УДК 519.63

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

С.К. ГОДУНОВ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ В ИПМ им. М.В. КЕЛДЫША РАН

© 2020 г. С. З. Аджиев[2], Я. Г. Батищева[1], В. В. Веденяпин[1,4,*], Ю. А. Волков[1], В. В. Казанцева[1], И. В. Мелихов[2], М. А. Негматов[3], Ю. Н. Орлов[1], Н. Н. Фимин[1], В. М. Чечеткин[1]

[1] 125047 Москва, Миусская пл., 4, Федеральный Исследовательский Центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

[2] 119991 Москва, Ленинские горы, 1/3, ГСП–1, МГУ им. М.В. Ломоносова, химический факультет, Россия

[3] 141070 Московская область, Королев, ул. Пионерская, 4, Акционерное общество "Центральный научно-исследовательский институт машиностроения", Россия

[4] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, Российский университет дружбы народов, Россия

**e-mail: vicveden@yahoo.com*

Поступила в редакцию 14.11.2019 г.
Переработанный вариант 14.11.2019 г.
Принята к публикации 16.12.2019 г.

Описана история развития сотрудничества коллектива ИПМ им. М.В. Келдыша РАН с С.К. Годуновым. В процессе этого сотрудничества получено много интересных результатов в теории кинетических уравнений и вычислительной математике. Библ. 20.

Ключевые слова: модель Бродуэлла, модель Султангазина, потенциалы Годунова, уравнения с дискретными скоростями.

DOI: 10.31857/S004446692004002X

В 1971 г. вышел обзор (см. [1]). Обзор был первой статьей в СССР по дискретным моделям уравнения Больцмана и содержал исследование модели с тремя скоростями. Как выяснилось позже, похожую модель выписал Больцман в 1872 г., но в настоящее время эта модель известна как модель Годунова–Султангазина [2], хотя за рубежом ее часто называют одномерной моделью Бродуэлла.

В обзоре было сформулировано много вопросов, задач и предположений. Одно из таких предположений было сформулировано следующим образом: "Выбранная нами модельная система на первый взгляд не намного сложнее, чем модель Карлемана; однако детальный анализ этой системы показывает, что она не имеет квадратичных диссипирующихся интегралов, в связи с чем получение для нее теоремы существования, охватывающей все положительные времена $0 < t < \infty$, затруднительно". Сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша В.В. Веденяпин на основе этого поставил ряд задач: 1) выявить разницу между двумя моделями, 2) понять существо диссипирующихся интегралов, 3) установить, как разница между моделями влияет на свойства уравнения Больцмана. В результате работы в этих направлениях была получена теорема о единственности H-функции Больцмана: для газа, описываемого уравнением Больцмана, энтропия является единственным экстенсивным (аддитивным) функционалом, возрастающим со временем. Также была выяснена причина единственности H-функции как диссипирующего интеграла для моделей Бродуэлла и Годунова–Султангазина и неединственности для модели Карлемана. Это стало основным результатом кандидатской и докторской диссертаций В.В. Веденяпина, и опубликовано в УМН [3].

Сергей Константинович Годунов тесно сотрудничал с ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. В одно из своих посещений ИПМ он обратил внимание отдела кинетических уравнений на дважды дивергентную форму гидродинамических следствий дискретных моделей (1) уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial M_{q_i}}{\partial x} = 0,$$

$$L = \exp(q_1 + q_2 - 1) + \exp(q_1 - 1) + \exp(q_1 - q_2 - 1),$$
$$M = \exp(q_1 + q_2 - 1) - \exp(q_1 - q_2 - 1),$$
$$f_1 = \exp(q_1 + q_2 - 1), \quad f_2 = \exp(q_2 - 1), \quad f_3 = \exp(-q_1 - q_2 - 1)$$

(q_1, q_2 есть новые переменные, f – переменные модели Годунова–Султангазина).

В.В. Веденяпин не дал ответа на это обращение С.К. Годунова, и в следующий приезд С.К. Годунов передал ему выписку из своего обзора для простой дискретной модели на одну страничку. После этого В.В. Веденяпину пришлось серьезно изменить свое отношение к поднятому вопросу: такая форма была получена и для уравнения Больцмана (что было сделано, как оказалось, самими авторами обзора) и для его квантовых аналогов:

$$\frac{\partial L_{\alpha_i}}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{M}_{\alpha_i} = 0, \quad i = 0, \ldots 4,$$
$$L(\alpha) = -\frac{1}{\theta}\int \ln\left(1 - \theta\exp\left(\sum_i \varphi_i(\mathbf{v})\alpha_i\right)\right)dv,$$

где

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = v_1, \quad \varphi_2 = v_2, \quad \varphi_3 = v_3, \quad \varphi_4 = \mathbf{v}^2,$$

и параметры α_i связаны с макроскопическими параметрами: плотностью ρ, температурой T и средней скоростью $\mathbf{u}$ согласно формулам

$$\alpha_4 = -\frac{1}{2kT}, \quad \alpha_i = \frac{u_i}{kT}, \quad \alpha_0 = \ln\rho - \frac{3}{2}\ln(2\pi kT) - \frac{\mathbf{u}^2}{2kT}.$$

Эта связь получается из сравнения двух различных форм максвеллиана:

$$f_0(v) \equiv \frac{\rho}{(2\pi kT)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2kT}\right) = \exp\left(\alpha_0 + \sum_i \alpha_i v_i + \alpha_4 v^2\right) =$$
$$= \exp\left(\alpha_0 - \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{4\alpha_4}\right)\exp\left(\alpha_4\left(v + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{2\alpha_4}\right)\right), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

где θ – индикатор статистики: $\theta \to 0$ соответствует статистике Больцмана, $\theta = -1$ – статистике Бозе–Эйнштейна, $\theta = +1$ – статистике Ферми–Дирака.

В это же время вышла книга по кинетическим уравнениям [4]. Вышеприведенные формы Годунова были туда включены. Но С.К. Годунов не остановился на полученном, и предложил сделать то же самое для уравнения Власова. В.В. Веденяпин и М.А. Негматов эту проблему решили достаточно быстро, и решили опубликовать соответствующие результаты. Рецензент в отзыве на их работу написал, что основным результатом по новизне является как раз форма Годунова, в соответствии с чем предложил изменить название статьи. Авторы учли это пожелание, и даже написали вторую работу; так что были опубликованы практически одновременно две статьи с именем Годунова [5], [6]. Далее мы приведем полученную в этих работах форму Годунова для уравнений магнитной гидродинамики.

Двухжидкостная и одножидкостная МГД (или ЭМГД) с ненулевой температурой имеют много модификаций; для примера мы рассмотрим систему:

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{V}_\alpha) = 0, \quad \rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \{i, e\},$$
$$\rho_\alpha\frac{d\mathbf{V}_\alpha}{dt} = -\nabla P_\alpha + e_\alpha n_\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_\alpha, \mathbf{H}]\right), \quad \frac{ds_\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha\nabla s_\alpha = 0,$$
$$P_\alpha = P_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha), \quad \epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha), \quad T_\alpha ds_\alpha = d\varepsilon_\alpha + P_\alpha d\left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right),$$

где P_α – давление, ϵ_α – внутренняя энергия, а для электромагнитных полей имеем систему Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha.$$

Обычно получают уравнения гидродинамического типа из системы кинетических уравнений, последовательно интегрируя и вводя моменты:

$$n_\alpha = \int f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d^3\mathbf{p}, \quad P_{\alpha k} = \frac{1}{n_\alpha}\int p_k f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d^3\mathbf{p},$$

$$D_\alpha = \frac{1}{n_\alpha}\int (\mathbf{p}-\mathbf{P}_\alpha)^2 f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d^3\mathbf{p}.$$

Здесь $n_\alpha(\mathbf{x},t)$ – плотность числа частиц сорта α, $P_{\alpha k}(\mathbf{x},t)$ – математическое ожидание импульса или средний импульс (k-я компонента, $k = x,y,z$), D_α – дисперсия по импульсам всех частиц каждого сорта, которая пропорциональна энергии хаотического движения:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha P_{\alpha\ell}) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(n_\alpha P_{\alpha k}P_{\alpha\ell} + \sigma_{\alpha k\ell}) - n_\alpha e_\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{H}]\right)_\ell = 0,$$

$$\sigma_{\alpha k\ell} = \int (p_k - P_{\alpha k})(p_\ell - P_{\alpha\ell})f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d^3\mathbf{p} \quad \text{(тензор напряжений)}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha D_\alpha) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} q_{\alpha k} = 0,$$

$$q_{\alpha k} = \int \frac{p_k}{m}(\mathbf{p}-\mathbf{P}_\alpha)^2 f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d^3\mathbf{p} \quad \text{(вектор теплового потока)}.$$

В этой системе первое уравнение представляет собой уравнение неразрывности, второе есть уравнение движения, а третье уравнение описывает изменение энергии хаотического движения. Эта точная система уравнений, но она не замкнута. Чтобы ее замкнуть, предполагают максвеллизацию либо из парных столкновений (добавляя интеграл столкновений), либо из взаимодействия со средой (добавляя линейный интеграл столкновений). Это означает, что моменты высшего порядка определяются через низшие с помощью максвелловского распределения

$$f_\alpha^0(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \frac{n_\alpha(\mathbf{x},t)}{(2k_\mathrm{B}\pi T_\alpha m_\alpha)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{P}_\alpha)^2}{2k_\mathrm{B}T_\alpha m_\alpha}\right). \tag{2}$$

При этом оказывается, что:

$$\sigma_{\alpha k\ell} = \delta_{k\ell}k_\mathrm{B}n_\alpha T_\alpha, \quad D_\alpha = 3k_\mathrm{B}T_\alpha.$$

Более кратко эти уравнения записываются в форме Годунова, для этого введем в рассмотрение функцию Годунова:

$$\begin{gathered} G^\alpha(\beta_\mu^\alpha) = \int f_\alpha^0(\beta_\mu^\alpha)d^3\mathbf{p}, \quad \mu = \overline{0,4}, \\ f_\alpha^0(\beta_\mu^\alpha) = \exp[\beta_0^\alpha + \beta_1^\alpha p_1 + \beta_2^\alpha p_2 + \beta_3^\alpha p_3 + \beta_4^\alpha \mathbf{p}^2]. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь β_μ^α – новые переменные (переменные Годунова) вместо плотности n_α, температуры T_α и среднего импульса $\mathbf{P}_\alpha$ в максвелловском распределении f_α^0. Сравнивая

$$f_\alpha^0(\beta_\mu^\alpha) = \exp\left[\beta_0 - \frac{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}{4\beta_4}\right]\exp\left[\beta_4\left(\mathbf{p} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{2\beta_4}\right)^2\right],$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3),$$

с выражением (2), получим связь между β_μ и обычными термодинамическими переменными:

$$\beta_4^\alpha = -\frac{1}{2k_\mathrm{B}T_\alpha m_\alpha}, \quad \beta_1^\alpha = \frac{P_{\alpha 1}}{k_\mathrm{B}T_\alpha m_\alpha}, \quad \beta_2^\alpha = \frac{P_{\alpha 2}}{k_\mathrm{B}T_\alpha m_\alpha}, \quad \beta_3^\alpha = \frac{P_{\alpha 3}}{kT_\alpha m_\alpha},$$

$$\beta_0^\alpha = \ln n_\alpha - \frac{3}{2}\ln\left(2\pi k_B T_\alpha m_\alpha\right) - \frac{P_\alpha^2}{2k_B T_\alpha m_\alpha}.$$

Определим вектор

$$K_\mu^\alpha = (0, F_1^\alpha n_\alpha, F_2^\alpha n_\alpha, F_3^\alpha n_\alpha, -2F_i^\alpha G_{\beta_i}^\alpha),$$

$$\mathbf{F}^\alpha = e_\alpha\left(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{H}]\right), \quad i = \overline{1,3},$$

тогда уравнения с ненулевой температурой в нулевом приближении метода Чэпмена–Энскога можно записать в следующей форме Годунова:

$$\frac{\partial G_{\beta_\mu}^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial G_{\beta_\mu\beta_i}^\alpha}{\partial x_i} + K_\mu^\alpha = 0, \quad \text{где} \quad G_{\beta_\mu}^\alpha \equiv \frac{\partial G^\alpha}{\partial \beta_\mu}. \tag{4}$$

Такие уравнения являются источниками экономичных разностных схем “солверов” (*solvers*): система уравнений (4) содержит только одну неизвестную функцию G^α (для каждого сорта частиц α).

Вот еще одно замечание из вышеупомянутого обзора Годунова и Султангазина 1971 г., которое привело к новым результатам, полученным позднее в ИПМ им. М.В. Келдыша: “Следует заметить, что способ выбора дискретных скоростей, обеспечивающих описание течения газа с законами сохранения трех компонент импульса и с сохранением энергии, в общем случае не разработан. Эта разработка связана с трудностями комбинаторно-геометрического характера” [1]. Теперь можно уверенно сказать, что такой способ выбора дискретных скоростей разработан. В этой разработке помогла аналогия между гамильтоновой механикой и дискретными уравнениями Больцмана [7]–[11].

Задачи и перспективные направления исследований, поставленные в обзоре Годунова и Султангазина [1], стали развиваться и дальше, в том числе получены законы сохранения для уравнений химической кинетики и уравнения Лиувилля [12]–[18]. А результаты для уравнения Власова сейчас переносятся на уравнения Власова–Максвелла–Эйнштейна [19]–[21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Годунов С.К., Султангазин У.М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 3. С. 1–51. *Godunov S.K., Sultangazin U.M.* On discrete models of the Boltzmann kinetic equation // Russian Math. Surv. 1971. V. 26. № 3. P. 1–51.
2. *Vasileva O.A., Dukhnovsky S.A., Radkevich E.V.* On the nature of the local equilibrium of the Carleman and Godunov–Sultangazin equations // J. Math. Sci. 2018. V. 235. № 4. P. 392–454.
3. *Веденяпин В.В.* Дифференциальные формы в пространстве без нормы // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. № 1. С. 159–179. *Vedenyapin V.V.* Differential forms in spaces without a norm. The Boltzmann H-function uniqueness theorem // Russian Math. Surv. 1988. V. 43. № 1. P. 193–219.
4. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. *Vedenyapin V.V.* Boltzmann and Vlasov Kinetic Equations. Moscow: Fizmatlit, 2001.
5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа уравнения Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теор. матем. физ. 2013. Т. 170. № 3. С. 468–480. *Vedenyapin V.V., Negmatov M.A.* Derivation and Magneto Hydrodynamics equations: Lagrange identity and Godunov’s form // Theoret. Math. Phys. 2013. V. 170. № 3. P. 468–480.
6. *Vedenyapin V.V., Negmatov M.A.* On the derivation and classification of equations of Vlasov-type and magnetic hydrodynamics. Lagrange’s identity, Godunov form and critical mass // J. Math Sci. (N.Y.) V. 202. № 5. P. 769–782.
7. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел: плоские периодические движения. М.: Наука, 1990. *Bruno A.D.* The restricted 3-body problem: plane periodic orbits. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1994.
8. *Арансон А.Б.* Вычисление многогранника Ньютона, в сб. Материалы международн. конф. и Чебышевских чтений, посв. 175-летию со дня рождения П.Л. Чебышева, Т. 1. С. 32. Ред. Н.С. Бахвалов, С.Н. Кружков, К.Ю. Богачев и др. М.: Изд-во МГУ, 1996. *Aranson A.* Calculating the Newton polyhedron, in: Materials of the International Conference and the Chebyshev Readings Devoted to the 175th Birthday of P.L. Chebyshev. V. 1. P. 32. Ed. N.S. Bakhvalov et al. Moscow: Moscow Univ. Press, Moscow, 1996.
9. *Веденяпин В.В., Орлов Ю.Н.* О законах сохранения для полиномиальных гамильтонианов и для дискретных моделей уравнения Больцмана // Теор. матем. физ. 1999. Т. 121. № 2. С. 307–315. *Vedenyapin V.V.,*

Orlov Yu.N. On conservation laws for polynomial Hamiltonians and for discrete models of the Boltzmann equation // Theoret. Math. Phys. 1999. V. 121. № 2. P. 307–315.

10. *Bobylev A.V., Vinerean M.C.* Construction of discrete models with given invariants // J. Stat. Phys. 2008. V. 132. № 1. P. 153–170.
11. *Bernhoff N., Vinerean M.* Discrete velocity models for mixtures without nonphysical collision invariants // J. Stat. Phys. 2016. V. 165. № 2. P. 434–453.
12. *Батищева Я.Г., Веденяпин В.В.* Второй закон термодинамики для химической кинетики // Матем. моделирование. 2005. Т. 17. № 8. С. 106–110. *Batishcheva Ya.G., Vedenyapin V.V.* The second law of thermodynamics for chemical kinetics // Mat. Model. 2005. V. 17. № 8. P. 106–110.
13. *Веденяпин В.В., Аджиев С.З.* Энтропия по Больцману и Пуанкаре // Успехи матем. наук. 2014. Т. 69. № 6. С. 45–80. *Vedenyapin V.V., Adzhiev S.Z.* Entropy in the sense of Boltzmann and Poincare // Russian Math. Surv. 2014. V. 69. № 6. P. 45–80.
14. *Аджиев С.З., Амосов С.А., Веденяпин В.В.* Одномерные дискретные модели кинетических уравнений для смесей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 3. С. 553–558. *Adzhiev S.Z., Amosov S.A., Vedenyapin V.V.* One dimensional discrete models of kinetic equations for mixtures // Comput. Math. Math. Phys. 2004. V. 44. № 3. P. 523–528.
15. *Аджиев С.З., Веденяпин В.В.* Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074. *Adzhiev S.Z., Vedenyapin V.V.* Time averages and Boltzmann extremals for Markov chains, discrete Liouville equations, and the Kac circular model // Comput. Math. Math. Phys. 2011. V. 51. № 11. P. 1942–1952.
16. *Аджиев С.З., Веденяпин В.В., Волков В.В., Мелихов И.В.* Обобщенные уравнения типа Больцмана для агрегации в газе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 2065–2078. *Adzhiev S.Z., Vedenyapin V.V., Volkov Yu.A., Melikhov I.V.* Generalized Boltzmann-type equations for aggregation in gases // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. № 12. P. 2065–2078.
17. *Веденяпин В.В., Аджиев С.З., Казанцева В.В.* Энтропия по Больцману и Пуанкаре, экстремали Больцмана и метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации // СМФН. 2018. Т. 64. № 1. С. 37–59. *Vedenyapin V.V., Adzhiev S.Z., Kazantseva V.V.* The entropy of the Boltzmann and the Poincare, the Boltzmann extremals, and the Hamilton–Jacobi method in the non-Hamiltonian context // Contemporary Mathematics. Fundamental Direct. 2018. V. 64. № 1. P. 37–59.
18. *Веденяпин В.В., Негматов М.А., Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Изв. РАН. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82. *Vedenyapin V.V., Negmatov M.A., Fimin N.N.* Vlasov- and Liouville-type equations for their macroscopic, energetic and hydrodynamic consequences // Izv. Math. 2017. V. 81. № 3. P. 505–541.
19. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.* Уравнение типа Власова–Максвелла–Эйнштейна и переход к слаборелятивистскому приближению // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 81–97. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* Vlasov–Maxwell–Einstein-type equation and transition to a weakly relativistic approximation // Comp. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. № 11. P. 81–97.
20. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.* К вопросу о выводе уравнения Власова–Максвелла–Эйнштейна и его связь с космологическим лямбда-членом // Вестник МГОУ. Сер. Физика–Математика. 2019. № 2. С. 24–48.
21. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The system of Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and its nonrelativistic and weak relativistic limits // Internat. Journal of Modern Phys. D. 2020. № 1. P. 23. 2050006. Doi:10.1142/S0218271820500066