ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 4, с. 553–566

УДК 519.642

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

СВЕРХСХОДЯЩИЕСЯ АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ГЛАДКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

В. Н. Белых

630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

e-mail: belykh@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 14.11.1019 г.
Переработанный вариант 14.11.2019 г.
Принята к публикации 16.12.2019 г.

Построен принципиально новый – *ненасыщаемый* – метод численного решения эллиптических краевых задач для уравнения Лапласа в C^∞-гладких осесимметричных областях достаточно произвольной формы. Отличительная черта метода – отсутствие главного члена погрешности, и как результат – способность автоматически подстраиваться к любым избыточным (экстраординарным) запасам гладкости отыскиваемых решений задач. Метод снабжает практику новым вычислительным средством, способным в дискретизованной форме наследовать как дифференциальные, так и спектральные характеристики оператора исследуемой задачи. Последнее служит основанием для построения компьютерного числового ответа гарантированного качества (точности), если решение эллиптической задачи достаточно гладкое, например, C^∞-гладкое. Полученный результат принципиален, ибо в случае C^∞-гладких решений ответ конструируется с абсолютно неулучшаемой экспоненциальной оценкой погрешности. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой александровского m-поперечника компакта C^∞-гладких функций, содержащего точное решение задачи. Эта асимптотика также имеет вид убывающей к нулю (с ростом целого параметра m) экспоненты. Библ. 27.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, осевая симметрия, ненасыщаемый численный метод, хорошая обусловленность, экспоненциальная сходимость.

DOI: 10.31857/S0044466920040031

1. ВВЕДЕНИЕ

С появлением фундаментальных исследований К.И. Бабенко [1], [2] проблематика численного решения эллиптических краевых задач вступила в ту стадию своего естественного развития, когда пренебрежение ее высокой теоретической оснащенностью (наличием шаудеровских оценок гладкости) становится тормозом дальнейшего развития, и оценка практической эффективности численных алгоритмов уже невозможна без использования для этой цели понятий александровского m-поперечника $\alpha_m(X)$ и колмогоровской ε-энтропии $H_\varepsilon(X)$ компакта X решений этих задач.

Наилучшее финитное описание функционального компакта X ассоциируется всегда с асимптотиками двух числовых параметров $\alpha_m(X)$ и $H_\varepsilon(X)$, характеризующими соответственно степень m-мерности X и минимальный в битах объем информации, требуемый для различения элементов в X с точностью $\varepsilon > 0$. При этом убывание $\alpha_m(X)$ к нулю при $m \to \infty$ тем быстрее, а рост $H_\varepsilon(X)$ к бесконечности при $\varepsilon \to 0$ тем медленнее, чем выше запас гладкости X; для компакта X бесконечной гладкости $\alpha_m(X)$ убывает к нулю экспоненциально, а рост $H_\varepsilon(X)$ к бесконечности определяется фиксированной степенью $\log(1/\varepsilon)$ [2], [3]. При этом качество финитизаций X характеризуется сопоставлением точности $\varepsilon > 0$ и объема числовых данных с асимптотиками параметров $\alpha_m(X)$ и $H_\varepsilon(X)$ – аппроксимационными возможностями компакта X.

Смысловые потенции понятий $\alpha_m(X)$ и $H_\varepsilon(X)$, сыграв решающую роль в становлении точных представлений о предельных возможностях численных алгоритмов, открывают доступ к принципиально новому – *ненасыщаемому* – типу вычислительных алгоритмов, до недавнего времени не входившему в арсенал вычислительной практики. Сообщение К.И. Бабенко об этом открытии появилось в 1975 г. (см. Докл. АН СССР, 1975, Т. 221. № 1).

Краткое изложение основ теории ненасыщаемых численных методов (и алгоритмов) содержится в книге [2], второе издание которой появилось в 2002 г. Отличительная черта ненасыщаемых численных методов – отсутствие главного члена погрешности, и как результат – способность автоматически подстраиваться к любым аппроксимационным возможностям компакта X решений задач, определяемым асимптотикой убывания $\alpha_m(X)$ к нулю (поперечник $\alpha_m(X)$ определяется как нижняя грань ε-сдвигов компакта X в компакт размерности, не большей m [1], [2]). Скорость убывания $\alpha_m(X)$ к нулю сравнивается при этом с числом m свободных параметров конечномерного описания X: она тем выше, чем бóльший "запас" гладкости имеет X. Так что с ростом гладкости X (при прочих равных условиях) ненасыщаемый численный метод самосовершенствуется, черпая приращение своей практической эффективности непосредственно в дифференциальной природе X (феномен ненасыщаемости [4]). В результате избыточная (экстраординарная) гладкость X, прежде находившаяся на периферии насущных интересов вычислений, становится активным персонажем. Причем пик эффективности – экспоненциальная сходимость (или *сверхсходимость*) – достигается на компактах бесконечно гладких X. И это принципиально отличает ненасыщаемые численные методы от методов с главным членом погрешности, т.е. насыщаемых. В итоге, открывая новые перспективы для вычислительной практики, ненасыщаемые численные методы создают серьезную основу для построения компьютерных числовых ответов гарантированного качества [5].

Качественную финитизацию эллиптических задач отличает способность к наследованию их характеристического свойства – шаудеровских оценок гладкости. При этом идеальным является положение, когда каждой теореме существования (в форме шаудеровских оценок) соответствует теорема (оценка) сходимости приближенного решения в нормах, отвечающих гладкости отыскиваемого решения задачи. В этом контексте вопрос о ценности, или, что то же самое, о точности конструируемого числового ответа напрямую зависит от способа финитизации компакта решений X. Содержательная информация об этом получается средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий для задачи аппроксимационный аппарат.

К сказанному следует добавить, что, поскольку операция замены вещественного числа конечной дробью (округление) является вынужденной и необходимой, и без потери информации не обходится, переход к цифровым вычислениям оказывается моментом небезобидным. И потому в качестве составной части он обязан содержать компонент "хорошей обусловленности" (или корректности) компьютерной постановки задачи, определяемый устойчивостью к ошибкам округлений и характеризуемый параметром, называемым числом обусловленности [5]. Если это число велико, то от такого способа финитизации задачи следует отказаться, потому как конструируемый числовой ответ не может внушать доверия из-за плохой устойчивости алгоритма.

В работе на примере численного решения задачи Неймана указана методика построения ненасыщаемых алгоритмов численного решения эллиптических краевых задач для уравнения Лапласа в C^∞-гладких осесимметричных областях достаточно произвольной формы. В общих чертах методика описана в работах [6], [7]. В ее основе – методы теории гармонического потенциала [8], позволяющие сводить задачи к эквивалентным им интегральным уравнениям, с последующим отысканием их решений. Предлагаемый подход в отличие от конечно-разностного метода, связанного с аппроксимацией дифференциального (неограниченного) оператора, имеет дело с аппроксимацией оператора интегрального, т.е. ограниченного. А это в сумме с ненасыщаемой дискретизацией последнего приводит к хорошо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений, которая затем эффективно решается быстросходящимся итерационным методом. При этом не возникает проблем с решением систем "большой" размерности, а стало быть, и коллизий точности конструируемого числового ответа и объема перерабатываемой битовой информации, если решение задачи достаточно гладкое, например, бесконечно дифференцируемое [3].

Имеющиеся в настоящее время случаи применения ненасыщаемых численных методов в конкретных задачах [6], [9], [10], хотя и немногочисленны, но убеждают в их содержательности и высокой эффективности на практике.

Ограниченность объема статьи не позволила нам провести детальные выкладки и доказательства, заставив исключить рассуждения, включающие сложные манипуляции со специальными функциями. Поэтому отдельные моменты остались незатронутыми. Но все ключевые моменты методики будут продемонстрированы с особой с тщательностью и необходимыми подробностями.

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пусть $\mathbf{x}, \xi \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$; $\omega \subset \mathbb{R}^3$ – связная область с осью симметрии z, ограниченная C^∞-гладкой замкнутой поверхностью вращения $\partial\omega$; величины $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z – инварианты группы вращения ω относительно оси z. Меридиональное сечение $\partial\omega$ – параметризованная кривая $\gamma : [0, \pi] \to \{r(s), z(s)\}$, $r \geq 0$, $dz/ds \geq 0$ и $\gamma(s) \in C^\infty[0, \pi]$. Точки $\gamma(0)$ и $\gamma(\pi)$ суть полюсы $\partial\omega$, и функции $r(s)$, $z(s)$ имеют 2π-периодические C^∞-гладкие продолжения (нечетное и четное соответственно) с отрезка $[0, \pi]$ на $[0, 2\pi]$. Положение точек $x = (r, z)$ и $\xi = (\rho, \zeta)$ на γ определим координатами s и σ: $r = r(s)$, $z = z(s)$; $\rho = r(\sigma)$, $\zeta = z(\sigma)$ и $0 \leq s$, $\sigma \leq \pi$. Введем также обозначения: $\rho' \equiv d\rho/d\sigma$, $\zeta' \equiv d\zeta/d\sigma$, $\delta = \sqrt{\rho'^2 + \zeta'^2}$; $r' \equiv dr/ds$, $z' \equiv dz/ds$, $d = \sqrt{r'^2 + z'^2}$. Нормаль $\mathbf{N}$ на $\partial\omega$ считается направленной в $\mathbb{R}^3 \backslash \omega$.

Пусть $F(\mathbf{x})$ – непрерывная функция вне области ω. Прямое значение $F(\mathbf{x})$ на $\partial\omega$ (если оно существует) обозначим через $\bar{F}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in\partial\omega}$. Для предельного извне $\partial\omega$ и прямого на $\partial\omega$ значений производной $\partial F/\partial \mathbf{N} = \mathbf{N} \times \nabla_{\mathbf{x}} F$ (если они существуют) примем обозначения: $(N_- \bar{F})(\mathbf{x})$ и $(N\bar{F})(\mathbf{x})$.

Решение внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в C^∞-гладкой осесимметричной области ω с данными $N_- \bar{\varphi}|_{\mathbf{x}\in\partial\omega} = f(\mathbf{x})$ и условием $\varphi \to 0$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$ будем отыскивать в виде потенциала простого слоя $\varphi(\mathbf{x}) = V[\chi](\mathbf{x})$ с достаточно гладкой плотностью $\chi(\xi)$, инвариантной относительно группы вращения ω. Решение задачи существует и единственно. Гладкость решения $\varphi(\mathbf{x})$ определяется гладкостью функции $f(\mathbf{x})$. Обычно полагают [8], что $f(\mathbf{x}) \in C^\alpha(\partial\omega)$, т.е. – пространству непрерывных функций, удовлетворяющих на $\partial\omega$ условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$.

Пусть $f(s) \equiv f(r(s), z(s))$ – достаточно гладкая 2π-периодическая четная функция, тогда интегральное уравнение для внешней задачи Неймана имеет вид [8]

$$\chi(s) + N\bar{V}[\chi](s) = -f(s)/2\pi, \quad 0 \leq s \leq \pi. \tag{2.1}$$

Здесь оператор $N\bar{V} \equiv K$ – интегральный, который согласно инвариантности относительно группы вращения области ω, задается равенством

$$K[\chi](s) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(2\rho \frac{\mathbf{H}(\sigma, s) \cdot \mathbf{N}(s)}{\sigma - s} E(q) + \frac{\rho}{r}\frac{z'}{d} D(q)\right) \delta h_*^{-1} \chi(\sigma) d\sigma \equiv \int_0^\pi k(s, \sigma)\chi(\sigma) d\sigma. \tag{2.2}$$

Функции $E(q)$ и $D(q)$ – полные эллиптические интегралы с модулем $q \in [0, 1]$, где

$$q \equiv q(\sigma, s) = 4\rho r h_*^{-2}, \quad h_* \equiv h_*(\sigma, s) = \sqrt{(\rho + r)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Эффективные алгоритмы вычисления функций $E(q)$ и $D(q)$ указаны в работе [11].

Приняты также следующие обозначения:

$$\mathbf{H}(\sigma, s) = \frac{\mathbf{r}(\sigma, s)}{|\mathbf{r}(\sigma, s)|^2}, \quad \mathbf{r}(\sigma, s) = \left[\frac{\rho - r}{\sigma - s}, \frac{\zeta - z}{\sigma - s}\right], \quad \mathbf{N}(s) = \left[-\frac{z_s}{d}, \frac{r_s}{d}\right].$$

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ (2.1) И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Пусть $C \equiv C[0, 2\pi]$ – класс вещественных 2π-периодических непрерывных функций с чебышёвской нормой $\|\cdot\|$, а $C_+ \equiv C_+[0, \pi] \subset C$ – множество четных функций. Пусть $\mathcal{T}^m \subset C_+$ – подпространство тригонометрических многочленов, порядок которых не выше m, $m \geq 0$ – целое,

$Q_m : C_+ \to \mathcal{T}^m$ – проектор, $e_m(g) = \inf\limits_{T_m \in \mathcal{T}^m} \|g - T_m\|$ – наилучшее (чебышёвское) приближение функции g из C_+ многочленами.

Ядро $k(s, \sigma)$ – слабосингулярно и потому оператор $K : C_+ \to C_+$ компактен и его норма вычисляется по формуле

$$\|K\| \equiv \max_{0 \le s \le \pi} \int_0^\pi |k(s, \sigma)| d\sigma. \tag{3.1}$$

Дискретизацию уравнения (2.1) осуществим по следующей схеме. Зададим узлы

$$s_i = 2\pi i/(2m + 1), \quad 0 \le i \le m$$

и линейное отображение

$$J : C_+ \to \mathbb{R}^{m+1}, \quad Jg = (g(s_0), \ldots, g(s_m)) \equiv (g_0, \ldots, g_m), \quad |Jg|_\infty = \max_{0 \le i \le m} |g_i|.$$

Рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа функции g из C_+:

$$(Q_m g)(s) \equiv Q_m(s; Jg) = \sum_{k=0}^m g(s_k) w_k(s), \quad \|Q_m\| = \max_{0 \le s \le \pi} \sum_{k=0}^m |w_k(s)|. \tag{3.2}$$

Здесь

$$w_k(s) = \begin{cases} 2D_m(s)/(2m + 1), & k = 0, \\ 2\left(D_m(s - s_k) + D_m(s + s_k)\right)/(2m + 1), & k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

$$D_m(s) = 1/2 + \sum_{k=1}^m \cos ks$$

– есть ядро Дирихле; $w_k(s_j) = \delta_{kj}$, $0 \le k,\ j \le m$.

Многочлен $Q_m(s; Jg)$ определяет проектор $Q_m : C_+ \to \mathcal{T}^m$, а $\|Q_m\|$ – его норма. Ясно, что $Q_m w_k \equiv w_k$ и $JQ_m g \equiv Jg$.

Согласно неравенству Лебега [2] имеем оценку погрешности:

$$\|g(s) - Q_m(s; Jg)\| \le (1 + \|Q_m\|) e_m(g), \quad \|Q_m\| \le 3 + 2\pi^{-2} \ln m.$$

Далее, в силу линейности оператора $K : C_+ \to C_+$, имеем

$$K[Q_m g](s) = \sum_{k=0}^m g(s_k) a_k(s), \quad a_k(s) = K[w_k](s), \quad \|KQ_m\| = \max_{0 \le s \le \pi} \sum_{k=0}^m |a_k(s)|.$$

Пусть

$$u = J\chi, \quad \rho_m(s) = \chi(s) - Q_m(s; J\chi), \quad \varrho = -JK[\rho_m], \quad F = -(1/2\pi) Jf.$$

Применяя оператор J к обеим частям уравнения (2.1), находим

$$u + Au = F + \varrho, \quad \varrho = -JK[\chi - Q_m \chi], \quad u, \varrho \in \mathbb{R}^{m+1}. \tag{3.3}$$

Здесь $A = (a_{ik})$ – матрица; $a_{ik} = K[w_k](s_i)$ $(0 \le k \le m,\ 0 \le i \le m)$.

Матрица A определяет линейный оператор $A : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$, который рассматривается в качестве дискретизации $K : C_+ \to C_+$; матрица A полностью заполнена, в отличие от используемых в конечно-разностных методах сильно разреженных матриц.

Отбрасывая в (3.3) погрешность $\varrho \in \mathbb{R}^{m+1}$ и, обозначая приближенное значение $J\chi \in \mathbb{R}^{m+1}$ через $\bar{\chi} \in \mathbb{R}^{m+1}$, получим дискретизацию интегрального уравнения (2.1):

$$(I + A)\bar{\chi} = F, \quad I - \text{единичная } (m + 1) \times (m + 1) \text{ матрица}. \tag{3.4}$$

Пусть $|B|_\infty$ – чебышёвская норма обратимой матрицы $B : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$; меру ее обусловленности определим числом $\varkappa(B) = |B|_\infty \left|B^{-1}\right|_\infty$.

Уравнение (2.1) однозначно разрешимо, существует обратный оператор $(I + K)^{-1} : C_+ \to C_+$, причем $\left\|(I + K)^{-1}\right\| \le Q < \infty$ и выполняется оценка $\|\chi\| \le Q\|f\|$.

В этом случае справедливы следующие нетривиальные результаты [6].

Теорема 1. *Существуют постоянные* m_0, q_0, $\varkappa_0$, c_0, *такие что при* $m \ge m_0$ *существует матрица* $(I + A)^{-1}$ *и имеют место следующие оценки*

$$\|KQ_m\| \le q_0, \quad \varkappa(I + A) \le \varkappa_0,$$
$$e_m(\chi) \le |J\chi - \overline{\chi}|_\infty \le c_0(1 + \|Q_m\|)e_m(\chi), \tag{3.5'}$$

$$e_m(\chi) \le \|\chi(s) - Q_m(s; J\chi)\| \le c_0 \|Q_m\|(1 + \|Q_m\|)e_m(\chi). \tag{3.5}$$

Постоянные q_0, $\varkappa_0$, c_0 *не зависят от* m *и эффективно вычисляются.*

Следствие 1. Построенный метод численного решения задачи (2.1) ненасыщаем.

Доказательство. Считаем известными классические определения александровского $\alpha_m(X)$ и колмогоровского $\varkappa_m(X)$ m-поперечников функционального компакта X и теорему о связи их величин при $m \to \infty$ между собой [12]: $c_1\varkappa_m(X) \le \alpha_m(X) \le c_2\varkappa_m(X)$ с не зависящими от m постоянными $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Упомянутая связь дает возможность использовать колмогоровский m-поперечник $\varkappa_m(X)$ в определении ненасыщаемости [2] вычислительного метода.

Действительно, для $k \ge 0$ и $0 < \alpha < 1$ рассмотрим класс четных 2π-периодических k раз непрерывно дифференцируемых функций $C_+^{k+\alpha}(M)$, производные k-го порядка которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α и константой M:

$$C_+^{k+\alpha}(M) = \{\psi | \psi \in C_+^k[0,\pi], \left|\psi^{(k)}(s) - \psi^{(k)}(\sigma)\right| \le M|s - \sigma|^\alpha,\ s, \sigma \in [0,\pi]\}.$$

Тогда $X^k \equiv C_+^{k+\alpha}(M) \cap \{\psi | \psi \in C_+[0,\pi], \|\psi\| \le 1\}$ – компакт в пространстве $C_+[0,\pi]$.

Пусть $\chi \in X^k$, $\varrho_m(\chi) = \|\chi(s) - Q_m(s; J\chi)\|$ и $\epsilon_m(X^k) = \sup\{\varrho_m(\chi) | \chi \in X^k\}$ – точность приближения элемента χ и точность метода на классе X^k соответственно.

Компакты X^k, где $0 \le k \le \infty$, вложены друг в друга: если $k_1 < k_2$, то $X^{k_2} \subset X^{k_1}$.

Ненасыщаемость метода решения уравнения (2.1) состоит в проверке двух условий:

$$1) \quad \lim_{m\to\infty} \epsilon_m(X^k) = 0, \quad 2) \quad \varepsilon_m(X^{k+1}) = o(\epsilon_m(X^k)) \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall k \ge 0.$$

Убедимся в этом. Согласно неравенству Джексона [2], из правой оценки в (3.5) следует

$$\epsilon_m(X^k) = \sup_{\chi\in X^k} \varrho_m(\chi) < 4c_3 \ln^2 m \sup_{\chi\in X^k} e_m(\chi) \le \frac{b_k \ln^2 m}{m^{k+\alpha}} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall k \ge 0.$$

С другой стороны, оценка $\varrho_m(\chi) \ge e_m(\chi)$ и оценка снизу [12, с. 42] для $\varkappa_m(X^k)$ дают

$$\epsilon_m(X^k) = \sup_{\chi\in X^k} \varrho_m(\chi) \ge \sup_{\chi\in X^k} e_m(\chi) \ge \varkappa_m(X^k) \ge \frac{d_k}{m^{k+\alpha}} \quad \forall k \ge 0.$$

(постоянные $c_3 > 0$, $b_k > 0$ и $d_k > 0$ от m не зависят). Получаем теперь

$$0 \le \frac{\epsilon_m(X^{k+1})}{\epsilon_m(X^k)} \le \frac{b_{k+1}}{d_k}\frac{\ln^2 m}{m} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall k \ge 0.$$

Значит и условие 2) тоже выполнено. Следствие установлено.

Замечание 1. Смысл свойства ненасыщаемости численного метода состоит как раз в следующем: если компакт X^{k_2} устроен существенно проще, чем компакт X^{k_1}, то при прочих равных условиях вычислительный метод конструирует решение $\chi \in X^{k_2}$ уравнения (2.1) с точностью большей, чем в случае, когда $\chi \in X^{k_1}$.

Дискретизация (3.4) задачи (2.1) не создает коллизий точности вычислений с объемом перерабатываемой битовой информации, если решение χ достаточно гладкое, в частности, бесконечно дифференцируемое. При этом не возникает проблем, связанных с решением линейных алгебраических систем "большой" размерности. А утверждение теоремы 1 о том, что число обусловленности $\varkappa(I + A)$ не зависит от m, обеспечивает устойчивость итерационного процесса решения задачи (3.4). Иными словами, ошибки округления отыскиваемого решения $\overline{\chi}$ имеют примерно тот же порядок малости, что и ошибки, допущенные при вычислении матрицы $I + A$ и правой части F (см. оценку (3.5')). Указанный факт является важным преимуществом итерационного метода решения линейной системы уравнений (3.4): хотя матрица $I + A$ не имеет специальной структуры и полностью заполнена, тем не менее существует эффективный итерационный метод ее численного решения.

Теорема 2. *Последовательность функций*

$$\overline{\chi}^{k+1} = (1 - b)\overline{\chi}^k - bA\overline{\chi}^k + bF, \quad b = \left(1 + \|KQ_m\|\right)^{-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.6}$$

получаемая при решении системы (3.4) *методом итераций, сходится к решению* $\overline{\chi}$ *задачи* (3.4) *так же, как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы.*

Для окончательного заключения о близости приближения $\overline{\chi}^k$ к решению $\overline{\chi}$ задачи (3.4) требуется эффективный критерий прерывания итерационного процесса (3.6). Естественно принять за такой критерий количество верных значащих цифр в конструируемом ответе. Это означает, что, исходя из оценки $\left|\overline{\chi}^k - \overline{\chi}\right|_\infty / |\overline{\chi}|_\infty \le \varepsilon$ при заданном $\varepsilon > 0$, проводить итерации следует до выполнения этого неравенства. Но априори само решение $\overline{\chi}$ нам неизвестно и указанный критерий рассматривать как эффективный нельзя. Укажем другой критерий, использующий последовательность значений $\overline{\chi}^k$ и число обусловленности $\varkappa(I + A)$, характеризующий трудность [5] решения задачи (3.4).

Теорема 3. *Если*

$$\frac{\left|(I + A)\overline{\chi}^k - F\right|_\infty}{|F|_\infty} \le \frac{\varepsilon}{\varkappa(I + A)},$$

то

$$\frac{\left|\overline{\chi}^k - \overline{\chi}\right|_\infty}{|\overline{\chi}|_\infty} \le \varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы простое и мы его приведем. Пусть $B = I + A$, тогда $B\overline{\psi} = F$ и, следовательно,

$$\frac{\left|\overline{\psi}^k - \overline{\psi}\right|_\infty}{|\overline{\psi}|_\infty} = \frac{\left|B^{-1}(B\overline{\psi}^k - B\overline{\psi})\right|_\infty}{\left|B^{-1}B\overline{\psi}\right|_\infty} = \frac{\left|B^{-1}(B\overline{\psi}^k - F)\right|_\infty}{\left|B^{-1}F\right|_\infty}.$$

Учитывая, что

$$|F|_\infty = \left|BB^{-1}F\right|_\infty \le |B|_\infty \left|B^{-1}F\right|_\infty,$$

получим

$$\left|B^{-1}F\right|_\infty \ge |B|_\infty^{-1} |F|_\infty.$$

Далее

$$\frac{\left|\overline{\psi}^k - \overline{\psi}\right|_\infty}{|\overline{\psi}|_\infty} \le \frac{\left|B^{-1}\right|_\infty \left|(B\overline{\psi}^k - F)\right|_\infty}{|B|_\infty^{-1} |F|_\infty} = \varkappa(I + A)\frac{\left|(I + A)\overline{\psi}^k - F)\right|_\infty}{|F|_\infty}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Осуществить итерационный процесс (3.6) с любой заданной точностью $\varepsilon > 0$, используя только компьютерную конечно-разрядную арифметику, нельзя, если не предпринимать специальных мер [5]. Однако в тех случаях, когда число $\varkappa(I + A)$ невелико, получаются достоверные данные о величине погрешности.

Преимущества предлагаемого в теоремах 1–3 метода численного решения интегрального уравнения (2.1) сохраняются лишь при условии, что точность приближенной реализации интегрального оператора (2.2) имеет тот же порядок, что и величина $|\varrho|_\infty = |JK[\chi - Q_m\chi]|_\infty$ при $m \geq m_0$ (см. (3.3)). И потому вопрос о ценности, или, что то же самое, о точности конструируемого компьютерного ответа, всецело находясь во власти способа численной реализации интегрального оператора K, напрямую зависит от качеств используемых квадратурных формул.

Однако сам вид выражения (2.2) показывает, что далеко не каждая квадратурная формула для вычисления элементов $a_{ik} = K[w_k](s_i)$ представляет практический интерес. С одной стороны, ядро $k(s,\sigma)$ имеет на диагонали $\sigma = s$ “подвижную” логарифмическую особенность, обусловленную свойством модуля $q(\sigma, s)$ эллиптических интегралов $E(q)$ и $D(q)$. С другой стороны, в точках s вблизи оси симметрии z, являющейся зоной интенсивного роста функции $h_*^{-1}(\sigma, s)$, возникают явления пограничного слоя [13]. В полюсах же $\gamma(0)$ и $\gamma(\pi)$ выражение (2.2) вполне регулярно.

Требования к точности вычислений реализуются при использовании так называемых ненасыщаемых квадратурных формул. Такие формулы, учитывающие еще и специфику осесимметричной задачи (2.1), были построены в работе [14]:

$$\int_{-1}^{+1} f(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{n} c_k f(\tau_k) + \wp_n^C(f), \quad -\int_{-1}^{+1} f(\tau)\ln|\tau|\,d\tau = \sum_{k=1}^{n} d_k f(\tau_k) + \wp_n^D(f). \tag{3.7}$$

Здесь $\tau_k = \cos(\pi(2k-1)/2n)$, коэффициенты c_k и d_k указаны в [14], а функционалы погрешностей $\wp_n^{C,D}(f)$ квадратурных формул (3.7) оценены через характеристики $E_n(f)$ гладкости подынтегральной функции f таким образом: $\left|\wp_n^C(f)\right|, \left|\wp_n^D(f)\right| \leq 4E_n(f)$; $E_n(f) = \inf\limits_{P_n \in \mathcal{P}^n} \|f - P_n\|$ ($n > 0$ – целое) – наилучшее (чебышёвское) приближение непрерывной функции f на отрезке $I \equiv [-1,1]$ многочленами из подпространства $\mathcal{P}^n$ алгебраических многочленов степени не выше $n-1$.

4. ФЕНОМЕН НЕНАСЫЩАЕМОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР

Хотя математический смысл результатов, полученных в теоремах 1–3, прозрачен и прост, мотивация их практической применимости в цифровых вычислениях отнюдь не очевидна. Укажем доводы в пользу учета экстраординарных запасов гладкости решения $\chi(s)$ при приближенном решении уравнения (2.1). При этом оценим не только преимущества нового подхода, но и выявим аналитическую природу адаптивности процедур аппроксимации и квадратурных формул к запасам гладкости решения $\chi(s)$.

Пусть функция ψ принадлежит C_+^k, тогда $e_m(\psi) \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\left\|\psi^{(k)}\right\|}{m^k}$ (теорема Джексона [2]). Пусть далее ψ принадлежит гладкой шкале пространств $\bigcup_{k\geq 0} C_+^k$ и $\{G(k)\}_{k=0}^\infty$ – последовательность положительных чисел. С использованием условий

$$\psi \in C_+^\infty, \quad \|\psi\| = G(0) \neq 0, \quad \psi \notin \mathcal{T}^m, \quad \left\|\psi^{(k)}\right\| \leq G(k) \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty$$

поставим в соответствие последовательности $\{G(k)\}_{k=0}^\infty$ пару функций числового аргумента $x \geq 0$:

$$\mu(x) = \begin{cases} G(0), & 0 \leq x < 1, \\ \inf\limits_{k\geq 0} \dfrac{G(k)}{x^k}, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ \max\left\{k \geq 0 \,|\, \mu(x) = \dfrac{G(k)}{x^k}\right\}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Указанные классы C^∞-гладких функций не пусты: им принадлежат, например, известные классы Жеврея, имеющие мажоранту $G(k) = A^k k^{\beta k}$ ($\beta \ge 1$, $A > 1$ – константы). С использованием этих определений теорема Джексона записывается в виде

$$e_m(\psi) \le \frac{\pi}{2}\mu(m), \quad \text{где} \quad \mu(x) = \min_{k\ge 0}\frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\vartheta(x)]}{x^{\vartheta(x)}}. \tag{4.1}$$

Функция $\vartheta(m)$ в (4.1) является выражением нашего интуитивного представления о порядке убывания к нулю с ростом параметра m аппроксимационных характеристик $e_m(\psi)$, а величина $\mu(m)$ при этом оказывается точностью приближения функции ψ.

Теорема 4 (см. [4]). *При $x \ge 1$ функция $\vartheta(x)$ целочисленна, неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности при $x \to \infty$. Функция $\mu(x)$ строго монотонно убывает, всюду непрерывна и стремится к нулю при $x \to \infty$.*

Следствие 2. При $p \ge 0$ верно следующее равенство: $\lim\limits_{x\to\infty} x^p\mu(x) = 0$.

Из оценки (3.5), в силу неравенства (4.1) и теоремы 4, следует, что с ростом запаса гладкости решения χ задачи (2.1) скорость убывания к нулю погрешности построенного ненасыщаемого численного метода только возрастает. Причем с ростом m метод самосовершенствуется и экспоненциальная его сходимость, в силу следствия 2, достигается на классе C_+^∞-гладких решений χ. Так что, если χ из C_+^∞ и $G(k) = A^k k^{\beta k}$ при $A > 1$ и $\beta \ge 1$, то $e_m(\chi) \le ce^{-r\sqrt[\beta]{m}}$, где c, r – положительные константы.

Попытка понять природу приспособляемости квадратурных формул (3.7) к запасам гладкости подынтегральных функций f привела, в свою очередь, к некой новой формализации оценок их функционалов погрешностей с помощью специально сконструированных для этого монотонных функций $\lambda(x)$ и $\theta(x)$ числового аргумента x.

Итак, пусть $C[I]$ – пространство непрерывных на отрезке $I \equiv [-1,1]$ функций с чебышёвской нормой $\|\cdot\|$, а $C^k[I]$ ($k \ge 0$ – целое число) – пространство k раз непрерывно дифференцируемых на I функций. При этом для функции f из $C^k[I]$ справедлива теорема Джексона–Зинвела [15]:

$$E_n(f) \le (\pi/2)\min_{0\le k\le n} a^k \left\|f^{(k)}\right\| \big/ n^k, \quad \text{где} \quad 1 < a < e, \quad a \text{ – абсолютная константа.}$$

Пусть

$$f \in C^\infty[I], \quad f \notin \mathcal{P}^n, \quad \|f\| = G(0) \ne 0, \quad \left\|f^{(k)}\right\| \le G(k) \quad \text{и} \quad \varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)} = \infty.$$

Определим следующие функции числового аргумента $x \in [0,\infty)$:

$$\lambda(x) = \begin{cases} G(0), & 0 \le x < 1, \\ \min\limits_{0\le k\le x}\dfrac{G(k)}{x^k}, & x \ge 1, \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ \max\left\{k \,|\, 1 \le k \le x \text{ и } \lambda(x) = \dfrac{G(k)}{x^k}\right\}, & x \ge 1. \end{cases}$$

В этих обозначениях неравенство Джексона–Зинвела примет следующий вид:

$$E_n(f) \le \frac{\pi}{2}\lambda(n/a), \quad 1 < a < e, \quad \lambda(x) = \min_{0\le k\le x}\frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\theta(x)]}{x^{\theta(x)}}. \tag{4.2}$$

Теорема 5 (см. [14]). *При $x \ge 1$ функция $\theta(x)$ целочисленна и неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с x. Функция $\lambda(x)$ строго монотонно убывает, непрерывна справа и стремится к нулю при $x \to \infty$. Функция $\lambda(x)$ имеет разрывы слева лишь в точках разрыва функции $\theta(x)$.*

Следствие 3. При $p \ge 0$ верно предельное равенство $\lim\limits_{x\to\infty} x^p\lambda(x) = 0$.

Теорема 5 расширяет сферу практической применимости полиномиальной аппроксимации C^∞-гладких функций. Действительно, рассматривая C^∞-гладкие на отрезке $I \equiv [-1,1]$ функции, мы считали их бесконечно дифференцируемыми всюду вплоть до границ I. Представляет интерес и тот случай, когда производные функции f, будучи ограниченными в замкнутом промежутке I, допускают вблизи его концов рост, характер которого фиксирован с помощью некоторого числового параметра. Подобные ситуации типичны для вычислительной практики. Они возникают, например, при численном интегрировании функций, имеющих в режимах своего поведения резкие переходные зоны – "пограничные слои". Размеры этих переходных зон обычно характеризуются величиной числового параметра ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$, называемого толщиной пограничного слоя. Может ли это (если может, то как) обязательно отразиться на сходимости к нулю с ростом числа узлов n функционалов $\wp_n^{C,D}(f)$ погрешностей квадратурных формул (3.7)?

Проведенные К.И. Бабенко изыскания [16] сформировали представление о том, в каких именно конструктивных терминах удобно описывать указанную специфику задач и за счет каких ресурсов возможна ее компьютерная численная нейтрализация. Дадим более четкую формулировку этой проблемы, введя специальный термин, характеризующий рост градиентов функций вблизи концов отрезка I.

Определение (см. [14]). Функция $f(\tau)$, принадлежащая $C^\infty[I]$, имеет на $I \equiv [-1,1]$ пограничный слой толщиной $0 < \varepsilon_0 < 1$, если существуют малое положительное число $\eta = \eta(\varepsilon_0)$ и положительная функция $F(k)$, не зависящая от ε_0, такие что при любом целом $k \geq 0$ справедливо неравенство

$$\left|f^{(k)}(\tau)\right| \leq \begin{cases} F(k), & \tau \in I_\eta \equiv [-1+\eta, 1-\eta], \\ {\varepsilon_0}^{-k} F(k), & \tau \in I \backslash I_\eta. \end{cases} \tag{4.3}$$

Наводящим соображением к выяснению характера влияния пограничного слоя на величины погрешностей $\left|\wp_n^{C,D}(f)\right|$ квадратурных формул (3.7) будет служить следующий [17], восходящий к работе С.М. Никольского [18], результат.

Теорема (В.К. Дзядык). *Для того, чтобы k-я производная функции f удовлетворяла на отрезке $I \equiv [-1,1]$ условию Гёльдера с показателем $0 < \gamma < 1$, необходимо и достаточно, чтобы при любом целом $n \geq k$ существовал такой алгебраический многочлен $P_n \in \mathcal{P}^n$ степени $n-1$, что для всех $t \in I$ справедливы оценки*

$$\left|f(t) - P_n(t)\right| \leq \frac{A_k}{n^{k+\gamma}} \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n}\right)^{k+\gamma},$$

где A_k – постоянная, не зависящая от t и n.

Теорема Дзядыка усиливает неравенство Джексона–Зинвела (4.2), ибо при равномерной оценке $E_n(f) \leq M n^{-(k+\gamma)}$, устанавливает возможность приближения функции $f \in C^{k+\gamma}[I]$ вблизи концов отрезка I с погрешностью $O(n^{-2(k+\gamma)})$.

Следствием указанной фундаментальности, существующей в природе полиномиальной аппроксимации гладких функций на отрезке I, служит следующая

Теорема 6 (см. [14]). *Если f принадлежит $C^\infty[I]$ и выполнено* (4.3) *и $\eta = \varepsilon_0/2$, то*

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \min_{0 \leq k \leq n} \left(\frac{F_k {\varepsilon_0}^{-k/2}}{n^k}\right). \tag{4.4}$$

Коэффициенты F_k вычисляются по заданным значениям $F(k)$ из (4.3).

Прикладное значение оценки (4.4) для ненасыщаемых квадратурных формул (3.7) заключается в следующем: за счет перераспределения пограничного слоя по всему отрезку I его толщину удается увеличить до значения $\sqrt{\varepsilon_0}$. Этот факт и лежит в основе способа численной нейтрализации пограничного слоя толщиной $\varepsilon_0 > 0$.

В самом деле, согласно теореме 5, выполнимость неравенств

$$\left|\wp_n^C(f)\right|, \left|\wp_n^D(f)\right| \le 2\pi \min_{0\le k\le n} F_k/(n\sqrt{\varepsilon_0})^k \le \epsilon, \quad 0 < \epsilon \le \varepsilon_0, \tag{4.5}$$

представляющих условия нейтрализации пограничного слоя толщиной ε_0, обеспечивается выбором в формулах (3.7) числа узлов n, превышающих некоторое пороговое значение $n_{\min}(\varepsilon_0)$. Среди оценок (4.5), отвечающих различным $0 \le k \le n$, имеется наилучшая, номер которой $k_0 = \theta(n)$ – порядок максимальной производной, содержащейся в этой оценке; производные порядков $k > k_0$ могут влиять на величину самой оценки лишь в случае $n > n_{\min}$, поэтому нейтрализация пограничного слоя квадратурными формулами (3.7) осуществляется за счет выбора числа узлов $n > n_{\min}$.

Следовательно, наличие у подынтегральной функции больших запасов гладкости создает благоприятные предпосылки для эффективного построения числового ответа, причем интерес к C^∞-гладким функциям вовсе не кажется неестественным [6].

Квадратурные формулы с главным членом погрешности (т.е. насыщаемые – формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона и ряд других: см. [2]) способностью к нейтрализации пограничного слоя не обладают; для них пограничный слой является “камнем преткновения” при их компьютерной реализации.

Аппроксимация интегрального оператора K сводится к применению формул (3.7). Покажем, как это сделать. Представление (2.2) преобразуется к виду (см. [13])

$$K[\chi](s) = \int_0^\pi \chi(\sigma)A(\sigma,s)h_*^{-1}d\sigma - \int_0^\pi \chi(\sigma)B(\sigma,s)\ln(1-q)h_*^{-1}d\sigma, \tag{4.6}$$

в котором логарифмическая особенность выделяется явно, а $A(\sigma,s)$, $B(\sigma,s)$ – достаточно гладкие и равномерно непрерывные в области $[0,\pi]\times[0,\pi]$ функции.

Зафиксировав в (4.6) параметр $s \in (0,\pi)$ и заменив неявно переменную σ новой переменной $\tau \equiv \tau(\sigma,s) = \sin\frac{(\sigma-s)}{2}\Big/\sin\frac{(\sigma+s)}{2}$, получим

$$K[\chi](s) = \int_{-1}^{1} \Psi(\tau)\tilde{A}(\tau)d\tau - \int_{-1}^{1} \Psi(\tau)\tilde{B}(\tau)\ln|\tau|\,d\tau. \tag{4.7}$$

Здесь подвижная логарифмическая особенность в (4.6) перешла в неподвижную – середину отрезка I. А для функций $A(\sigma,s)$ и $B(\sigma,s)$, равномерно непрерывных на квадрате $[0,\pi]\times[0,\pi]$, выполняются при $k \ge 0$ соотношения:

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right)^k \tilde{g}(\tau) = \varepsilon^{-k}\left(\sin^2\frac{(\sigma+s)}{2}\frac{d}{d\sigma}\right)^k g(\sigma,s), \quad \varepsilon = 0.5\sin s, \tag{4.8}$$

где $\tilde{g} \equiv \tilde{g}(\tau) = g(\sigma(\tau,s),s)$, а в качестве $g(\sigma,s)$ используются функции $A(\sigma,s)$ или $B(\sigma,s)$; функция $\sigma(\tau,s)$ является обратной к функции $\tau(\sigma,s)$ и $\Psi(\tau) = \chi(\sigma(\tau,s))$.

Пограничный слой в (4.7) толщиной $\varepsilon_0 = 0.5\sin s$ выделен, в силу (4.8), явно. И потому вычисление элементов $a_{ik} = K[w_k](s_i)$ матрицы A квадратурными формулами (3.7) с числом узлов $n > n_{\min}(\varepsilon_0) > m \ge m_0$ позволяет его, согласно неравенству (4.5), эффективно нейтрализовать. При этом матрица $A = (a_{ij})$ вычисляется с любой заданной точностью $(1 + 2\|Q_m\|)e_m(\chi)$, поскольку из теоремы 4 (в силу оценки (4.1)) следует, что с ростом запаса гладкости решения χ задачи (2.1) скорость убывания к нулю характеристик $e_m(\chi)$ с ростом m только возрастает. Поэтому в отличие от методов, имеющих главный член погрешности, построенный метод с ростом параметра m, согласно теореме 4, самосовершенствуется и, преодолев барьер степенной сходимости, максимума своей эффективности – экспоненциальной сходимости (или *сверхсходимости*) – достигает, согласно следствию 2, на классе C_+^∞-гладких решений χ задачи (2.1). Так, если $\chi \in C_+^\infty$ и $G(k) = A^k k^{\beta k}$ при $A > 1$ и $\beta \ge 1$, то $e_m(\chi) \le ce^{-r\sqrt[\beta]{m}}$, где c, r – положительные константы.

Таким образом, информация о бесконечной гладкости решения χ задачи (2.1) обретает на практике особую важность, что принципиально отличает ненасыщаемый численный метод от метода с главным членом погрешности, т.е. насыщаемого. Сверхсходимость ненасыщаемого метода решения уравнения (2.1) обеспечивает экономность конструирования компьютерного числового ответа с точностью, определяемой исключительно аппроксимативными возможностями компакта C^∞-гладких функций, содержащего точное решение χ уравнения (2.1).

5. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (2.1)

В отборе итерационного метода решения системы уравнений (3.4) следует быть весьма осмотрительным, с тем чтобы не лишить метод практической целесообразности – допустимого по точности ответа. Одним из факторов, обеспечивающих эффективное его функционирование, является удачный выбор итерационных параметров. Причем сам выбор не является волюнтаристским: содержательность его всякий раз должна подкрепляться информацией, “скрывающейся” в спектральном портрете матрицы A и всецело определяемый способом дискретизации задачи (2.1): наличие у A кратных или достаточно близких собственных значений может серьезно сказаться на скорости сходимости итерационного процесса, ибо поведение степеней A^k определяется структурой спектра матрицы A. И худший случай, который может здесь представиться – это наличие у матрицы A жордановых клеток (отсутствие у A этих патологий отнюдь не очевидно, ввиду несамосопряженности задачи (2.1)).

Эту трудность удается преодолеть, ориентируясь на ключевые свойства оператора K задачи (2.1). Оператор K – компактен, ненулевые точки его спектра, т.е. вещественные простые полюсы резольвенты $R(\zeta, K) \equiv (K - \zeta I)^{-1}$, содержатся в промежутке $(-1,1]$, а его собственные функции ψ непрерывны [8].

Исходя из этого, выявим субстрат тех общих представлений, который позволяет автоматически, исходя из конкретно складывающейся ситуации, отбирать параметры итерационного процесса (3.6). Иными словами, покажем, что ненасыщаемая дискретизация задачи (2.1) приводит к алгебраической задаче (3.4) с “хорошей” матрицей A, наследующей спектральные свойства оператора K. И потому в ее спектральном портрете указанные патологии невозможны, если они отсутствуют у оператора K.

Действительно, рассмотрим спектральную задачу для оператора $K : C_+ \to C_+$:

$$K\psi = \lambda\psi, \quad \|\psi\| = 1. \tag{5.1}$$

Здесь число λ – это в точности искомое собственное значение задачи (5.1), а ψ – соответствующая числу λ собственная функция $\psi(s)$.

Далее, осуществляя по известной схеме дискретизацию задачи (5.1), получаем

$$A\bar{\psi} = \nu\bar{\psi}, \quad |\bar{\psi}|_\infty = 1. \tag{5.2}$$

Здесь ν и $\bar{\psi} \in \mathbb{R}^{m+1}$ – соответственно собственное значение и собственный вектор матрицы $A : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$, а компоненты $\bar{\psi}$ – приближенные значения в узлах s_j, $0 \le j \le m$, собственной функции ψ задачи (5.1) (матрица – A та же, что и в (3.4)).

Оценим возмущение, вносимое в собственное число λ спектральной задачи (5.1) отбрасываемой погрешностью – вектором $\delta = -JK[\psi - Q_m\psi]$, $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Идея решения этого вопроса заимствована нами из работы [19]. А реализовать ее удалось, используя теорию регулярных возмущений линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве [20]. Согласно этой теории, возмущение спектра оператора K связывается с равномерной (по норме) сходимостью последовательности приближающих K операторов KQ_m. Выбор интерполяционного проектора Q_m в форме (3.2) обеспечивает выполнение нужного свойства. Справедлива

Теорема 7 (см. [7]). *Последовательность операторов $\{KQ_m\}$ сходится при $m \to \infty$ равномерно к компактному оператору K задачи* (5.1):

$$\|K - KQ_m\| = \sup_{\|g\| \le 1} \|Kg - KQ_m g\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{5.3}$$

Указанные спектральные свойства оператора K задачи (5.1) в сочетании с введенным С.Л. Соболевым [21], [22] понятием близости операторов, отличным от близости по норме, дают возможность оценить, насколько близки спектры $\sigma(K)$ и $\sigma(KQ_m)$ двух несамосопряженных операторов, если близки сами операторы K и KQ_m.

Именно, выясним, как изменяются собственное значение λ и собственная функция ψ оператора K задачи (5.1) при малых (в равномерной норме) его возмущениях.

Теорема 8 (см. [7]). *Пусть внутри гладкого замкнутого контура* Γ_λ *на комплексной плоскости находится ровно одно собственное значение* λ *задачи* (5.1). *Тогда внутри* Γ_λ *имеется ровно одно собственное число* ν *матрицы* A *задачи* (5.2). *Справедлива также оценка погрешности*

$$|\nu - \lambda| \le c_4(m+1)^{1/2}|\delta|_\infty, \quad \text{где} \quad |\delta|_\infty \le \|K\|(1 + \|Q_m\|)e_m(\psi)$$

и положительная постоянная c_4 *вычисляется эффективно*.

Следствие 4. Матрица A имеет собственный вектор $\overline{\psi}$ такой, что

$$|\overline{\psi} - J\psi|_\infty \le c_5(m+1)^{1/2}|\delta|_\infty, \quad \text{где} \quad |\delta|_\infty \le \|K\|(1 + \|Q_m\|)e_m(\psi)$$

и положительная постоянная c_5 эффективно вычисляется.

Таким образом, число ν и полином $Q_m(s;\overline{\psi})$ – это искомые приближения к первому собственному числу λ и собственной функции ψ спектральной задачи (5.1).

Из теоремы 8 следует, что скорость сходимости последовательности приближенных решений $\nu \equiv \nu_m$ и $\overline{\psi} \equiv \overline{\psi}_m$ спектральной задачи (5.2) с ростом параметра $m \ge m_0$ определяется исключительно гладкостью собственной функции ψ задачи (5.1). Причем возмущение, вносимое построенной ненасыщаемой дискретизацией в спектральную проблему (5.1), зависит от близости резольвент операторов K и KQ_m вблизи первого собственного числа оператора K. При этом, если простое собственное значение λ оператора K хорошо отделено от остальных его собственных значений, то построенный нами итерационный процесс (3.6) численно устойчив.

Замечание 3. Элементы матрицы $A = (a_{ik})$, $a_{ik} = K[w_k](s_i)$, $0 \le k \le m$, $0 \le i \le m$, спектральной задачи (5.2) всегда определены с точностью, которая не может быть меньше $|\delta|_\infty$. Поэтому мы можем изменять элементы a_{ik} матрицы A на величину порядка $|\delta|_\infty = |JK[\psi - Q_m\psi]|_\infty$. Иначе говоря, задача абсолютно точного определения собственных чисел матрицы A лишена всякого смысла [23]. В общей ситуации имеет смысл лишь задача о “почти собственных значениях” матрицы A при величине невязки порядка $|\delta|_\infty$. Любой метод численного решения алгебраической задачи на собственные значения есть метод вычисления “почти собственных значений” и потому важно уметь адаптировать его к классу корректности рассматриваемой задачи. Из сказанного явствует, насколько важно осуществлять ненасыщаемые дискретизации спектральных задач.

Сделаем общее замечание о приближенном вычислении констант в приведенных оценках. Во всех случаях мы имели дело с тригонометрическими многочленами и при рассмотрении вопросов, относящихся к вычислению упомянутых в теоремах констант, придерживались практики, проиллюстрированной следующим примером.

Чтобы оценить максимум модуля тригонометрического многочлена $T(s)$ степени m, вычислим сначала его значения в равноотстоящих узлах $s_j = \dfrac{2\pi j}{2m+1}$, $j = 0, \ldots, 2m$. Затем, воспользовавшись неравенством Лебега [2], запишем оценку

$$\max_{0 \le s < 2\pi}|T(s)| \le \|Q_m\| \max_{0 \le j \le 2m+1}|T(s_j)| \equiv H, \quad \text{где} \quad \|Q_m\| \le 3 + 2\pi^{-2}\ln m.$$

Далее, по теореме С.Н. Бернштейна [2], имеем $|T^{(k)}| \le m^k H$.

Пусть $M \gg m$. Вычислим значение $T(s)$ по бóльшему числу узлов $\sigma_j = \dfrac{2\pi j}{2M+1}$, $j = 0, \ldots, 2M$. Если σ_* – точка максимума многочлена $|T(s)|$, $\sigma_l \le \sigma_* \le \sigma_{l+1}$, то по формуле Тейлора имеем в некоторой точке $\boldsymbol{\sigma}$, $\sigma_l \le \boldsymbol{\sigma} \le \sigma_*$:

$$|T(\sigma_l) - T(\sigma_*)| = \frac{(\sigma_l - \sigma_*)^2}{2}|T''(\boldsymbol{\sigma})|, \quad \text{то есть} \quad |T(\sigma_l) - T(\sigma_*)| \le \frac{H}{2}\left(\frac{\pi m}{2M+1}\right)^2.$$

Выбирая число M подходящим образом, можем оценить $\max\limits_{0\le s<2\pi}|T(s)|$ по узловым значениям $|T(s_j)|$, $j = 0, \ldots, 2M$. Учитывая, что в величине $\max\limits_{0\le s<2\pi}|T(s)|$ нужно лишь небольшое число значащих цифр, вычисления такого рода легко осуществить для полиномов $T(s)$ не очень больших степеней.

Методика численного решения задачи (2.1) протестирована нами на эллипсоиде вращения с удлинением, равным 1000 (“игла”), как наиболее “трудном” для компьютерных расчетов примером. Задача ставилась таким образом, чтобы было получено большое количество верных десятичных разрядов в отыскиваемом решении задачи (2.1) при сравнительно небольших размерах матриц линейных алгебраических систем, к решению которых сводится задача. Численное решение задачи с 8–10 верными десятичными разрядами было получено при следующих, принятых в алгоритме, значениях числовых параметров: $m = 20$ (теорема 1), $n = 501$ (теорема 6) (см. [13], [24]).

Проведенные компьютерные расчеты свидетельствуют о преимуществе ненасыщаемых численных методов при решении эллиптических краевых задач, в то время как удлинение эллипсоида, равное 25, оказывается непреодолимым препятствием для любых насыщаемых (т.е. с главным членом погрешности) численных методов [2].

Таким образом, построенная в работе ненасыщаемая методика численного решения уравнения (2.1) с компактным оператором K снабжает нас элегантным вычислительным средством, способным в дискретизованной форме наследовать как дифференциальные, так и спектральные характеристики оператора K. Это служит основанием для построения компьютерного числового ответа гарантированной точности [5], если решение χ уравнения (2.1) достаточно гладкое, например, C^∞-гладкое.

Не стоит, однако, заблуждаться, полагая, что сколько-нибудь существенный прогресс для гладких трехмерных областей возможен простым переносом его с осесимметричного случая. Общий трехмерный случай все еще далек от теоретического изыска осесимметричного и требует привлечения глубоких фактов многомерного анализа: проблема ненасыщаемой аппроксимации функций на гладких многообразиях, гомеоморфных двумерной сфере, до сих пор эффективно не разрешена [25], [26]. И ее разрешение, как и предсказывает теория [1], [2], относится к сфере в уже гораздо бóльшей степени интеллектуальной, и на первый план выдвигается проблема конструирования ненасыщаемых кубатурных формул [27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Babenko K.I.* Estimating the quality of computational algorithms. Part 1, 2 // Computer methods in applied and engineering. 1976. V. 7. P. 47–73, 135–152.
2. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. (2-е издание. М.–Ижевск: РХД, 2002).
3. *Белых В.Н.* О колмогоровской ε-энтропии одного компакта C^∞-гладких непериодических функций (к проблеме К.И. Бабенко) // Докл. АН. 2018. Т. 482. № 2. С. 125–129.
4. *Белых В.Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. матем. журнал. 2005. Т. 46. № 3. С. 483–499.
5. *Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: ВО “Наука”, 1992.
6. *Белых В.Н.* Ненасыщаемый численный метод решения внешней осесимметричной задачи Неймана для уравнения Лапласа // Сиб. матем. журнал. 2011. Т. 52. № 6. С. 1234–1252.
7. *Белых В.Н.* Особенности реализации ненасыщаемого численного метода для внешней осесимметричной задачи Неймана // Сиб. матем. журнал. 2013. Т. 54. № 6. С. 1237–1249.
8. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
9. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006.
10. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Изд-во “АИСнТ”, 2016.
11. *Белых В.Н.* Алгоритмы вычисления полных эллиптических интегралов и некоторых связанных с ними функций // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15. № 2. С. 21–32.
12. *Анучина Н.Н., Бабенко К.И., Годунов С.К. и др.* Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К.И. Бабенко. М.: Наука, 1977.

13. *Белых В.Н.* К проблеме численной реализации интегральных операторов осесимметричных краевых задач (алгоритмы без насыщения) // Уфим. матем. журнал. 2012. Т. 4. № 4. С. 22–37.
14. *Белых В.Н.* К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на отрезке // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 1. С. 27–62.
https://doi.org/10.4213/sm8984
15. *Sinwel H.F.* Uniform approximation of differentiable functions by algebraic polynomials // J. Approx. Theory. 1981. V. 32. № 1. P. 1–8.
16. *Бабенко К.И., Стебунов В.А.* О спектральной задаче Орра-Зоммерфельда. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 1975. № 93.
17. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
18. *Никольский С.М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10. № 4. С. 295–322.
19. *Алгазин С.Д.* О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов // Сиб. матем. журнал. 1983. Т. 24. № 2. С. 3–8.
20. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
21. *Соболев С.Л.* Замыкание вычислительных алгоритмов и некоторые его применения. М.: АН СССР, 1955.
22. *Соболев С.Л.* Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20. № 4. С. 413–436.
23. *Годунов С.К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002.
24. *Белых В.Н.* К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // Прикл. механ. и техн. физ. 2006. Т. 47. № 5. С. 56–67.
25. *Бабенко К.И.* Несколько замечаний о приближении функций многих переменных // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 4 (12). С. 499–517.
26. *Никольский С.М.* Приближение функций многочленами на многообразии // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 1. С 44–46.
27. *Васкевич В.Л.* Гарантированная точность вычисления многомерных интегралов, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Новосибирск: ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, 2003.