения, $w(x) > 0$, так что справедливы соотношения

$$\begin{gathered} w(x) \in w(X) \subset \operatorname{int}\mathbb{R}^m_+, \\ w(X) = \left\{u \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, u = w(x),\, x \in X\right\}, \quad \mathbb{R}^m_+ = \left\{u \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, u \geq 0\right\}, \end{gathered} \tag{3}$$

и, следовательно, множество достижимых векторных оценок $w(X)$ из (3) принадлежит внутренности $\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+$ неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^m_+$. Без ограничения общности будем полагать, что каждый частный критерий эффективности из набора

$$\{w_k(x)\}_{k \in I},\; I = \{k \,|\, 1 \leq k \leq m\} \tag{4}$$

желательно увеличивать на множестве допустимых решений $X \subset \mathbb{R}^s$.

Определение 1. Векторная оценка $w \in w(X)$ *эффективна (слабо эффективна)*, если для всякой векторной оценки $u \in w(X)$ система неравенств $u \geq w$ несовместна при условии, что хотя бы одно неравенство строгое (все неравенства строгие).

Векторная оценка $w \in w(X)$ *доминируема* или *определенно неэффективна*, если существует векторная оценка $u \in w(X)$, $u > w$.

Всякое допустимое решение $x \in X$, доставляющее эффективное (слабо эффективное, доминируемое) значение вектора $w(x)$, называется эффективным (слабо эффективным, доминируемым) решением.

В согласии с определением 1, эффективная векторная оценка слабо эффективна, достижимая векторная оценка $w \in w(X)$ либо слабо эффективна, либо доминируема, множества эффективных (X_e), слабо эффективных (X_0) и доминируемых (X_∂) решений из множества допустимых решений (X) подчиняются соотношениям

$$X_e \subset X_0 \subset X, \quad X_0 \cap X_\partial = \varnothing, \quad X = X_0 \cup X_\partial,$$

а множества $w(X_e)$, $w(X_0)$, $w(X_\partial)$, $w(X)$ – эффективных, слабо эффективных, доминируемых и достижимых векторных оценок удовлетворяют соотношениям

$$w(X_e) \subset w(X_0) \subset w(X), \quad w(X_0) \cap w(X_\partial) = \varnothing, \quad w(X) = w(X_0) \cup w(X_\partial), \tag{5}$$

где $\varnothing$ – пустое множество, $\cup$ ($\cap$) – символ объединения (пересечения) множеств.

В качестве решения задачи многокритериальной оптимизации будем рассматривать множество Парето (множество эффективных векторных оценок $w(X_e)$), причем методы аппроксимации множества $w(X_e)$ разрабатываются на базе универсальной вычислительной процедуры [1].

В дальнейшем потребуются следующие определения.

Определение 2. Если $\|v\|$ – норма вектора $v \in \mathbb{R}^m$, то величина

$$D(W,U) = \sup_{w \in W} \inf_{u \in U} \|w - u\|, \quad \varnothing \neq W, \quad U \subset \mathbb{R}^m,$$

называется *отклонением* множества W от множества U, а величина

$$\Delta(W,U) = \max\{D(W,U), D(U,W)\}, \quad \varnothing \neq W, \quad U \subset \mathbb{R}^m,$$

называется *расстоянием по Хаусдорфу* между множествами W и U.

Определение 3. Величина

$$d(w,u) = \max_{1 \leq k \leq m} |w_k - u_k|$$

называется *расстоянием по Чебышёву* между точками $w, u \in \mathbb{R}^m$.

Определение 4. Заданная на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^s$ функция f называется:

вогнутой на A, если для любых $x, y \in A$, $\rho \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(\rho y + (1-\rho)x) \geq \rho f(y) + (1-\rho) f(x);$$

квазивогнутой на A, если для любых $x, y \in A$, $\rho \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(\rho y + (1-\rho)x) \geq \min\{f(y), f(x)\}.$$

Дифференцируемая на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^s$ функция f называется *псевдовогнутой* на A, если для любых $x, y \in A$ неравенство

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq 0$$

влечет неравенство $f(x) \geq f(y)$, где ∇f – градиент функции f, $\langle a,b \rangle$ – скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^s$.

Определение 5. Заданная на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^s$ функция f называется *ω-вогнутой* на A, если для любых фиксированных $x, y \in A$ при условии $f(y) \geq f(x)$ можно указать величину $\omega = \omega(x, y) \in (0,1]$ такую, что для любого $\rho \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(\rho y + (1-\rho)x) \geq \rho\omega f(y) + (1-\rho\omega) f(x).$$

Функция f называется *выпуклой* (*квазивыпуклой, псевдовыпуклой,* ω-выпуклой) на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^s$, если функция $-f$ вогнута (квазивогнута, псевдовогнута, ω-вогнута) на A.

В согласии с [2] определения 1–4 являются стандартными. Определение 5 при $\omega \equiv 1$ совпадает с определением вогнутой функции, а в предельном случае $\omega \equiv 0$ – с определением квазивогнутой функции; каждая вогнутая, псевдовогнутая, ω-вогнутая функция квазивогнута. Отметим, что операции суммирования и взятия минимума (максимума) сохраняет свойство ω-вогнутости (выпуклости) функций. Следующая лемма устанавливает связь меду ω-вогнутыми и псевдовогнутыми функциями.

Лемма 1. 1. *Если функция f дифференцируема и ω-вогнута на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^s$, то она псевдовогнута на A.*

2. *Если функция f псевдовогнута на выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^s$, то она ω-вогнута на A.*

Доказательство. 1. Предположим от противного, что для некоторой пары точек $x, y \in A$, $x \neq y$ выполняется соотношение

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq 0, \quad f(y) > f(x).$$

Тогда для любой точки

$$z = x + \rho(y - x) \in A, \quad \rho \in (0,1),$$

справедливо утверждение

$$\frac{f(z) - f(x)}{\rho} \leq \frac{o(\rho)}{\rho},$$

и для достаточно малых $\rho = \dfrac{\|z - x\|}{\|y - x\|} > 0$ из-за соотношения $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\|y - x\|}{\|z - x\|}[f(z) - f(x)] \leq \frac{\omega(x, y)}{2}[f(y) - f(x)],$$

что невозможно для ω-вогнутой функции f, поскольку согласно определению 5 заданная выше точка z удовлетворяет неравенству

$$\frac{\|y - x\|}{\|z - x\|}[f(z) - f(x)] \geq \omega(x, y)[f(y) - f(x)],$$

что и доказывает первое утверждение леммы.

2. Предположим от противного, что для некоторой пары точек $x, y \in A$, $f(y) \geq f(x)$ при любом $\omega \in (0,1]$ можно указать точку $z^\omega \in [x, y]$, удовлетворяющую неравенству

$$\|y - x\|[f(z^\omega) - f(x)] < \omega\|z^\omega - x\|[f(y) - f(x)]. \tag{6}$$

Если выполняется хотя бы одно из равенств

$$z^\omega = x, \quad f(y) = f(x),$$

то из неравенства (6) следует утверждение

$$f(z^\omega) < f(x) = \min\{f(x), f(y)\},$$

тогда как ввиду квазивогнутости псевдовогнутой функции f при любых $y \in A_0(x)$, $z^\omega \in [x, y]$ выполняется противоположное соотношение

$$f(z^\omega) \geq \min\{f(x), f(y)\} = f(x).$$

Тем самым с необходимостью из утверждения (1) вытекает утверждение

$$f(y) > f(z^{\omega}) \ge f(x), \quad x \ne y, \quad z^{\omega} \in (x, y],$$
$$\frac{f(z^{\omega}) - f(x)}{\|z^{\omega} - x\|} < \omega \frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|}, \tag{7}$$

где первое неравенство вытекает из (6), поскольку выполняются соотношения

$$0 < \omega, \quad \frac{\|z^{\omega} - x\|}{\|y - x\|} \le 1.$$

Ввиду компактности отрезка $[x, y]$ из произвольной сходящейся последовательности величин

$$\{\omega(t)\}_{t=1}^{\infty} \subset (0,1], \quad \lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0,$$

можно выбрать такую бесконечную подпоследовательность

$$\{\omega(t)\}_{t\in T}, \quad \lim_{t\in T} \omega(t) = 0, \quad T \subset \{1, 2, \ldots\}, \quad |T| = \infty,$$

что последовательность векторов $\left\{z^{\omega(t)}\right\}_{t\in T} \subset (x, y]$ сходится к точке отрезка $[x, y]$:

$$\lim_{t\in T} z^{\omega(t)} = z^* \in [x, y].$$

Если $z^* \ne x$, то переходя в последнем неравенстве *следствия* к пределу по $\omega = \omega(t)$, $t \in T$, с учетом последних двух предельных соотношений можно утверждать

$$f(z^*) < f(x) = \min\{f(x), f(y)\}, \quad z^* \in (x, y],$$

что опять-таки противоречит квазивогнутости псевдовогнутой функции f, так что с необходимостью $z^* = x$. Но тогда утверждение (7) влечет соотношения

$$z^{\omega(t)}, \; y \ne x, \quad \frac{f(z^{\omega(t)}) - f(x)}{\|z^{\omega(t)} - x\|} < \omega(t) \frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|}, \quad t \in T;$$

переходя в последних неравенствах к пределу по $t \in T$, с учетом двух последних предельных соотношений можно утверждать, что выполняется неравенство $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \le 0$. Это, в согласии с определением псевдовогнутой функции, влечет неравенство $f(x) \ge f(y)$, тогда как согласно (7) из неравенства (1) следует противоположное утверждение $f(y) > f(x)$. Из противоречия следует второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Напомним несколько полезных свойств квазивогнутых (и, следовательно, ω-вогнутых) функций.

Лемма 2. 1. *Если заданная на непустом выпуклом множестве $A \subset \mathbb{R}^s$ функция f является квазивогнутой на A, то каждое из ее множеств Лебега*

$$L(f, \beta) = \{x \in A \,|\, f(x) \ge \beta\}, \quad \beta \in \mathbb{R}^1,$$

либо пусто, либо выпукло.

2. *Если функция f непрерывна на непустом компакте A, то каждое из множеств Лебега $L(f, \beta)$ либо пусто, либо компактно.*

Доказательство. 1. Пусть множество $L(f, \beta) \ne \varnothing$. Тогда для любой пары точек $x, y \in L(f, \beta)$, $x \ne y$ и любой точки $z \in (x, y)$ с учетом определения 4 выполняется:

$$f(x) \ge \beta, \quad f(y) \ge \beta, \quad f(z) \ge \min\{f(y), f(x)\} \ge \beta,$$

так что $z \in L(f, \beta)$, что и доказывает первое утверждение леммы.

2. Компактность множеств Лебега функции f непосредственно следует из непрерывности f на компакте A. Лемма доказана.

2. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА

Универсальная вычислительная процедура в работе [1] опирается на ряд неформальных соображений. Для построения множества векторных оценок $w(X_e)$, эффективных по критерию $w(x)$, недостаточно стремиться к увеличению каждого частного критерия из набора (4), поскольку в этом случае достигаются лишь «рекордные» на допустимом множестве X значения каждого из частных критериев, а не множество эффективных векторных оценок в целом. Необходимо, вообще говоря, добиваться увеличения значений частных критериев в каждом *подмножестве* критериев из набора (4), с той лишь оговоркой, что добившись улучшения значений критериев для фиксированного подмножества $\{w_k(x)\}_{k\in M}$, где $\varnothing \neq M \subset I$, можно не беспокоиться о значениях критериев в любом вложенном подмножестве $\{w_k(x)\}_{k\in K}$, $K \subset M$.

Дадим в согласии с [1] строгое описание универсальной процедуры аппроксимации множества эффективных векторных оценок.

На множестве допустимых решений $X \subset \mathbb{R}^s$ строится последовательность множеств $\{X_t\}_{t=1}^{\infty} \subset X$, где по-прежнему X – непустое компактное множество. Если $X_1 \subset X$ – произвольное начальное приближение (например, оно может включать единственное допустимое решение $x^1 \in X$, так что $X_1 = \{x_1\}$), и известно множество X_t, $t \geq 1$, то следующее за ним множество X_{t+1} подчиняется соотношениям

$$X_{t+1} = \bigcup_{x\in X_t} X_{t+1}(x), \quad X_{t+1}(x) = \{x\} + \bigcup_{J\in \mathcal{M}_t(x)} \{h(x,J)\} \subset X, \tag{8}$$

где $A + B$ – векторная сумма множеств $A, B \subset \mathbb{R}^s$.

В согласии с соотношениями (8) всякая опорная точка $x \in X_t$ порождает на следующем $t+1$-м уровне непустую векторную сумму множеств $X_{t+1}(x)$, причем направление $h(x,J)$ перехода из опорной точки $x \in X_t$ в следующую точку $y = x + h(x,J) \in X_{t+1}(x)$, $J \in \mathcal{M}_t(x)$ удовлетворяет условиям

$$h(x,\varnothing) = 0, \quad h(x,J) \neq 0, \quad \varnothing \neq J \subset I = \{k \,|\, 1 \leq k \leq m\}, \tag{9}$$

где ненулевые направления $h(x,J) \neq 0$ подчиняются соотношениям

$$\begin{gathered} y = x + h(x,J) \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon), \quad \varnothing \neq J \subset I = \{k \,|\, 1 \leq k \leq m\}, \\ Y_J(x,\varepsilon) = \left\{ y \in \mathbb{R}^s \,\middle|\, \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \geq 1 + \sigma\varepsilon^2,\ k \in J,\ \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \geq 1 - \sigma\varepsilon,\ k \in I\backslash J \right\}, \\ Y(x,\varepsilon) = \left\{ y \in \mathbb{R}^s \,\middle|\, \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \leq 1 + \sigma\varepsilon,\ k \in I \right\}, \\ \varepsilon = \varepsilon_t(x) \in (0,1), \quad \sigma = \left[2 \max_{z\in X} \sum_{k\in I} w_k(z) \right]^{-1} \min_{z\in X} \min_{k\in I} w_k(z) \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \end{gathered} \tag{10}$$

Последовательность множеств (8) в каждой опорной точке $x \in X_t$ ветвится, причем степень ее ветвления $|\mathcal{M}_t(x)|$ определяет множество не вложенных друг в друга подмножеств $\mathcal{M}_t(x) \subset 2^I$, заданное соотношениями

$$\begin{gathered} \mathcal{M}_t(x) = \begin{cases} \mathcal{N}_t(x), & \text{если} \quad \mathcal{N}_t(x) \neq \varnothing, \\ \{\varnothing\}, & \text{если} \quad \mathcal{N}_t(x) = \varnothing, \end{cases} \\ \mathcal{N}_t(x) = \left\{ J \subset I \,\middle|\, \begin{array}{l} X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon) \neq \varnothing, \\ X \cap Y_M(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon) = \varnothing, \quad M \neq J \subset M \subset I \end{array} \right\}. \end{gathered} \tag{11}$$

Наибольшая степень ветвления последовательности (8) совпадает с наибольшим числом не вложенных друг в друга подмножеств множества номеров частных критериев эффективности $I = \{k \mid 1 \le k \le m\}$, так что

$$|\mathcal{M}_t(x)| \le \frac{m!}{\lfloor m/2 \rfloor!(m - \lfloor m/2 \rfloor)!},$$

где $|A|$ — количество элементов в конечном множестве A, $\lfloor z \rfloor$ — целая часть числа z.

Соотношения (10), (11) включают величину $\varepsilon = \varepsilon_t(x) \in (0,1)$ — параметр возмущения, который в начальной точке x^1 и в любых соседних точках $x^t \in X_t$, $x^{t+1} \in X_{t+1}(x^t)$ последовательности (8) таких, что

$$x^{t+1} = x^t + h(x^t, J_t), \quad J_t \in \mathcal{M}_t(x), \tag{12}$$

удовлетворяет условиям

$$\varepsilon_1(x^1) = \kappa \in (0,1), \quad \varepsilon_{t+1}(x^{t+1}) = \begin{cases} \kappa\varepsilon_t(x^t), & \text{если} \quad Q_t = \varnothing, \\ \varepsilon_t(x^t), & \text{если} \quad Q_t \ne \varnothing, \end{cases}$$
$$Q_t = \bigcap_{q \le t, \varepsilon_q(x^q) = \varepsilon_t(x^t)} J_q, \tag{13}$$

где величина κ определяет степень дробления параметра возмущения. Эта величина может быть выбрана любой на интервале $(0,1)$, но является фиксированной на протяжении всей вычислительной процедуры.

Замечание 1. Прокомментируем процедуру (8)–(13).

В согласии с соотношениями (9), (10) последовательность (8) определена таким образом, что переход из опорной точки $x \in X_t$ по ненулевому направлению $h(x,J)$, $J \in \mathcal{M}_t(x)$ в новую опорную точку $y = x + h(x,J) \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon)$ обеспечивает следующие результаты:

благодаря включению $y \in Y_J(x,\varepsilon)$ достигается относительное (порядка ε^2) *увеличение* значений критериев из множества $\{w_k\}_{k \in J}$ за счет возможного относительного *уменьшения* (на величину порядка ε) значений остальных критериев $\{w_k\}_{k \in I \setminus J}$;

включение $y \in Y(x,\varepsilon)$ препятствует слишком резкому росту значений критериев из выделенного множества (18), что является существенным *на поздних* этапах вычислительной процедуры, не позволяя переходить от одной эффективной векторной оценки к другой и возвращаться обратно, через все множество достижимых векторных оценок;

соотношения (11) позволяют ограничиться теми ненулевыми направлениями $h(x,J)$, $J \in \mathcal{M}_t(x)$, для которых соответствующие множества улучшаемых на величину порядка ε^2 частных критериев $\{w_k\}_{k \in J}$ невозможно пополнить, что также существенно *на поздних* этапах вычислительной процедуры, поскольку препятствует слишком резкому увеличению числа опорных точек $|X_t|$;

соотношения (12), (13) обеспечивают дробление параметра возмущения ε, если невозможно относительное увеличение (на величину порядка ε^2) хотя бы одного из улучшаемых на предыдущих этапах частных критериев. Поскольку непрерывные критерии на компакте $X \subset \mathbb{R}^s$ ограничены, для всякой последовательности решений

$$\{x^t\}_{t=1}^{\infty}, \quad x^{t+1} \in X_{t+1}(x^t) \subset X, \quad t = 1, 2, \ldots$$

соответствующие значения параметра возмущения $\varepsilon_t(x^t)$ с ростом t стремятся к нулю.

В согласии с [1] можно утверждать, что последовательность множеств $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$, заданная соотношениями (8)–(13), аппроксимирует множество эффективных векторных оценок в следующем смысле.

Теорема 1. *Если вектор-функция $w(x) \in \mathbb{R}^m$ положительно определена, удовлетворяет условию Липшица и ω-вогнута на непустом выпуклом компакте X, то отклонение множества эффективных векторных оценок $w(X_e)$ от аппроксимирующего множества $w(X_t)$ и отклонение множества $w(X_t)$ от множества слабо эффективных векторных оценок $w(X_0)$ стремятся к нулю с ростом номера аппроксимаций t:*

$$\lim_{t\to\infty} D(w(X_e), w(X_t)) = \lim_{t\to\infty} D(w(X_t), w(X_0)) = 0.$$

Следствие 1. Если множества эффективных и слабо эффективных векторных оценок совпадают, $w(X_e) = w(X_0)$, то в согласии с определением 2 последовательность аппроксимаций $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$ сходится к множеству $w(X_e)$ в метрике Хаусдорфа.

3. ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДА

Универсальная процедура (8)–(13) не содержит точного рецепта построения аппроксимирующей последовательности $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$, поскольку для каждого непустого подмножества $J \in \mathcal{M}_t(x)$ не дает прямого указания, в какую именно “подходящую” опорную точку $y = x + h(x, J) \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon)$ следует переходить из исходной опорной точки $x \in X_t$.

Процедура (8)–(13) становится реальной вычислительной процедурой (численным методом), если она дополнена *правилом выбора*

а) начальной точки $x^1 \in X$ (либо множества начальных точек $X_1 \subset X$, $|X_1| > 1$, если в работе численного метода предусмотрен мультистарт);

б) каждой последующей опорной точки $y \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon)$.

Подчеркнем, что сходимость вычислительной процедуры (8)–(13) сохраняется, если правило выбора меняется от этапа к этапу процедуры.

Нашей целью является правило выбора, не требующее выдвижения дополнительных (по сравнению с формулировкой теоремы 1) предположений о характере вектор-функции $w(x)$ и множества допустимых решений X.

В согласии с утверждением теоремы 1, сходимость численных методов на основе универсальной процедуры обеспечена при старте из любых точек допустимого множества X . Вместе с тем эффективность численного метода может зависеть от состава начального множества $X_1 \subset X$, причем для конкретизации подобного множества приходится учитывать неформальные соображения.

Как было указано в замечании 1, при выборе новой опорной точки не все требования не являются существенными на начальном этапе вычислительной процедуры. Тем самым для формирования начального приближения X_1 можно использовать упрощенный вариант процедуры (8)–(13), где вместо требований (10) предъявляются требования

$$\begin{gathered} y = x + h(x, J) \in X \cap Y_J(x,\varepsilon), \quad \varnothing \neq J \subset I = \{k \mid 1 \le k \le m\}, \\ Y_J(x,\varepsilon) = \left\{ y \in \mathbb{R}^s \,\middle|\, \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \ge 1 + \sigma\varepsilon^2,\ k \in J,\ \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \ge 1 - \sigma\varepsilon,\ k \in I \backslash J \right\}, \\ \varepsilon_t(x) \in (0,1), \quad \sigma = \left[2 \max_{z\in X} \sum_{k\in I} w_k(z) \right]^{-1} \min_{z\in X} \min_{k\in I} w_k(z) \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \end{gathered} \tag{10a}$$

чем отменяются ограничения сверху на приращения частных критериев $\{w_k\}_{k\in J}$, тогда как множество подмножеств в (11) приобретает вид

$$\mathcal{M}_t(x) = \{J \subset I \mid \varnothing \neq J,\ X \cap Y_J(x,\varepsilon) \neq \varnothing\}, \tag{11a}$$

и содержит все такие непустые подмножества J множества $I = \{k \mid 1 \le k \le m\}$, что каждый из частных критериев $\{w_k\}_{k \in J}$ допускает относительное (порядка ε^2) увеличение значения. Сформулируем следующее

Правило выбора начального приближения.

Чтобы с помощью упрощенной процедуры (8), (9), (10a), (11a), (12), (13) генерировать начальное приближение X_1, нужно уметь в соотношениях (10a) указать следующую за опорной точкой $x \in X$ опорную точку $y \in X \cap Y_J(x,\varepsilon)$. Для этого достаточно отыскать экстремум вспомогательной функции

$$\varphi_0(z) = \|z - x\|, \quad z \in X, \tag{14}$$

где φ_0 – евклидово расстояние между фиксированным опорным решением $x \in X$ и произвольным допустимым решением $z \in X$.

В самом деле, в предположениях теоремы 1 вместе с функциями $w_k(y)$ каждая из функций $[w_k(x)]^{-1} w_k(y)$ является положительной, непрерывной и ω-вогнутой по переменным y на выпуклом компакте X, так что в согласии с леммой 2 заданные соотношениями (10), (10a) множества

$$Y_J(x,\varepsilon), \quad J \subset I = \{k \mid 1 \le k \le m\}$$

замкнуты и выпуклы, а согласно (11a) каждое пересечение множеств

$$X \cap Y_J(x,\varepsilon), \quad J \in \mathcal{M}_t(x),$$

является непустым выпуклым компактом. В согласии с (10), (10a) опорная точка $x \notin Y_J(x,\varepsilon)$, так что проекция

$$y = \arg \min_{z \in X \cap Y_J(x,\varepsilon)} \|x - z\| \tag{15}$$

внешней опорной точки $x \in X$ на выпуклый компакт $X \cap Y_J(x,\varepsilon) \ne \varnothing$ существует, единственна и удовлетворяет условиям $y \in X \cap Y_J(x,\varepsilon)$, $y \ne x$, так что ее можно использовать в соотношениях (10a) в качестве следующей опорной точки.

Задача отыскания следующей опорной точки y согласно (15) сводится к задаче выпуклого программирования: отысканию минимума выпуклой квадратичной функции на непустом выпуклом компакте,

$$\varphi_0(z)^2 = \|z - x\|^2 \xrightarrow[z \in X \cap Y_J(x,\varepsilon)]{} \min.$$

Если возможна линейная аппроксимация выпуклого компакта “изнутри”, когда в него вписан непустой выпуклый многогранник $Z \subset X \cap Y_J(x,\varepsilon)$, следующей опорной точкой в соотношениях (10a) может быть выбрана проекция

$$y = \arg \min_{z \in Z} \|x - z\| \in Z$$

опорной точки $x \in X$ на выпуклый многогранник Z, так что поиск следующей опорной точки сводится к решению задачи квадратичного программирования, которое может быть получено (см. [3]) за конечное число арифметических действий.

По упрощенной процедуре через несколько шагов (количество которых определяется спецификой решаемой многокритериальной задачи) будет построено начальное приближение X_1. В согласии с соотношениями (10a), (11a) его образ в пространстве критериев $\mathbb{R}^m$ – множество $w(X_1)$ – может представлять собой грубую аппроксимацию множества Парето по всему “фронту”, если упрощенная процедура стартует при достаточно малом $\kappa \in (0,1)$ из доминируемой точки $x^1 \in X \backslash X_0$, $w(x^1) \in \operatorname{int} w(X)$.

Предположим, что вычислительная процедура (8)–(13) стартовала из конкретной опорной точки начального множества X_1. В согласии с соотношениями (10) на каждом шаге процедуры с номером $t \geq 1$ необходимо определить следующую за опорной точкой $x \in X_t$ новую опорную точку $y \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon)$, где каждое из множеств

$$X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon), \varnothing \neq J \subset I = \{k \mid 1 \leq k \leq m\} \tag{16}$$

компактно, поскольку является пересечением выпуклого компакта $X \cap Y_J(x,\varepsilon)$ с замкнутым множеством $Y(x,\varepsilon)$, но не выпукло, поскольку $Y(x,\varepsilon)$, вообще говоря, не является выпуклым; более того, пересечение множеств (16) в общем случае не является связным множеством.

Таким образом, если допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^s$ задано функциональными ограничениями, поиск подходящей опорной точки $y \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon)$ может быть сведен к решению системы нелинейных неравенств общего вида.

Другой подход к выбору опорной точки из множества (16) связан с поиском экстремума некоторой вспомогательной функции.

Если выбрана функция (14), то согласно (11) при условии $J \in \mathcal{M}_t(x)$ пересечение множеств (16) не пусто, проекция

$$y = \arg \min_{z \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon)} \|x - z\| \tag{17}$$

внешней опорной точки $x \in X$ на непустой компакт $X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon)$ существует, удовлетворяет условиям

$$y \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon), \quad y \neq x,$$

и ее можно использовать в соотношениях (10) в качестве следующей опорной точки. Однако проекция (17) может быть не единственна, и ее определение является более трудной задачей, чем задача (15) – проектирование внешней точки на выпуклый компакт.

Прежде чем перейти к рассмотрению вспомогательных функций, отличных от (14), заметим, что образ множества (16) в пространстве критериев $\mathbb{R}^m$ существенно упрощается, если к заданному в (1) векторному критерию $w \in \mathbb{R}^m$ применить следующее линейное преобразование:

$$u(y) = \frac{1}{\sigma\varepsilon(1-\varepsilon)} \sum_{k \in J} \left(\frac{w_k(y)}{w_k(x)} - 1 - \sigma\varepsilon^2 \right) e^k + \frac{1}{2\sigma\varepsilon} \sum_{k \in I \setminus J} \left(\frac{w_k(y)}{w_k(x)} - 1 + \sigma\varepsilon \right) e^k \in \mathbb{R}^m, \tag{18}$$

где опорная точка $x \in X$ и непустое подмножество $J \subset I = \{k \mid 1 \leq k \leq m\}$ фиксированы. В согласии с преобразованием (18) каждая из функций $u_k(y)$ непрерывна и ω -вогнута вместе с функциями $w_k(y)$.

В согласии с определениями (10), (18) задающие пересечение (16) множества приобретают вид

$$Y_J(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^s \mid u(y) \geq 0\}, \quad \varnothing \neq J \subset I, \quad Y(x,\varepsilon) = \left\{ y \in \mathbb{R}^s \,\middle|\, u(y) \leq \sum_{k=1}^m e^k \right\}. \tag{19}$$

Тем самым преобразование (18) переводит заданные соотношениями (10) многогранные множества

$$w(Y_J(x,\varepsilon)) = \left\{ (1+\sigma\varepsilon^2) \sum_{k \in J} w_k(x) e^k + (1-\sigma\varepsilon) \sum_{k \in I \setminus J} e^k w_k(x) \right\} + \mathbb{R}^m_+,$$
$$w(Y(x,\varepsilon)) = (1+\sigma\varepsilon) w(x) - \mathbb{R}^m_+$$

в неотрицательный ортант и многогранное множество

$$u(Y_J(x,\varepsilon)) = \mathbb{R}^m_+, \quad u(Y(x,\varepsilon)) = \left\{ \sum_{k=1}^m e^k \right\} - \mathbb{R}^m_+ \tag{20}$$

соответственно, а их пересечение, m-мерный параллелепипед

$$W_m = w(Y_J(x,\varepsilon)) \cap w(Y(x,\varepsilon))$$

в единичный m-мерный куб

$$U_m = u(Y_J(x,\varepsilon)) \cap u(Y(x,\varepsilon)) = \\ = \mathbb{R}^m_+ \cap \left(\left\{ \sum_{k=1}^{m} e^k \right\} - \mathbb{R}^m_+ \right) = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid 0 \le u_k \le 1, 1 \le k \le m \right\}. \tag{21}$$

В рамках процедуры (8)–(13) для отыскания последующей опорной точки можно сформулировать следующие правила выбора.

Правило 1. В согласии с определением 3 и соотношениями (18)–(21) выберем в качестве вспомогательной неотрицательную непрерывную функцию

$$\varphi_1(z) = \max_{1\le k\le m} u_k(z), \quad z \in X \cap Y_J(x,\varepsilon), \tag{22}$$

т.е. расстояние по Чебышёву между началом координат $0 \in U_m$ и произвольной векторной оценкой $u(z) \in u(X) \cap \mathbb{R}^m_+$, где последнее включение следует из включения $z \in X \cap Y_J(x,\varepsilon)$ согласно утверждению (20).

Задача вычисления чебышевского расстояния между началом координат и пересечением $u(X) \cap \mathbb{R}^m_+$ сводится к отысканию минимума непрерывной функции (22) на выпуклом компакте,

$$\max_{1\le k\le m} u_k(z) \xrightarrow[z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)]{} \min, \tag{23}$$

что позволяет определить на множестве (16) искомую опорную точку $y \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon)$. Об этом свидетельствует

Теорема 2. *Пусть при непустом фиксированном подмножестве* $J \subset \{k \mid 1 \le k \le m\}$ *в опорной точке* $x \in X$ *определено преобразование* (18), *выпуклый компакт* X, *выпуклое замкнутое множество* $Y_J(x,\varepsilon)$ *и замкнутое множество* $Y(x,\varepsilon)$ *заданы соотношениями* (2), (10), (19), *выпуклый компакт* (*единичный куб*) U_m *определен в* (21).

Если неотрицательная величина

$$\min_{z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)} \max_{1\le k\le m} u_k(z) \le 1, \tag{24}$$

то ее доставляет решение y, *удовлетворяющее соотношениям*

$$y = \arg \min_{z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)} \max_{1\le k\le m} u_k(z) \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon). \tag{25}$$

В противном случае выполняется строгое неравенство

$$\min_{z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)} \max_{1\le k\le m} u_k(z) > 1,$$

и пересечение множеств (16) *пусто,*

$$X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon) = \varnothing.$$

Доказательство. Поскольку минимум непрерывной функции $\max\limits_{1\le k\le m} u_k(z)$ на выпуклом компакте $X \cap Y_J(x,\varepsilon)$ достигается, решение

$$y = \arg \min_{z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)} \max_{1\le k\le m} u_k(z) \in X.$$

Согласно определению куба $U_m \subset \mathbb{R}^m_+$ в (21) и расстояния по Чебышёву, для любых векторов $u \in \mathbb{R}^m_+$ справедливы соотношения

$$\max_{1\le k\le m} u_k \le 1, \quad u \in U_m, \\ \max_{1\le k\le m} u_k > 1, \quad u \in \mathbb{R}^m_+ \backslash U_m, \tag{26}$$

так что в согласии с (20), (21) из условия (24) с необходимостью следуют включения

$$u(y) \in U_m, \quad y \in Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon),$$

что с учетом включения $y \in X$, доказывает утверждение (25). Если же утверждение (24) не выполняется, то согласно последнему неравенству в (26) с необходимостью выполняются соотношения

$$u(X) \cap U_m = \varnothing, \quad X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon) = \varnothing,$$

что и доказывает последнее утверждение теоремы. Теорема доказана.

Правило 2. Определим вспомогательную функцию

$$\varphi_2(z) = \max_{1\le k\le m}\left|u_k(z) - \frac{1}{2}\right|, \quad z \in X, \tag{27}$$

т.е. расстояние по Чебышёву между барицентром единичного куба (21), вектором $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e^k \in U_m$, и произвольной векторной оценкой $u(z) \in u(X)$. Тогда в качестве новой опорной точки можно выбрать решение, доставляющее минимум неотрицательной непрерывной функции (27) на выпуклом компакте — множестве допустимых решений X,

$$\max_{1\le k\le m}\left|u_k(z) - \frac{1}{2}\right| \xrightarrow[z\in X]{} \min. \tag{28}$$

Сформулируем этот результат в качестве следствия из доказательства теоремы 2.

Следствие 2. Пусть при некотором непустом фиксированном подмножестве $J \subset \{k \mid 1 \le k \le m\}$ в опорной точке $x \in X$ определено преобразование (18), выпуклые компакты X, $Y_J(x,\varepsilon)$ и компакт $Y(x,\varepsilon)$ заданы соотношениями (2), (10), выпуклый компакт (единичный куб) U_m определен в (21). Тогда при условии

$$\min_{z\in X}\max_{1\le k\le m}\left|u_k(z) - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$$

доставляющее минимум непрерывной функции (27) решение $y \in X$ удовлетворяет включению

$$y = \arg\min_{z\in X}\max_{1\le k\le m}\left|u_k(z)\right| \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon).$$

В противном случае выполняется строгое неравенство

$$\min_{z\in X}\max_{1\le k\le m}\left|u_k(z) - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2},$$

а пересечение множеств (16) пусто,

$$X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon) = \varnothing.$$

Замечание 2. По сравнению с задачей (23) при решении экстремальной задачи (28) не приходится учитывать m функциональных ограничений, определяющих в согласии с (10) множество $Y_J(x,\varepsilon)$. Вместе с тем минимизируемая функция в (23) несколько проще, чем соответствующая функция в (28).

Следует отметить, что множество достижимых векторных оценок $w(X)$ — образ выпуклого допустимого множества X — не обязательно является выпуклым, даже если в качестве частных критериев эффективности используются вогнутые функции (см. [4]). Согласно преобразованию (18) множество $u(X)$ также не выпукло. Вместе с тем всякой векторной оценке $u(x)$ опорного решения $x \in X$ можно сопоставить подмножество

$$V(x) = \{v \in u(X) \mid [u(x), v] \subset u(X)\}, \tag{29}$$

т.е. совокупность точек множества $u(X)$ таких, что их “видно” из точки $u(x)$.

Лемма 3. *Если для некоторого непустого фиксированного подмножества* $J \subset I = \{k \mid 1 \le k \le m\}$ *пересечение множеств* (16) *содержит решение*

$$y \in X \cap Y_J(x,\varepsilon) \cap Y(x,\varepsilon), \quad u(y) \in V(x), \tag{30}$$

где векторная оценка $u(\cdot)$ *и подмножество* $V(\cdot)$ *заданы соотношениями* (18), (29), *то не пусто пересечение отрезка* $[u(x),u(y)]\subset u(X)$ *с одной из граней* U_{mk}, $k\in J$ *единичного куба* U_m,

$$[u(x),u(y)]\cap\bigcup_{k\in J}U_{mk}\neq\varnothing,$$
$$U_{mk}=\{u\in U_m\,|\,u_k=0\},\ 1\le k\le m,\ U_m=\{u\in\mathbb{R}^m\,|\,0\le u_k\le 1,\ 1\le k\le m\}. \tag{31}$$

Доказательство. Из определений (18), (29) и условия (30) следует, что векторные оценки $u(x)$ и $u(y)$ удовлетворяют соотношениям

$$u(x)=\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon}\sum_{k\in J}e^k+\frac{1}{2}\sum_{k\in I\setminus J}e^k,\quad u(y)\ge 0,\quad [u(x),u(y)]\subset u(X).$$

Следовательно, можно указать точку отрезка $v\in[u(x),u(y)]$, удовлетворяющую соотношениям

$$v_k=0,\quad k\in\operatorname{Arg}\min_{k\in J}u_k(y),\quad v_k>0,\quad k\in I\setminus\operatorname{Arg}\min_{k\in J}u_k(y),$$

что и доказывает утверждение (31). Лемма доказана.

Согласно лемме 3, если пересечение множеств (16) содержит хотя бы одно подходящее решение y, образ которого $u(y)$ “виден” из точки $u(x)$, то существует подходящее решение y^J из пересечения (16), образ которого $u(y^J)$ расположен на одной из содержащих 0 граней U_{mk}, $k\in J$, единичного куба U_m.

Правило 3. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi_J(z)=\min_{k\in J}u_k(z),\quad z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon),\quad \varnothing\neq J\subset I. \tag{32}$$

Следующая теорема свидетельствует о том, что в условиях леммы 3 в качестве новой опорной точки можно выбрать решение, доставляющее минимум неотрицательной непрерывной ω-вогнутой функции (32) на выпуклом компакте,

$$\min_{k\in J}u_k(z)\xrightarrow[z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)]{}\min. \tag{33}$$

Теорема 3. *Пусть при непустом фиксированном подмножестве* $J\subset\{k\,|\,1\le k\le m\}$ *в опорной точке* $x\in X$ *определено преобразование* (18), *выпуклый компакт* X, *замкнутое множество* $Y(x,\varepsilon)$ *и выпуклые замкнутые множества* $Y_J(x,\varepsilon)$, U_m *заданы соотношениями* (2), (10), (19), (21), *условие* (30) *леммы* 3 *выполнено.*

Тогда справедливо утверждение

$$Y(x,\varepsilon)\cap\operatorname{Arg}\min_{z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)}\min_{k\in J}u_k(z)\neq\varnothing,$$

так что существует решение

$$y^J=\arg\min_{z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)}\min_{k\in J}u_k(z)\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)\cap Y(x,\varepsilon). \tag{34}$$

Доказательство. В условиях теоремы выполняется неравенство

$$\min_{z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)}\min_{k\in J}u_k(z)\ge 0,$$

поскольку непрерывная функция (32) принимает на компакте $X\cap Y_J(x,\varepsilon)$ неотрицательные значения. Но в согласии с леммой 3 можно указать номер $i\in J$, грань $U_{mi}=\{u\in U_m\,|\,u_i=0\}$ и вектор $v^J\in u(X)\cap U_{mi}$, так что в условиях теоремы прообраз векторной оценки v^J решение y^J удовлетворяет соотношениям

$$y^J\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)\cap Y(x,\varepsilon),\quad u(y^J)\in u(X)\cap U_{mi},$$
$$i\in J,\quad u_i(y^J)=0=\min_{z\in X\cap Y_J(x,\varepsilon)}\min_{k\in J}u_k(z). \tag{35}$$

Следовательно, справедливо утверждение

$$y^J \in \operatorname{Arg} \min_{z \in X \cap Y_J(x,\varepsilon)} \min_{k \in J} u_k(z),$$

что в согласии с первым включением (35) влечет утверждение (34). Теорема доказана.

Замечание 3. Рассмотрим важный частный случай, когда компоненты вектор-функций w, u вогнуты. Но тогда функция (32) вогнута, и ее на выпуклом компакте $X \cap Y_J(x,\varepsilon)$ можно аппроксимировать кусочно-линейной функцией

$$\varphi_J(z) \approx \min_{1 \le q \le Q} \{\langle a_q, z \rangle + b_q\}.$$

Если возможна линейная аппроксимация выпуклого компакта “изнутри”, когда в него вписан непустой выпуклый многогранник $Z \subset X \cap Y_J(x,\varepsilon)$, то ввиду перестановочности минимумов задача поиска новой опорной точки (33) приближенно сводится к решению конечного числа Q задач линейного программирования:

$$\min_{z \in X \cap Y_J(x,\varepsilon)} \varphi_J(z) \approx \min_{1 \le q \le Q} \min_{z \in Z} \{\langle a_q, z \rangle + b_q\}.$$

ВЫВОДЫ

В настоящей работе проанализированы возможности синтеза численных методов аппроксимации множества Парето на основе предложенной в [1] универсальной вычислительной процедуры. Рассматривался наиболее трудный случай, когда к вектору частных критериев эффективности и множеству допустимых решений не предъявляется никаких дополнительных требований (в частности, не требуется дифференцируемости критериальных функций и функциональных ограничений). Предполагается, что множество допустимых решений является выпуклым компактом, а компоненты вектора частных критериев эффективности — непрерывные ω-вогнутые функции, удовлетворяющие условию Липшица. Лемма 1 определяет место ω-вогнутых функций в качестве одного из обобщений понятия вогнутой функции.

Численный метод на основе универсальной процедуры характеризуется:

конкретным правилом выбора начального приближения;

конкретным правилом выбора каждого последующего опорного решения.

Построение начального приближения согласно предложенному правилу сводится к решению нескольких задач проектирования внешней точки на выпуклый компакт (к решению нескольких задач квадратичного программирования в линейном приближении).

В качестве правила перехода от текущего опорного решения к последующему предлагаются следующие 3 варианта.

Согласно правилам 1 и 2 требуется минимизировать расстояние по Чебышёву в пространстве критериев, преобразованных в соответствии с соотношением (18). Для этого в обоих случаях следует отыскать минимум непрерывной функции на выпуклом компакте. Как было указано в замечании 2, по правилу 1 минимизируется несколько более простая функция на более сложном множестве, по правилу 2 — несколько более сложная функция на более простом множестве.

Согласно правилу 3 следует минимизировать ω-вогнутую функцию на выпуклом компакте; если критериальные функции можно считать вогнутыми, в линейном приближении задача минимизации сводится к решению ряда задач линейного программирования.

Сходимость вычислительной процедуры сохраняется, если правило выбора меняется от этапа к этапу процедуры. Следует лишь подчеркнуть, что правило 3 обеспечивает отыскание следующей опорной точки, если выполняются условия леммы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рабинович Я.И.* Универсальная процедура построения множества Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57 № 1. С. 28–47.
2. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. М.: Мир, 1986.
3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
4. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007.