ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 4, с. 626–638

УДК 517.955

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1)]

© 2020 г. Л. Н. Бондарь[1], Г. В. Демиденко[1,*], Г. М. Пинтус[2]

[1] *630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия*

[2] *630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский государственный университет, Россия*

**e-mail: demidenk@math.nsc.ru*

Поступила в редакцию 14.11.2019 г.
После доработки 14.11.2019 г.
Принята к публикации 16.12.2019 г.

Рассматривается задача Коши для одной псевдогиперболической системы. Доказывается однозначная разрешимость этой задачи в соболевских пространствах. Системы такого типа возникают при описании волновой динамики в стержнях. Библ. 13.

Ключевые слова: псевдогиперболическая система, задача Коши, анизотропное соболевское пространство, изгибно-крутильные колебания.

DOI: 10.31857/S0044466920040055

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача Коши для системы уравнений, не разрешенных относительно старшей производной:

$$
\begin{gathered}
(I - D_x^2)D_t^2 u - L_{11}(D_x)u - L_{12}(D_x)v + c^2 D_x^4 u + \varepsilon(D_t^2 - c^2 D_x^2)D_x^2 v = f_1(t,x),\\
(I - D_x^2)D_t^2 v - L_{21}(D_x)u - L_{22}(D_x)v + c^2 D_x^4 v + \varepsilon(D_t^2 - c^2 D_x^2)D_x^2 u = f_2(t,x),\\
u\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad v\big|_{t=0} = \psi_1(x),\\
D_t u\big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad D_t v\big|_{t=0} = \psi_2(x),
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

в полуплоскости $R_+^2 = \{t > 0,\ x \in R\}$, где $c > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $L_{ij}(D_x)$, $i, j = 1, 2$, – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, порядки которых не превышают трех.

Системы вида (1.1) относятся к классу псевдогиперболических уравнений [1]. Примером такой системы является система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие изгибных и крутильных волн в балке без учета нелинейности (см. [2, гл. 3]):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где $c > 1$, $0 \le \varepsilon < 1$. Действительно, система имеет вид (1.1), если в качестве дифференциальных операторов $L_{ij}(D_x)$ взять следующие:

$$
L_{11}(D_x) = D_x^2, \quad L_{12}(D_x) = L_{21}(D_x) = L_{22}(D_x) = 0.
$$

[1)]Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1613.

В вырожденном случае, когда $\varepsilon = 0$, система (1.2) распадается на два псевдогиперболических уравнения:

$$\begin{gathered}(I - D_x^2)D_t^2 u + c^2 D_x^4 u - D_x^2 u = f_1(t,x),\\ (I - D_x^2)D_t^2 v + c^2 D_x^4 v = f_2(t,x).\end{gathered} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) называется уравнением Релея—Бишопа [3]. Теоремы о разрешимости задачи Коши для таких уравнений см. [4]. Отметим, что определение класса псевдогиперболических уравнений:

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x)$$

было дано в монографии [1, гл. 2]. Там же содержатся первые теоремы о разрешимости задачи Коши для этого класса уравнений. Результаты дальнейших исследований по теории псевдогиперболических уравнений см., например, в работах [4]—[7].

Наша цель — доказательство однозначной разрешимости задачи Коши (1.1) в соболевских пространствах.

Дадим определения соответствующих пространств (см. [1], [8]).

Определение 1. Функция $u(t,x) \in L_2(G)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_2^{l_1,l_2}(G)$, $G \subseteq R^2$, $l_1, l_2 \in N$, если существуют обобщенные производные

$$D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x), \quad \alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \le 1,$$

в области G, при этом

$$D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x) \in L_2(G).$$

Введем норму

$$\left\| u, W_2^{l_1,l_2}(G) \right\| = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2)} \left\| D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u, L_2(G) \right\|.$$

Определение 2. Функция $u(t,x)$ принадлежит анизотропному весовому соболевскому пространству $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)$, $\gamma > 0$, если $e^{-\gamma t}u(t,x) \in W_2^{l_1,l_2}(G)$. Полагаем

$$\left\| u(t,x), W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G) \right\| = \left\| e^{-\gamma t} u(t,x), W_2^{l_1,l_2}(G) \right\|.$$

Теорема 1. *Пусть* $L_{ij}(D_x) = 0$, $i, j = 1,2$,

$$f_j(t,x) = 0, \quad j = 1,2, \quad \varphi_1(x), \psi_1(x) \in W_2^4(R), \quad \varphi_2(x), \psi_2(x) \in W_2^3(R).$$

Тогда задача Коши (1.1) *имеет единственное решение* $U(t,x) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$ *в пространстве вектор-функций* $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, $\gamma > 0$, *таких, что* $D_t^2 D_x^2 U \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$, *при этом справедлива оценка:*

$$\left\| u, W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2) \right\| + \left\| v, W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2) \right\| \le c_1(\gamma)\left(\left\| \varphi_1, W_2^4(R) \right\| + \left\| \psi_1, W_2^4(R) \right\| + \left\| \varphi_2, W_2^3(R) \right\| + \left\| \psi_2, W_2^3(R) \right\| \right), \tag{1.4}$$

где $c_1(\gamma)$ — *константа, зависящая от коэффициентов системы и* γ.

Определение 3. Функция $f(t,x)$ принадлежит соболевскому пространству $W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)$, $\gamma > 0$, если $e^{-\gamma t} f(t,x) \in L_2(R_+^2)$, существует обобщенная производная $D_x f(t,x)$ в R_+^2, при этом

$$e^{-\gamma t} D_x f(t,x) \in L_2(R_+^2).$$

Полагаем

$$\left\| f(t,x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2) \right\| = \left\| e^{-\gamma t} f(t,x), L_2(R_+^2) \right\| + \left\| e^{-\gamma t} D_x f(t,x), L_2(R_+^2) \right\|.$$

Теорема 2. *Пусть* $L_{ij}(D_x) = 0$, $i, j = 1, 2$,

$$\varphi_j(x) = \psi_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \quad f_1(t, x), f_2(t, x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2), \quad \gamma > 0.$$

Тогда задача Коши (1.1) *имеет единственное решение* $U(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix}$ *в пространстве вектор-функций* $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, $\gamma > 0$, *таких, что* $D_t^2 D_x^2 U \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$, *при этом справедлива оценка:*

$$\left\| u, W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2) \right\| + \left\| v, W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2) \right\| \le c_2(\gamma) \left(\left\| f_1, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2) \right\| + \left\| f_2, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2) \right\| \right), \tag{1.5}$$

где $c_2(\gamma)$ — *константа, зависящая от коэффициентов системы и* γ.

Приведем теперь результаты о разрешимости в случае, когда операторы $L_{ij}(D_x)$, $i, j = 1, 2$, не тривиальные.

Теорема 3. *Пусть*

$$\varphi_1(x), \psi_1(x) \in W_2^4(R), \quad \varphi_2(x), \psi_2(x) \in W_2^3(R).$$

Существует $\gamma_0 > 1$ *такое, что при*

$$f_1(t, x), f_2(t, x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2), \quad \gamma > \gamma_0,$$

задача Коши (1.1) *имеет единственное решение* $U(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix}$ *в пространстве вектор-функций* $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_x^2 U \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$,

$$\begin{gathered} \left\| u, W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2) \right\| + \left\| v, W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2) \right\| \le c_3(\gamma_0) \left(\left\| \varphi_1, W_2^4(R) \right\| + \left\| \psi_1, W_2^4(R) \right\| + \right. \\ \left. + \left\| \varphi_2, W_2^3(R) \right\| + \left\| \psi_2, W_2^3(R) \right\| + \left\| f_1, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2) \right\| + \left\| f_2, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2) \right\| \right), \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $c_3(\gamma_0)$ — *константа, зависящая от коэффициентов системы и* γ_0.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим задачу Коши (1.1) для однородной системы в случае, когда все дифференциальные операторы $L_{ij}(D_x)$ нулевые:

$$\begin{gathered} (I - D_x^2) D_t^2 u + c^2 D_x^4 u + \varepsilon (D_t^2 - c^2 D_x^2) D_x^2 v = 0, \quad t > 0, \\ (I - D_x^2) D_t^2 v + c^2 D_x^4 v + \varepsilon (D_t^2 - c^2 D_x^2) D_x^2 u = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad v\big|_{t=0} = \psi_1(x), \\ D_t u\big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad D_t v\big|_{t=0} = \psi_2(x). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Докажем однозначную разрешимость задачи Коши (2.1) в весовом соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$ и получим оценку на решение.

Доказательство теоремы 1. Для построения решения задачи (2.1) рассмотрим вспомогательную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\xi \in R$, которая получается при формальном применении оператора Фурье по x к задаче (2.1):

$$\begin{gathered} (1 + \xi^2) D_t^2 \hat{u} + c^2 \xi^4 \hat{u} - \varepsilon (D_t^2 + c^2 \xi^2) \xi^2 \hat{v} = 0, \quad t > 0, \\ (1 + \xi^2) D_t^2 \hat{v} + c^2 \xi^4 \hat{v} - \varepsilon (D_t^2 + c^2 \xi^2) \xi^2 \hat{u} = 0, \\ \hat{u}\big|_{t=0} = \hat{\varphi}_1(\xi), \quad \hat{v}\big|_{t=0} = \hat{\psi}_1(\xi), \\ D_t \hat{u}\big|_{t=0} = \hat{\varphi}_2(\xi), \quad D_t \hat{v}\big|_{t=0} = \hat{\psi}_2(\xi). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Перепишем задачу Коши (2.2) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 + \xi^2 & -\varepsilon \xi^2 \\ -\varepsilon \xi^2 & 1 + \xi^2 \end{pmatrix} D_t^2 \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^2 \xi^4 & -\varepsilon c^2 \xi^4 \\ -\varepsilon c^2 \xi^4 & c^2 \xi^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{v}\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix}\hat{\varphi}_1(\xi)\\ \hat{\psi}_1(\xi)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}D_t\hat{u}\\ D_t\hat{v}\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix}\hat{\varphi}_2(\xi)\\ \hat{\psi}_2(\xi)\end{pmatrix}.$$

Введем следующие обозначения:

$$y(t,\xi) = \begin{pmatrix}\hat{u}(t,\xi)\\ \hat{v}(t,\xi)\\ D_t\hat{u}(t,\xi)\\ D_t\hat{v}(t,\xi)\end{pmatrix}, \quad y_0(\xi) = \begin{pmatrix}\hat{\varphi}_1(\xi)\\ \hat{\psi}_1(\xi)\\ \hat{\varphi}_2(\xi)\\ \hat{\psi}_2(\xi)\end{pmatrix},$$

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -d(\xi)\xi^4(1+(1-\varepsilon^2)\xi^2) & \varepsilon d(\xi)\xi^4 & 0 & 0\\ \varepsilon d(\xi)\xi^4 & -d(\xi)\xi^4(1+(1-\varepsilon^2)\xi^2) & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$d(\xi) = \frac{c^2}{(1+(1-\varepsilon)\xi^2)(1+(1+\varepsilon)\xi^2)}.$$

Учитывая обозначения, задачу Коши (2.2) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dt} = A(\xi)y,$$
$$y\big|_{t=0} = y_0(\xi),$$

и отсюда

$$y(t,\xi) = e^{tA(\xi)}y_0(\xi).$$

Для получения оценок компонент вектор-функции $y(t,\xi)$ нам удобно записать матричную экспоненту в виде матричного полинома третьей степени со специальными коэффициентами (см. [9])

$$e^{tA(\xi)} = \psi_1(t,\xi)E + \psi_2(t,\xi)(A-\lambda_1E) + \psi_3(t,\xi)(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E) + \\ + \psi_4(t,\xi)(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)(A-\lambda_3E),$$

где

$$\psi_1(t,\xi) = e^{\lambda_1 t}, \quad \psi_2(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$\psi_3(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} - \frac{e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)} + \frac{e^{\lambda_3 t}}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)},$$

$$\psi_4(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} - \frac{e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)} + \\ + \frac{e^{\lambda_3 t}}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_4)} - \frac{e^{\lambda_4 t}}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}$$

и

$$\lambda_{1,2} = \pm ic\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2}}\xi^2, \quad \lambda_{3,4} = \pm ic\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)}{1+(1+\varepsilon)\xi^2}}\xi^2,$$

— суть собственные числа матрицы $A(\xi)$. Нетрудно показать, что матричная экспонента $e^{tA(\xi)}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos(\tau_1 t)+\cos(\tau_2 t)}{2} & \frac{\cos(\tau_1 t)-\cos(\tau_2 t)}{2} & \frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}+\frac{\sin(\tau_2 t)}{2\tau_2} & \frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}-\frac{\sin(\tau_2 t)}{2\tau_2} \\ \frac{\cos(\tau_1 t)-\cos(\tau_2 t)}{2} & \frac{\cos(\tau_1 t)+\cos(\tau_2 t)}{2} & \frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}-\frac{\sin(\tau_2 t)}{2\tau_2} & \frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}+\frac{\sin(\tau_2 t)}{2\tau_2} \\ -\frac{\tau_1\sin(\tau_1 t)+\tau_2\sin(\tau_2 t)}{2} & \frac{-\tau_1\sin(\tau_1 t)+\tau_2\sin(\tau_2 t)}{2} & \frac{\cos(\tau_1 t)+\cos(\tau_2 t)}{2} & \frac{\cos(\tau_1 t)-\cos(\tau_2 t)}{2} \\ \frac{-\tau_1\sin(\tau_1 t)+\tau_2\sin(\tau_2 t)}{2} & -\frac{\tau_1\sin(\tau_1 t)+\tau_2\sin(\tau_2 t)}{2} & \frac{\cos(\tau_1 t)-\cos(\tau_2 t)}{2} & \frac{\cos(\tau_1 t)+\cos(\tau_2 t)}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где

$$\tau_1 = c\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2}\xi^2}, \quad \tau_2 = c\sqrt{\frac{(1+\varepsilon)}{1+(1+\varepsilon)\xi^2}\xi^2}. \tag{2.5}$$

Следовательно, решение задачи Коши (2.2) представимо в виде

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,\xi) &= \hat{u}_1(t,\xi)+\hat{u}_2(t,\xi)+\hat{u}_3(t,\xi)+\hat{u}_4(t,\xi), \\ \hat{v}(t,\xi) &= \hat{u}_1(t,\xi)-\hat{u}_2(t,\xi)+\hat{u}_3(t,\xi)-\hat{u}_4(t,\xi), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\hat{u}_1(t,\xi) = \frac{\cos(\tau_1 t)}{2}(\hat{\varphi}_1(\xi)+\hat{\psi}_1(\xi)), \quad \hat{u}_2(t,\xi) = \frac{\cos(\tau_2 t)}{2}(\hat{\varphi}_1(\xi)-\hat{\psi}_1(\xi)),$$

$$\hat{u}_3(t,\xi) = \frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}(\hat{\varphi}_2(\xi)+\hat{\psi}_2(\xi)), \quad \hat{u}_4(t,\xi) = \frac{\sin(\tau_2 t)}{2\tau_2}(\hat{\varphi}_2(\xi)-\hat{\psi}_2(\xi)).$$

Покажем, что функции из (2.6)

$$\hat{u}_j(t,\xi), D_t^2\hat{u}_j(t,\xi), \xi^2 D_t^2\hat{u}_j(t,\xi), \xi^4\hat{u}_j(t,\xi), \quad j = 1, \dots, 4,$$

принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(R_+^2)$. Для первых двух функций в силу равенства Парсеваля, очевидно, имеем

$$\left\|\hat{u}_1(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le \frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\left(\|\varphi_1, L_2(R)\| + \|\psi_1, L_2(R)\|\right), \tag{2.7}$$

$$\left\|\hat{u}_2(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le \frac{1}{2\sqrt{2\gamma}}\left(\|\varphi_1, L_2(R)\| + \|\psi_1, L_2(R)\|\right). \tag{2.8}$$

Оценим функцию $\hat{u}_3(t,\xi)$:

$$\left\|\hat{u}_3(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| = \left\|\left\|\frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}, L_{2,\gamma}(R_+)\right\|(\hat{\varphi}_2(\xi)+\hat{\psi}_2(\xi)), L_2(R)\right\| \le I_1 + I_2, \tag{2.9}$$

где

$$I_1 = \left\|\left\|\frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}, L_{2,\gamma}(R_+)\right\|(\hat{\varphi}_2(\xi)+\hat{\psi}_2(\xi)), L_2(|\xi|>1)\right\|,$$

$$I_2 = \left\|\left\|\frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}, L_{2,\gamma}(R_+)\right\|(\hat{\varphi}_2(\xi)+\hat{\psi}_2(\xi)), L_2(|\xi|<1)\right\|.$$

Заметим, что из определения (2.5) вытекает

$$\left|\frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}\right| \le \frac{c_1}{|\xi|}, \quad |\xi| > 1, \tag{2.10}$$

а из представления

$$\sin(\tau_1 t) = \tau_1 t \int_0^1 \cos(\alpha \tau_1 t) d\alpha$$

следует

$$\left| \frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1} \right| \le \frac{t}{2}, \quad |\xi| < 1. \tag{2.11}$$

Учитывая (2.10), (2.11), равенство Парсеваля, из (2.9) будем иметь

$$\left\| \hat{u}_3(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le c_4 \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma^3}} \right) \left(\|\varphi_2, L_2(R)\| + \|\psi_2, L_2(R)\| \right). \tag{2.12}$$

Аналогично получаем оценку на $\hat{u}_4(t,\xi)$:

$$\left\| \hat{u}_4(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le c_5 \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma^3}} \right) \left(\|\varphi_2, L_2(R)\| + \|\psi_2, L_2(R)\| \right). \tag{2.13}$$

В силу представления (2.6), оценок (2.7), (2.8), (2.12), (2.13), учитывая равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{gathered} \left\| u(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| + \left\| v(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le c_6 \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma^3}} \right) \left(\|\varphi_1(x), L_2(R)\| + \|\psi_1(x), L_2(R)\| + \right. \\ \left. + \|\varphi_2(x), L_2(R)\| + \|\psi_2(x), L_2(R)\| \right). \end{gathered} \tag{2.14}$$

Оценим $D_t^2 |\xi|^\alpha \hat{u}_j(t,\xi)$, $\alpha = 0, 2$, $j = 1, \ldots, 4$. Воспользуемся представлением (2.6).

Учитывая

$$\tau_1 \le c|\xi|, \quad \xi \in R,$$

в силу равенства Парсеваля, получаем

$$\begin{gathered} \left\| D_t^2 |\xi|^\alpha \hat{u}_1(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| = \left\| |\xi|^\alpha \frac{\tau_1^2 \cos(\tau_1 t)}{2} (\hat{\varphi}_1(\xi) + \hat{\psi}_1(\xi)), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le \\ \le \frac{c^2}{2} \left\| |\xi|^{\alpha+2} (\hat{\varphi}_1(\xi) + \hat{\psi}_1(\xi)), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le \frac{c^2}{2\sqrt{2\gamma}} \left(\left\| D_x^{\alpha+2} \varphi_1, L_2(R) \right\| + \left\| D_x^{\alpha+2} \psi_1, L_2(R) \right\| \right). \end{gathered} \tag{2.15}$$

Аналогично при $\alpha = 0$, 2 получаем

$$\left\| D_t^2 |\xi|^\alpha \hat{u}_2(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le \frac{c^2}{2\sqrt{2\gamma}} \left(\left\| D_x^{\alpha+2} \varphi_1, L_2(R) \right\| + \left\| D_x^{\alpha+2} \psi_1, L_2(R) \right\| \right), \tag{2.16}$$

$$\left\| D_t^2 |\xi|^\alpha \hat{u}_3(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le \frac{c}{2\sqrt{2\gamma}} \left(\left\| D_x^{\alpha+1} \varphi_2, L_2(R) \right\| + \left\| D_x^{\alpha+1} \psi_2, L_2(R) \right\| \right), \tag{2.17}$$

$$\left\| D_t^2 |\xi|^\alpha \hat{u}_4(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le \frac{c}{2\sqrt{2\gamma}} \left(\left\| D_x^{\alpha+1} \varphi_2, L_2(R) \right\| + \left\| D_x^{\alpha+1} \psi_2, L_2(R) \right\| \right). \tag{2.18}$$

Из (2.6), с учетом оценок (2.15)–(2.18) при $\alpha = 0$, 2 будем иметь

$$\begin{gathered} \left\| D_t^2 D_x^\alpha u(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| + \left\| D_t^2 D_x^\alpha v(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\| \le \frac{c_7}{\sqrt{\gamma}} \left(\left\| D_x^{\alpha+2} \varphi_1(x), L_2(R) \right\| + \left\| D_x^{\alpha+2} \psi_1(x), L_2(R) \right\| + \right. \\ \left. + \left\| D_x^{\alpha+1} \varphi_2(x), L_2(R) \right\| + \left\| D_x^{\alpha+1} \psi_2(x), L_2(R) \right\| \right). \end{gathered} \tag{2.19}$$

Проводя подобные рассуждения, что и при получении (2.14), учитывая (2.10), (2.11), нетрудно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned}\left\|D_x^4u(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\|D_x^4v(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le c_8\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma^3}}\right)\Big(\left\|D_x^4\varphi_1(x), L_2(R)\right\| + \\ + \left\|D_x^4\psi_1(x), L_2(R)\right\| + \left\|D_x^3\varphi_2(x), L_2(R)\right\| + \left\|D_x^3\psi_2(x), L_2(R)\right\|\Big).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Из (2.14), (2.19), (2.20) следует требуемая оценка (1.4).

Докажем единственность. Проведем доказательство от противного. Рассмотрим два произвольных различных решения u_1, v_1 и u_2, v_2 задачи Коши (2.1). Тогда ненулевые функции $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$ также являются решением задачи Коши (2.1) при $\varphi_j = 0$, $\psi_j = 0$, $j = 1,2$. Применяя преобразование Фурье по x к задаче Коши (2.1), получаем задачу Коши (2.2) с нулевыми начальными условиями, или, обозначив через

$$y(t,\xi) = \begin{pmatrix} \hat{u}(t,\xi) \\ \hat{v}(t,\xi) \\ D_t\hat{u}(t,\xi) \\ D_t\hat{v}(t,\xi)\end{pmatrix},$$

получаем задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = A(\xi)y, \qquad y\big|_{t=0} = 0,$$

где $A(\xi)$ из (2.3). Однако решение этой задачи тождественно равно нулю. Следовательно, $\hat{u}(t,\xi) \equiv \hat{v}(t,\xi) \equiv 0$ и значит $u(t,x) = 0$, $v(t,x) = 0$ — противоречие.

Теорема доказана.

3. ЗАДАЧА КОШИ С НУЛЕВЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Продолжим изучать задачу Коши (1.1) для системы дифференциальных уравнений в случае, когда все операторы $L_{ij}(D_x)$ нулевые. Но теперь будем рассматривать неоднородную систему с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{gathered}(I - D_x^2)D_t^2u + c^2D_x^4u + \varepsilon(D_t^2 - c^2D_x^2)D_x^2v = f_1(t,x),\\ (I - D_x^2)D_t^2v + c^2D_x^4v + \varepsilon(D_t^2 - c^2D_x^2)D_x^2u = f_2(t,x),\\ u\big|_{t=0} = 0, \quad v\big|_{t=0} = 0,\\ D_tu\big|_{t=0} = 0, \quad D_tv\big|_{t=0} = 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Докажем однозначную разрешимость задачи (3.1) в весовом соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$.

Доказательство теоремы 2. Для построения решения задачи (3.1), как и в предыдущем параграфе, рассмотрим следующую задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\xi \in R$

$$\begin{gathered}(1+\xi^2)D_t^2\hat{u} + c^2\xi^4\hat{u} - \varepsilon(D_t^2 + c^2\xi^2)\xi^2\hat{v} = \hat{f}_1(t,\xi),\\ (1+\xi^2)D_t^2\hat{v} + c^2\xi^4\hat{v} - \varepsilon(D_t^2 + c^2\xi^2)\xi^2\hat{u} = \hat{f}_2(t,\xi),\\ \hat{u}\big|_{t=0} = 0, \quad \hat{v}\big|_{t=0} = 0,\\ D_t\hat{u}\big|_{t=0} = 0, \quad D_t\hat{v}\big|_{t=0} = 0.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Перепишем задачу Коши (3.2) в эквивалентном виде:

$$\frac{dy}{dt} = A(\xi)y + F(t,\xi), \qquad y\big|_{t=0} = 0,$$

где

$$y(t,\xi)=\begin{pmatrix}\hat{u}(t,\xi)\\ \hat{v}(t,\xi)\\ D_t\hat{u}(t,\xi)\\ D_t\hat{v}(t,\xi)\end{pmatrix},\quad F(t,\xi)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{(1+\xi^2)\hat{f}_1(t,\xi)+\varepsilon\xi^2\hat{f}_2(t,\xi)}{(1+(1-\varepsilon)\xi^2)(1+(1+\varepsilon)\xi^2)}\\ \dfrac{\varepsilon\xi^2\hat{f}_1(t,\xi)+(1+\xi^2)\hat{f}_2(t,\xi)}{(1+(1-\varepsilon)\xi^2)(1+(1+\varepsilon)\xi^2)}\end{pmatrix},$$

$A(\xi)$ из (2.3). Учитывая (2.4) и формулу

$$y(t,\xi)=\int_0^t e^{(t-s)A(\xi)}F(s,\xi)ds,$$

решение задачи Коши (3.2) представимо в виде

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi)&=u_{f,1}(t,\xi)+u_{f,2}(t,\xi),\\ \hat{v}(t,\xi)&=u_{f,1}(t,\xi)-u_{f,2}(t,\xi),\end{aligned}\tag{3.3}$$

где

$$u_{f,1}(t,\xi)=\int_0^t\frac{\sin(\tau_1(t-s))}{2\tau_1}\frac{\hat{f}_1(s,\xi)+\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2}ds,\tag{3.4}$$

$$u_{f,2}(t,\xi)=\int_0^t\frac{\sin(\tau_2(t-s))}{2\tau_2}\frac{\hat{f}_1(s,\xi)-\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1+\varepsilon)\xi^2}ds,\tag{3.5}$$

τ_1, τ_2 – из (2.5).

Учитывая представление (3.4), определение функции Хевисайда $\theta(t)$, а также неравенство Юнга, имеем:

$$\left\||\xi|^\alpha u_{f,1}(t,\xi),L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|=\left\||\xi|^\alpha\int_0^t e^{-\gamma t}\frac{\sin(\tau_1(t-s))}{2\tau_1}\frac{\hat{f}_1(s,\xi)+\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2}ds,L_2(R_+^2)\right\|=$$

$$=\left\||\xi|^\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\theta(t-s)e^{-\gamma(t-s)}\frac{\sin(\tau_1(t-s))}{2\tau_1}\frac{\hat{f}_1(s,\xi)+\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2}\theta(s)e^{-\gamma s}ds,L_2(R^2)\right\|\le$$

$$\le\left\||\xi|^\alpha\left\|\theta(t)e^{-\gamma t}\frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1},L_1(R)\right\|\left\|\theta(s)\frac{\hat{f}_1(s,\xi)+\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2}e^{-\gamma s},L_2(R)\right\|,L_2(R)\right\|=$$

$$=\left\||\xi|^\alpha\int_0^\infty e^{-\gamma t}\left|\frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}\right|dt\left\|\frac{\hat{f}_1(s,\xi)+\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2},L_{2,\gamma}(R_+)\right\|,L_2(R)\right\|.$$

Воспользуемся неравенствами (2.10), (2.11), получим

$$\left\||\xi|^\alpha u_{f,1}(t,\xi),L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|\le\left\||\xi|^\alpha\int_0^\infty e^{-\gamma t}\left|\frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}\right|dt\left\|\frac{\hat{f}_1(s,\xi)+\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2},L_{2,\gamma}(R_+)\right\|,L_2(|\xi|>1)\right\|+$$

$$+\left\||\xi|^\alpha\int_0^\infty e^{-\gamma t}\left|\frac{\sin(\tau_1 t)}{2\tau_1}\right|dt\left\|\frac{\hat{f}_1(s,\xi)+\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2},L_{2,\gamma}(R_+)\right\|,L_2(|\xi|<1)\right\|\le$$

$$\le c_1\left\||\xi|^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-\gamma t}dt\left\|\frac{\hat{f}_1(s,\xi)+\hat{f}_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2},L_{2,\gamma}(R_+)\right\|,L_2(|\xi|>1)\right\|+$$

$$+ c_2\left\|\int_0^\infty te^{-\gamma t}dt\left\|\frac{\hat f_1(s,\xi)+\hat f_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2}, L_{2,\gamma}(R_+)\right\|, L_2\,(|\xi|<1)\right\|.$$

А поскольку

$$\begin{gathered} 1+b\xi^2 \ge b\xi^2, \quad |\xi|>1, \\ 1+b\xi^2 \ge 1, \quad |\xi|<1, \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $b = (1\pm\varepsilon)$, будем иметь

$$\begin{gathered} \left\||\xi|^\alpha u_{f,1}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le \frac{c_3}{\gamma}\left\||\xi|^{\alpha-3}\left\|(\hat f_1(s,\xi)+\hat f_2(s,\xi)), L_{2,\gamma}(R_+)\right\|, L_2\,(|\xi|>1)\right\| + \\ + \frac{c_2}{\gamma^2}\left\|\left\|(\hat f_1(s,\xi)+\hat f_2(s,\xi)), L_{2,\gamma}(R_+)\right\|, L_2\,(|\xi|<1)\right\|. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Из (3.7) при $\alpha \le 3$ получим

$$\left\||\xi|^\alpha u_{f,1}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le c_4\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(\left\|f_1, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\|f_2, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|\right). \tag{3.8}$$

Из (3.7) при $\alpha = 4$ получим

$$\left\||\xi|^4 u_{f,1}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le \frac{c_4}{\gamma}\left(\left\||\xi|\,\hat f_1, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\||\xi|\,\hat f_2, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|\right) + \frac{c_4}{\gamma^2}\left(\left\|f_1, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\|f_2, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|\right). \tag{3.9}$$

Проводя в точности такие же рассуждения для второго слагаемого из (3.3) и учитывая оценки (3.8), (3.9) для первого слагаемого из (3.3), будем иметь

$$\left\||\xi|^\alpha \hat u(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\||\xi|^\alpha \hat v(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le c_5\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(\left\|f_1, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\|f_2, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|\right), \quad \alpha\le 3, \tag{3.10}$$

$$\left\||\xi|^4 \hat u(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\||\xi|^4 \hat v(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le c_6\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(\left\|f_1, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\right\| + \left\|f_2, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\right\|\right). \tag{3.11}$$

Учитывая (3.3), представим $D_t^2\hat u(t,\xi)$ и $D_t^2\hat v(t,\xi)$ в виде

$$\begin{gathered} D_t^2\hat u(t,\xi) = D_t^2 u_{f,1}(t,\xi) + D_t^2 u_{f,2}(t,\xi), \\ D_t^2\hat v(t,\xi) = D_t^2 u_{f,1}(t,\xi) - D_t^2 u_{f,2}(t,\xi), \end{gathered} \tag{3.12}$$

где

$$D_t^2 u_{f,1}(t,\xi) = \frac{\hat f_1(t,\xi)+\hat f_2(t,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2} - \int_0^t \tau_1\frac{\sin(\tau_1(t-s))}{2}\frac{\hat f_1(s,\xi)+\hat f_2(s,\xi)}{1+(1-\varepsilon)\xi^2}ds,$$

$$D_t^2 u_{f,2}(t,\xi) = \frac{\hat f_1(t,\xi)-\hat f_2(t,\xi)}{1+(1+\varepsilon)\xi^2} - \int_0^t \tau_2\frac{\sin(\tau_2(t-s))}{2}\frac{\hat f_1(s,\xi)-\hat f_2(s,\xi)}{1+(1+\varepsilon)\xi^2}ds.$$

Следуя схеме, что и при получении оценки (3.7), пользуясь неравенством

$$\tau_j\left|\sin(\tau_j t)\right| \le |\xi|, \quad j=1,2,$$

оценками (3.6), получим

$$\begin{gathered} \left\||\xi|^{\alpha_2} D_t^2 u_{f,1}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| + \left\||\xi|^{\alpha_2} D_t^2 u_{f,2}(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le \\ \le c_4\left\||\xi|^{\alpha_2-2}\left\|\left(\left|\hat f_1(t,\xi)\right| + \left|\hat f_2(t,\xi)\right|\right), L_{2,\gamma}(R_+)\right\|, L_2(|\xi|>1)\right\| + \\ + c_5\left\|\left\|\left(\left|\hat f_1(t,\xi)\right| + \left|\hat f_2(t,\xi)\right|\right), L_{2,\gamma}(R_+)\right\|, L_2\,(|\xi|<1)\right\| + \\ + \frac{c_6}{\gamma}\left\||\xi|^{\alpha_2-1}\left\|\left(\left|\hat f_1(s,\xi)\right| + \left|\hat f_2(s,\xi)\right|\right), L_{2,\gamma}(R_+)\right\|, L_2(|\xi|>1)\right\| + \end{gathered}$$

$$+\frac{c_7}{\gamma}\left\|\left\|\left(\left|\hat{f}_1(s,\xi)\right|+\left|\hat{f}_2(s,\xi)\right|\right), L_{2,\gamma}(R_+)\right\|, L_2(|\xi|<1)\right\|.$$

Следовательно, при $\alpha_2 = 0$ и при $\alpha_2 = 2$ будем иметь следующие оценки:

$$\begin{gathered}\left\|D_t^2u(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|+\left\|D_t^2v(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le c_8\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\left(\left\|f_1, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|+\left\|f_2, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|\right),\\ \left\|D_t^2D_x^2u(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|+\left\|D_t^2D_x^2v(t,x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le c_9\left(\frac{1}{\gamma}+1\right)\left(\left\||\xi|\,\hat{f}_1, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|+\left\||\xi|\,\hat{f}_2, L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\|\right).\end{gathered} \tag{3.13}$$

Следовательно, учитывая неравенства (3.10), (3.11), (3.13), будем иметь требуемую оценку (1.5). Теорема доказана.

4. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered}(I-D_x^2)D_t^2u - L_{11}(D_x)u - L_{12}(D_x)v + c^2D_x^4u + \varepsilon(D_t^2 - c^2D_x^2)D_x^2v = f_1(t,x),\\ (I-D_x^2)D_t^2v - L_{21}(D_x)u - L_{22}(D_x)v + c^2D_x^4v + \varepsilon(D_t^2 - c^2D_x^2)D_x^2u = f_2(t,x),\\ u\big|_{t=0} = 0, \quad v\big|_{t=0} = 0,\\ D_tu\big|_{t=0} = 0, \quad D_tv\big|_{t=0} = 0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Докажем однозначную разрешимость задач (4.1) и (1.1) в пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, опираясь на предыдущие результаты.

Доказательство теоремы 3. В разд. 3 рассматривалась задача Коши (3.1). Перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}(D_t,D_x)\begin{pmatrix}u(t,x)\\ v(t,x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1(t,x)\\ f_2(t,x)\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}u(t,x)\\ v(t,x)\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = 0, \quad \begin{pmatrix}D_tu(t,x)\\ D_tv(t,x)\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = 0,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где матричный оператор $\mathfrak{L}(D_t,D_x)$ имеет вид

$$\mathfrak{L}(D_t,D_x) = \begin{pmatrix}(I-D_x^2)D_t^2 + c^2D_x^4 & \varepsilon(D_t^2 - c^2D_x^2)D_x^2\\ \varepsilon(D_t^2 - c^2D_x^2)D_x^2 & (I-D_x^2)D_t^2 + c^2D_x^4\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

При доказательстве теоремы 2 было построено решение задачи Коши (3.1) для любых $f_j(t,x)\in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)$, $j = 1,2$, в виде

$$\begin{gathered}u(t,x) = F^{-1}[u_{f_1}](t,x) + F^{-1}[u_{f_2}](t,x),\\ v(t,x) = F^{-1}[u_{f_1}](t,x) - F^{-1}[u_{f_2}](t,x),\end{gathered} \tag{4.4}$$

где F^{-1} – это обратный оператор Фурье, u_{f_j}, $j = 1,2$, определены в (3.4), (3.5). В операторном виде решение задачи Коши (3.1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix}u(t,x)\\ v(t,x)\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}f_1(t,x)\\ f_2(t,x)\end{pmatrix},$$

где матричный оператор P определяется из (3.4), (3.5) и (4.4). В силу оценок (3.10), (3.11) при $\alpha\le 3$, $\gamma > 1$ будем иметь

$$\left\|D_x^\alpha P\begin{pmatrix}f_1(t,x)\\ f_2(t,x)\end{pmatrix}, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\right\| \le \frac{c_0}{\gamma}\left(\left\|f_1, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\right\|+\left\|f_2, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\right\|\right), \tag{4.5}$$

где константа $c_0 > 0$ не зависит от γ и f_1, f_2.

Перепишем теперь нашу систему с младшими членами в виде

$$\mathfrak{L}(D_t, D_x)\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} - L_{\text{мл}}(D_x)\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

где матричный дифференциальный оператор $\mathfrak{L}(D_t, D_x)$ определен в (4.3) и

$$L_{\text{мл}}(D_x) = \begin{pmatrix} L_{11}(D_x) & L_{12}(D_x) \\ L_{21}(D_x) & L_{22}(D_x) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Напомним, что линейные дифференциальные операторы $L_{ij}(D_x)$ имеют постоянные коэффициенты и порядки их не превышают трех.

Решение задачи Коши (4.1) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} g_1(t,x) \\ g_2(t,x) \end{pmatrix}.$$

Тогда неизвестная вектор-функция

$$\begin{pmatrix} g_1(t,x) \\ g_2(t,x) \end{pmatrix} \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2),$$

очевидно, будет определяться из уравнения

$$\mathfrak{L}(D_t, D_x)P\begin{pmatrix} g_1(t,x) \\ g_2(t,x) \end{pmatrix} - L_{\text{мл}}(D_x)P\begin{pmatrix} g_1(t,x) \\ g_2(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix}, \quad t > 0. \tag{4.7}$$

Из определения соболевских пространств $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}$ и определения операторов P и $L_{\text{мл}}(D_x)$ имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2) & \xrightarrow{P} & W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2) \\ & & \downarrow{\scriptstyle L_{\text{мл}}(D_x)} \\ & & W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2). \end{array}$$

А поскольку $\mathfrak{L}(D_t, D_x)P = I$, то из (4.7) следует, что задача сводится к решению операторного уравнения

$$[I - S]G = F, \quad S = L_{\text{мл}}(D_x)P, \tag{4.8}$$

в пространстве $W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)$, $\gamma > 1$.

В силу оценки (4.5) и определения оператора $L_{\text{мл}}(D_x)$ для нормы оператора S справедливо неравенство

$$\|S\| \le \frac{C}{\gamma}, \quad \gamma > 1,$$

где C не зависит от γ. Следовательно, найдется такое $\gamma_0 > 1$, что при всех $\gamma > \gamma_0$

$$\|S\| < 1.$$

Тогда по теореме фон Неймана [10] уравнение (4.8) имеет единственное решение

$$G = (I - S)^{-1}F \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2), \quad \gamma > \gamma_0,$$

при этом

$$\left\|(I - S)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|S\|}.$$

Следовательно, вектор-функция

$$\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} = P(I - S)^{-1}\begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix} \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2), \quad \gamma > \gamma_0, \tag{4.9}$$

является искомым решением задачи Коши (4.1). Очевидно, решение определяется единственным образом. В силу оценки (1.5) для решения задачи Коши (3.1), учитывая (4.9), получаем оценку на решение задачи Коши (4.1)

$$\left\|u, W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)\right\| + \left\|v, W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)\right\| \le c_3(\gamma_0)\left(\left\|f_1, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\right\| + \left\|f_2, W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\right\|\right), \tag{4.10}$$

где $c_3(\gamma_0)$ – константа, зависящая от коэффициентов системы и γ_0.

Итак, мы получили, что существует $\gamma_0 > 1$ такое, что при

$$f_1(t,x), f_2(t,x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2), \quad \gamma > \gamma_0,$$

задача Коши (4.1) имеет единственное решение $U(t,x) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$ в пространстве вектор-функций $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, $\gamma > \gamma_0$ таких, что $D_t^2 D_x^2 U \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$ и выполнена оценка (4.10).

Рассмотрим теперь задачу Коши (1.1), перепишем ее в виде

$$\mathfrak{L}(D_t, D_x)\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} - L_{\text{мл}}(D_x)\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

$$\left.\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \psi_1(x) \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{pmatrix} D_t u(t,x) \\ D_t v(t,x) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix},$$

где матричные дифференциальные операторы $\mathfrak{L}(D_t, D_x)$, $L_{\text{мл}}(D_x)$ определены в (4.3) и (4.6) соответственно.

Сведем изучение задачи Коши (1.1) к задаче Коши (4.1). Для этого сделаем сдвиг

$$\begin{pmatrix} u_F(t,x) \\ v_F(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_\Phi(t,x) \\ v_\Phi(t,x) \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$ – решение задачи Коши (1.1), $\begin{pmatrix} u_\Phi(t,x) \\ v_\Phi(t,x) \end{pmatrix}$ – решение задачи Коши (2.1). Следовательно, вектор-функция $\begin{pmatrix} u_F(t,x) \\ v_F(t,x) \end{pmatrix}$ является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}\mathfrak{L}(D_t, D_x)\begin{pmatrix} u_F(t,x) \\ v_F(t,x) \end{pmatrix} - L_{\text{мл}}(D_x)\begin{pmatrix} u_F(t,x) \\ v_F(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(t,x) \\ F_2(t,x) \end{pmatrix}, \quad t > 0, \\ \left.\begin{pmatrix} u_F(t,x) \\ v_F(t,x) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{pmatrix} D_t u_F(t,x) \\ D_t v_F(t,x) \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{4.11}$$

где

$$\begin{pmatrix} F_1(t,x) \\ F_2(t,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix} + L_{\text{мл}}(D_x)\begin{pmatrix} u_\Phi(t,x) \\ v_\Phi(t,x) \end{pmatrix}.$$

Задача Коши (4.11) совпадает с задачей Коши (4.1). Для того чтобы воспользоваться результатами, полученными для задачи Коши (4.1), покажем, что

$$\begin{pmatrix} F_1(t,x) \\ F_2(t,x) \end{pmatrix} \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2). \tag{4.12}$$

Поскольку $\begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix} \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)$ и для решения задачи Коши (2.1) имеют место оценки (2.14), (2.20), учитывая определение оператора $L_{\text{мл}}(D_x)$, получаем (4.12). Следовательно, теорема 3 непосредственно вытекает из теоремы 1 и оценки (4.10).

Теорема доказана.

5. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

В настоящей работе мы провели исследование разрешимости задачи Коши (1.1) для одной псевдогиперболической системы. Коротко эту систему можно записать в виде

$$(I - D_x^2)D_t^2U + \mathcal{L}_4(D_t, D_x)U + L_{\text{мл}}(D_x)U = F(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R,$$

где $\mathcal{L}_4(D_t, D_x)$ – однородный дифференциальный оператор четвертого порядка, а $L_{\text{мл}}(D_x)$ – оператор, соответствующий младшим членам. Повторяя схему наших рассуждений, нетрудно получить аналогичные результаты для многомерных псевдогиперболических систем вида

$$(I - \Delta_x)D_t^2U + \mathcal{L}_4(D_t, D_x)U + L_{\text{мл}}(D_x)U = F(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R^n.$$

По аналогии с [1] можно определить класс псевдогиперболических систем, не разрешенных относительно старшей производной по времени

$$M(D_x)D_t^lU + \mathcal{L}(D_t, D_x)U + L_{\text{мл}}(D_x)U = F(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \tag{5.1}$$

где $M(D_x)$ – эллиптический оператор. В том случае, когда оператор

$$M(D_x) : W_2^m(R^n) \to L_2(R^n) \tag{5.2}$$

является непрерывно обратимым, при некоторых условиях на дифференциальный оператор $\mathcal{L}(D_t, D_x)$ можно получить теоремы о разрешимости задачи Коши в весовых соболевских пространствах $W_{2,\gamma}^{l,r}(R_+^{n+1})$. Более сложная ситуация, когда оператор (5.2) не является непрерывно обратимым. Например, когда символ $M(i\xi)$ оператора $M(D_x)$ вырождается при $\xi = 0$. В этом случае, используя специальные классы весовых соболевских пространств [11] и теоремы об изоморфизме [12], [13], можно также установить некоторые теоремы о разрешимости задачи Коши для систем вида (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Герасимов С.И., Ерофеев В.И.* Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2014.
3. *Rao I.S.* Advanced Theory of Vibration. New York: John Wiley & Sons, 1992.
4. *Демиденко Г.В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.
5. *Демиденко Г.В.* On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // Sib. Adv. Math. 2001. V. 11. № 4. P. 25–40.
6. *Fedotov I., Volevich L.V.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russ. J. Math. Phys. 2006. V. 13. № 3. P. 278–292.
7. *Fedotov I., Shatalov M., Marais J.* Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration // Acta Mechanica. 2016. V. 227. № 11. P. 3315–3324.
8. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
9. *Годунов С.К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. 1. Краевые задачи. Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 1994.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
11. *Демиденко Г.В.* О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. АН. 1994. Т. 334. № 4. С. 420–423.
12. *Демиденко Г.В.* О квазиэллиптических операторах в R_n // Сиб. матем. журнал. 1998. Т. 39. № 5. С. 1028–1037.
13. *Демиденко Г.В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. матем. журнал. 2001. Т. 42. № 5. С. 1036–1056.