

УДК 533.9

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ПРЯМОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ<sup>1)</sup>

© 2020 г. К. В. Брушлинский<sup>1,2</sup>, С. А. Кривцов<sup>2</sup>, Е. В. Степин<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

<sup>2</sup> 115409 Москва, Каширское ш., 31, Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Россия

\*e-mail: eugene.v.stepin@gmail.com

Поступила в редакцию 14.11.2019 г.

Переработанный вариант 14.11.2019 г.

Принята к публикации 16.12.2019 г.

Представлена математическая модель равновесной магнитоплазменной конфигурации в плазменном цилиндре, вдоль оси которого расположен проводник конечного диаметра с током, создающим удерживающее плазму магнитное поле. Рассматриваемые здесь конфигурации кольцевой формы – простейший элемент широкого класса ловушек-галатей с погруженными в плазменный объем проводниками. Задачи о таких конфигурациях имеют простое аналитическое решение в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений. Получен простой результат о существовании гладких равновесных конфигураций при ограничении максимального давления плазмы, отнесенного к магнитным единицам. Поставлены и решены задачи об устойчивости конфигураций – полномасштабной МГД-устойчивости и промежуточной устойчивости относительно возмущений той же размерности. Показано, что промежуточная устойчивость имеет место в пределах указанного ограничения давления, а МГД-устойчивость усиливает это ограничение за счет гофрированных возмущений, зависящих от осевой координаты. Библ. 27. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** математическая модель, удержание плазмы, магнитные ловушки, равновесие, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0044466920040067

### ВВЕДЕНИЕ

Статья относится к циклу работ по математическому моделированию и расчетам равновесных плазменных конфигураций, удерживаемых магнитным полем ловушек, представляющих интерес в заманчивых перспективах управляемого термоядерного синтеза. Более конкретно речь идет о ловушках, в которых проводники с током, создающие магнитное поле, погружены в плазменный объем, что делает геометрию поля более сложной и разнообразной и позволяет рассчитывать на более эффективное удержание. Дополнительную сложность исследований конфигураций создает существенное требование, чтобы проводники в них не соприкасались с горячей плазмой. Внимание к этому классу ловушек привлечено А.И. Морозовым, назвавшим их “галатеями” [1]. Согласно основному замыслу, они имеют тороидальную форму вроде токамака с погруженными в него кольцевыми проводниками. Однако для простоты исследований основные положения, касающиеся конфигураций, как правило, ведутся в их распрямленных в цилиндр аналогах (торах бесконечного радиуса) с прямыми или винтовыми проводниками. Первым примером галатей, обсуждавшимся в литературе, была “стелларатор-галатея” (СГ). Ее идея предложена в [2], а численная модель в распрямленном в цилиндр варианте с тремя винтовыми проводниками реализована в [3]. Здесь в расчетах получено ограничение на величину давления плазмы, измеренную в магнитных единицах, которое теоретически обосновано в [4]. В расчетах конфигураций СГ с плазмой, сосредоточенной на сепаратрисе магнитного поля, установлено, что здесь это ограничение слабее, чем в конфигурациях с плазмой на оси, что говорит о более эффективном удержании в галатее по сравнению с традиционными стеллараторами [5].

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 16-11-10278).

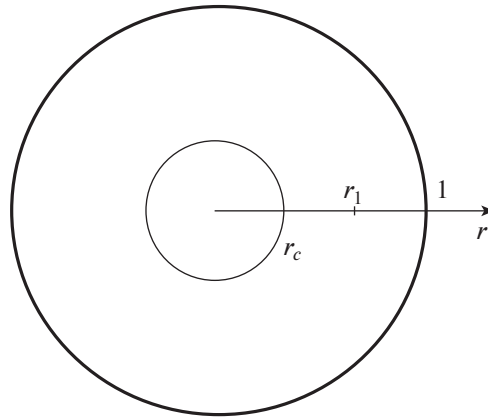
Много внимания уделено ловушке “Галатея-Пояс” с двумя кольцевыми проводниками в плазменном торе и ее цилиндрическому аналогу с прямыми проводниками. Предложенная в [6], она стала предметом исследований теоретических [6], [7], экспериментальных [8], [9] и численных [10], [11]. Обращено внимание на ее аналогию с токовым слоем С.И. Сыроватского [12] и также на отличие от него [13]. В расчетах “Пояса” также получено ограничение на допустимое отношение газового и магнитного давлений (“плазменное  $\beta$ ”). Содержательный обзор работ 1990-х годов по галатеям имеется в статье А.И. Морозова и В.В. Савельева [14].

Математические модели равновесных конфигураций в предположении плоской, осевой или винтовой симметрии построены в терминах двумерных краевых задач с полулинейным эллиптическим дифференциальным уравнением Грэда–Шафранова [15], [16] для скалярной функции магнитного потока. Задачи решаются численно итерационным методом установления по времени. Проведен также расчет формирования равновесной конфигурации в цилиндрическом аналоге “Пояса” в двумерной нестационарной МГД-модели [17].

Установление равновесных конфигураций в обоих случаях позволяет говорить об их устойчивости в некотором ограниченном смысле, а именно, устойчивости относительно малых возмущений той же неполной размерности, что и невозмущенные решения задачи. Эта условная устойчивость, очевидно, необходима для полноценной МГД-устойчивости относительно трехмерных возмущений, но не достаточна. Тем не менее она может представить интерес в качестве “промежуточного этапа” исследования устойчивости. Сходимость итераций в решении краевых задач с уравнением Грэда–Шафранова названа “диффузионной устойчивостью”, и показано, что если она имеет место для всех конфигураций в цилиндре с винтовым магнитным полем, то такие конфигурации МГД-устойчивы [18]–[20]. Особенности равновесных конфигураций и некоторые вопросы их устойчивости удобно рассмотреть на примере одномерных задач в кольцевой окрестности одного прямого проводника, которые можно считать простейшей моделью основного элемента любой ловушки-галатеи. Такой подход был впервые реализован в [21] в частном случае постоянного тока в плазме, параллельного току в проводнике. Равновесные конфигурации в этом случае не соответствуют сформулированным выше требованиям, так как плазма в них прижата к проводнику. Изолированную от проводника конфигурацию удалось получить в нестационарной МГД-модели при возрастании тока в проводнике со временем на начальном этапе формирования. Эта идея озвучена в двумерной МГД-модели формирования равновесия в цилиндрическом аналоге “Галатеи-Пояса” [22].

В настоящей работе равновесные значения давления плазмы, осевого тока и азимутального поля выбраны так, чтобы давление обращалось в нуль на границе кольца (проводнике и внешнем кожухе) и было максимальным посередине на конечном расстоянии от них. Аналитическое решение задачи о равновесии и здесь существует при ограничении на безразмерное значение максимума давления  $p_0 < p_0^{\text{cr}}$ . В попытках превысить  $p_0^{\text{cr}}$  давление приходится “обрезать”, т.е. положить постоянным в средней части кольца, в которой магнитное поле и электрический ток отсутствуют, что напоминает “фигуры равновесия”, исследованные в [14], [23], [24]. Авторам показалось интересным получить те же конфигурации независимо с помощью численного решения одномерного аналога уравнения Грэда–Шафранова. Оказалось, что при  $p_0 < p_0^{\text{cr}}$  итерационный метод установления сходится, т.е. в пределах указанного ограничения решение условно устойчиво в этом смысле. Параллельно проведено исследование МГД-устойчивости относительно трехмерных возмущений в линейном приближении. Установлено, что при том же ограничении  $p_0 < p_0^{\text{cr}}$  конфигурации теряют устойчивость при внесении гофрированных возмущений, зависящих от  $z$ .

При  $p_0 > p_0^{\text{cr}}$  итерации не сходятся, однако это может быть следствием разрыва некоторых элементов равновесного решения, который не совместился с “гладкой” природой уравнения Грэда–Шафранова. Однако сама необходимость менять модель конфигурации, создавая внутри нее указанную выше область постоянного давления без поля и тока, указывает на очередную разновидность ограничения максимального давления. Физический смысл ограничения очевиден: ловушка с заданными электромагнитными параметрами может удерживать плазму лишь ограниченного давления.



Фиг. 1. Сечение проводника и его окрестности плоскостью  $z = \text{const}$ .

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Объектом исследования являются равновесные конфигурации плазмы, магнитного поля и электрического тока в бесконечном круглом цилиндре, вдоль оси которого расположен круглый проводник конечного диаметра с постоянным током, создающим азимутальное магнитное поле. Кольцевая область сечения этой конструкции плоскостью  $z = \text{const}$  изображена на фиг. 1. Находящаяся в ней плазма допускает приближение сплошной среды и описывается уравнениями плазмостатики:

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (1.1)$$

где  $p$  — давление плазмы,  $\mathbf{H}$  — напряженность азимутального магнитного поля,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока.

Конфигурации можно считать симметричными, в данном случае одномерными, то есть в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0; \quad \mathbf{H} = (0, H, 0); \quad \mathbf{j} = (0, 0, j). \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) при этом превращаются в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp}{dr} = -jH; \quad j = \frac{1}{r} \frac{dHr}{dr}, \quad (1.3)$$

поскольку третье уравнение (1.1) выполнено автоматически в силу (1.2). Уравнения (1.1) и (1.3) написаны в безразмерных переменных. Единицы всех величин составлены из двух размерных констант, заданных при постановке задачи — радиуса  $R$  внешнего цилиндра и величины электрического тока  $J$  в проводнике, а именно:

$$r_u = R; \quad H_u = \frac{2J}{cR}; \quad j_u = \frac{c}{4\pi} \frac{H_u}{R}; \quad p_u = \frac{H_u^2}{4\pi}, \quad (1.4)$$

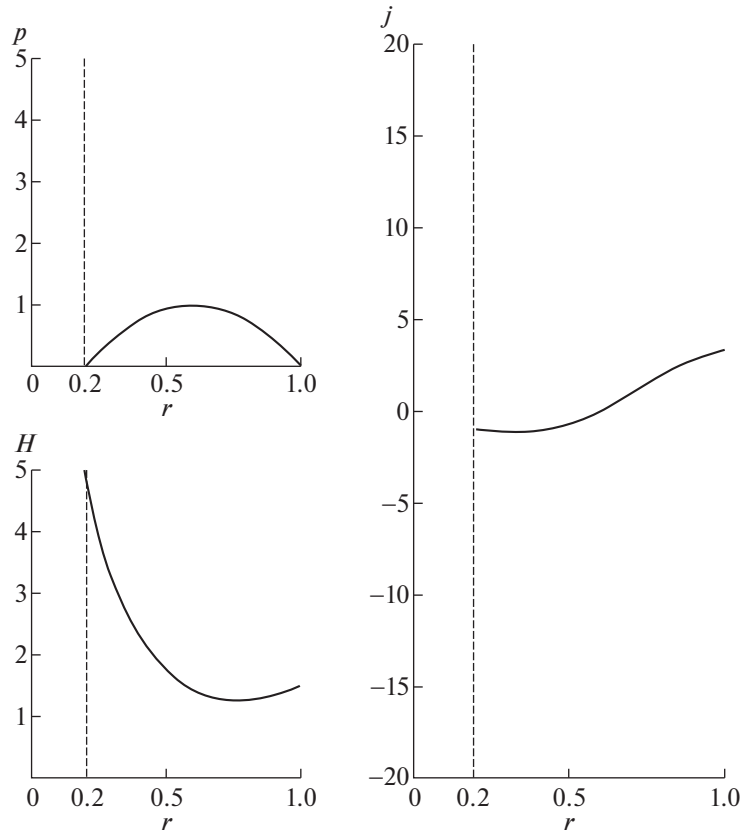
т.е. здесь газовое давление  $p$  отнесено к характерному магнитному давлению  $H_u^2/4\pi$ .

Задача с уравнениями (1.3) ставится на отрезке

$$r_c < r < 1, \quad (1.5)$$

где  $r_c$  — безразмерное значение радиуса проводника.

Три скалярных функции  $p$ ,  $H$ ,  $j$  должны удовлетворять двум уравнениям (1.3). Следовательно, эти уравнения определяют искомые конфигурации с точностью до одной произвольной функции, выбор которой должен соответствовать требованиям или пожеланиям к окончательному решению. Основное требование здесь — изолировать плазму от проводника и внешней границы, т.е. от обоих концов отрезка (1.5). Были испробованы разные способы задания  $H(r)$  и  $j(r)$



**Фиг. 2.** Равновесное распределение давления  $p$ , магнитного поля  $H$  и электрического тока  $j$  в окрестности проводника при  $p_0 = 1$ .

с целью обратить положительную функцию  $p(r)$  в нуль на концах, однако удобнее сразу задавать  $p(r)$ , например, в виде параболы:

$$p(r) = p_0 \left( 1 - \frac{(r - r_1)^2}{(1 - r_1)^2} \right), \quad r_1 = \frac{r_c + 1}{2}, \quad (1.6)$$

и получить аналитические выражения для  $H(r)$  и  $j(r)$ , решая уравнения (1.3).

Два уравнения (1.3) требуют задания двух дополнительных условий. В качестве одного из них задается значение

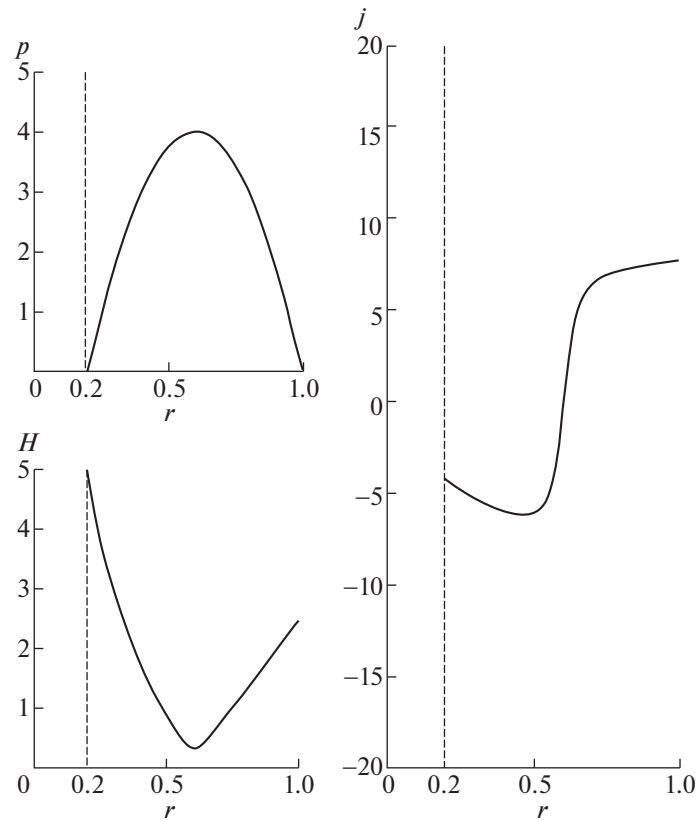
$$r_c H(r_c) = 1, \quad (1.7)$$

соответствующее циркуляции магнитного поля, окружающего заданный ток  $J$ . Роль второго условия сыграл выбор  $p(r)$ , из которого следует второе граничное условие, например, в виде значения  $H(1)$ , однозначно определяемого с помощью (1.3) и (1.6). Физический смысл  $H(1)$  – циркуляция магнитного поля вокруг всего цилиндра, которая соответствует значению полного тока в круге  $r < 1$ , т.е. сумме тока  $J$  в проводнике и плазменного тока, протекающего в рассматриваемой кольцевой области (1.5).

Решая уравнения (1.3) с заданным  $p(r)$  согласно (1.6) и граничному условию (1.7), получаем

$$G(r) \equiv (Hr)^2 = 1 - \int_{r_c}^r 2r^2 \frac{dp}{dr} dr = 1 + \frac{4p_0}{(1 - r_1)^2} \left( \frac{r^4 - r_c^4}{4} - r_1 \frac{r^3 - r_c^3}{3} \right), \quad (1.8)$$

$$H(r) = \frac{\sqrt{G(r)}}{r}; \quad j(r) = \frac{1}{r} \frac{dHr}{dr}. \quad (1.9)$$



**Фиг. 3.** Равновесное распределение давления  $p$ , магнитного поля  $H$  и электрического тока  $j$  в окрестности проводника при  $p_0 = 4$ .

Решение в виде (1.8), (1.9), очевидно, существует лишь при  $G(r) \geq 0$ , откуда следует упомянутое во введении ограничение  $p_0 < p_0^{\text{cr}}$ , где  $p_0^{\text{cr}}$  определяется равенствами

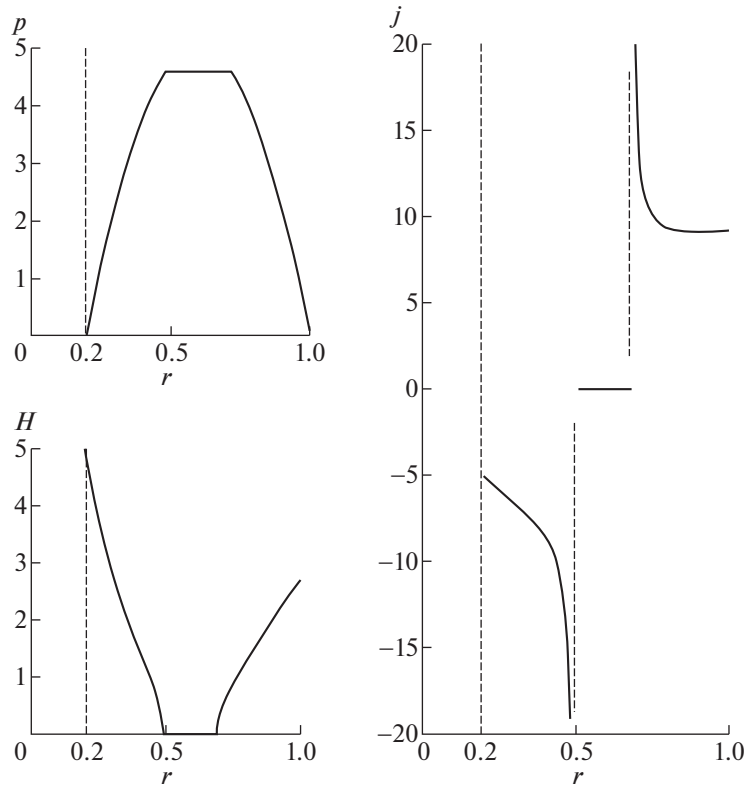
$$\min_r G(r) = G(r_1) = 0, \quad \text{т.е.} \quad p_0^{\text{cr}} = \frac{(1-r_1)^2}{4} \left( r_1 \frac{r_1^3 - r_c^3}{3} - \frac{r_1^4 - r_c^4}{4} \right)^{-1}. \quad (1.10)$$

Представленные ниже решения задачи получены для кольца (1.5) с радиусом проводника  $r_c = 0.2$ . Ему соответствует критическое значение  $p_0^{\text{cr}} \approx 4.17$ . На фиг. 2 и 3 представлены графики всех трех искомым функций для двух докритических значений  $p_0 = 1$  и  $p_0 = 4$ , то есть одного – далекого от  $p_0^{\text{cr}}$ , другого – близкого к нему. Следует заметить, что давление  $p_0$  определяет граничное значение  $Hr = H(1)$  на внешней границе, которое в выбранных единицах соответствует величине полного тока в кольце, включая проводник. Таким образом, плазменный ток в кольце равен

$$H(1) - H(r_c)r_c = H(1) - 1.$$

При  $p_0 = 1$  его безразмерное значение  $J^{\text{pl}} \approx 0.5$ , т.е. равно половине тока в проводнике, а при  $p_0 = 4$  превосходит его:  $J^{\text{pl}} \approx 1.5$ , т.е. плазменный ток заметно возрастает вместе с давлением.

Плотность плазменного тока  $j(r)$  отрицательна при  $r < r_1$  и положительна при  $r > r_1$ . Отрицательный, т.е. противоположный по направлению току в проводнике, он в части кольца, примыкающей к проводнику, обеспечивает изоляцию последнего от плазмы с помощью амперовой силы  $\mathbf{j} \times \mathbf{H} = \nabla p$ , сонаправленной с градиентом давления. Та же сила при положительном токе  $j(r)$  не позволяет плазме прикасаться к внешней границе  $r = 1$ . Необходимость в отрицательном токе у проводника отмечена в работе [22] в нестационарной задаче о формировании “Галатей-Пояса”



**Фиг. 4.** Равновесное распределение давления  $p$ , магнитного поля  $H$  и электрического тока  $j$  в окрестности проводника при  $p_0 = 5$ .

и подтверждена в расчетах равновесия и его формирования в последующей литературе [10], [17], [19]. Абсолютная величина тока  $j(r)$  в рассмотренных конфигурациях у внешней границы больше, чем у внутренней, и возрастает вместе с давлением, что и отмечено выше в обсуждении полного плазменного тока. По мере приближения  $p_0$  к  $p_0^{cr}$  графики  $j(r)$  становятся круче при  $r \sim r_1$ , т.е. в области максимального давления.

При  $p_0 > p_0^{cr}$  значения  $G(r)$  в формуле (1.8) становятся отрицательными при  $r > r_2$ , где  $G(r_2) = 0$ ,  $r_2 < r_1$ , и не пригодны для решения задачи. Чтобы продолжить решение, можно “срезать” параболу (1.6), заменив ее постоянным значением  $p \equiv p(r_2)$  при  $r > r_2$  и восстановить ее при  $r_3 = 2r_1 - r_2$  — значении, симметричном  $r_2$  относительно  $r_1$ , чтобы использовать ту же параболу при  $r > r_3$ . В интервале  $r_2 < r < r_3$  полагаем

$$p(r) \equiv p(r_2) = p(r_3); \quad H(r) \equiv 0; \quad j(r) \equiv 0.$$

При  $r \geq r_3$  из уравнения (1.3) следует

$$G(r) = -\int_{r_3}^r 2r^2 \frac{dp}{dr} dr = \frac{4p_0}{(1-r_1)^2} \left( \frac{r^4 - r_3^4}{4} - r_1 \frac{r^3 - r_3^3}{3} \right), \tag{1.11}$$

и  $j(r)$  и  $H(r)$  определяются теми же формулами (1.9), но со значением (1.11) для  $G(r)$  вместо (1.8).

Графики  $p$ ,  $H$  и  $j$  при  $p_0 = 5$  представлены на фиг. 4. Они напоминают “фигуры равновесия” с постоянным давлением плазмы без электрического тока и магнитного поля, окруженные вакуумом с магнитным полем, которое создается “скинированным” током, текущим только по поверхности. Такие фигуры исследованы А.И. Морозовым и В.В. Савельевым с применением теории аналитических функций комплексной переменной [14], [19], [23], [24].

## 2. ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Удержание плазмы магнитным полем в ловушках требует устойчивого существования обсуждаемых равновесных конфигураций. Проблема их устойчивости постоянно присутствует в современной научной литературе, посвященной разнообразным проявлениям плазменных неустойчивостей и попыткам борьбы с ними. Строго говоря, устойчивость должна быть исследована хотя бы в линейном приближении относительно любых малых возмущений МГД-переменных, трехмерных, независимо от имеющейся симметрии невозмущенной конфигурации. Симметрия вносит упрощение в коэффициенты линейных уравнений, позволяет расчленить трехмерную задачу на серию более простых для отдельных гармоник возмущений. Для одномерных равновесий в цилиндре этому вопросу посвящены, например, обзоры [25], [26], статья [18] и уделено внимание в книгах [19], [20].

В то же время численные модели равновесия в симметричных ловушках, в том числе галатях, получены в терминах решения двумерных краевых задач с одним скалярным уравнением Грэда–Шафранова для функции магнитного потока, к которому сводятся уравнения плазмостатики (1.1) [15], [16]. В задачах о равновесии конфигураций с плоской симметрией ( $\partial/\partial z \equiv 0$ ), например, в цилиндре, оно имеет вид (в безразмерных переменных, как и выше)

$$\Delta\psi + \frac{dp}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi} + j^{\text{ex}}(r, \varphi) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$H_r = \frac{\partial\psi}{r\partial\varphi}; \quad H_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}; \quad I = H_z.$$

Последнее слагаемое в уравнении моделирует заданный ток в проводниках и сосредоточено в местах их пересечения с плоскостью  $z = \text{const}$ . Давление плазмы  $p$  и функция  $I$  электрического тока в плоскости сечения цилиндра зависят от  $\psi$ , т.е. постоянны на магнитных поверхностях (линиях в плоскости сечения цилиндра)  $\psi = \text{const}$ . Они должны быть заданы в соответствии с особенностями конкретной задачи. В галатях с цилиндрической геометрией достаточно положить  $H_z = I(\psi) \equiv 0$ , а зависимость  $p(\psi)$  выбрать так, чтобы расположить плазму на линиях  $\psi = \text{const}$  вдали от проводников и внешней границы. Краевая задача с уравнением (2.1) ставится в сечении ловушки с границей  $\Gamma$ , непрозрачной для магнитного поля:  $\psi|_\Gamma = 0$ , и численно решается итерационным методом установления. Решение задач этого класса содержит один общий результат: итерационный процесс сходится только при ограничении сверху на характерную величину безразмерного давления. Физический смысл его упомянут выше, но результат имеет и математическую природу, которая не зависит от численных методов решения. Сходимость итераций требует убывания “со временем” погрешности  $u(t, r, \varphi)$ , что обеспечивается положительной определенностью оператора линеаризованного уравнения

$$L[u] = -\Delta u - Q(\psi)u, \quad u|_\Gamma = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$Q = \frac{dg}{d\psi}, \quad g = \frac{dp}{d\psi} + I \frac{dI}{d\psi}$$

суть младшие члены уравнения (2.1) для невозмущенного решения  $\psi(r, \varphi)$ .

Этот общий результат, помимо плазмостатики, относится к более широкому классу задач о взаимодействии процессов реакции и диффузии, например, в теории горения, использующих математический аппарат полулинейного уравнения типа (2.1) любой размерности (см. [19] с соответствующей библиографией).

Сходимость итераций можно истолковать как некоторую устойчивость решения, но только относительно возмущений участвующих в задаче величин ограниченной размерности. Такая устойчивость, названная “диффузионной” [18], необходима, но не достаточна для МГД-устойчивости плазмы в общепринятом смысле. Тем не менее она может представлять интерес, неся в себе некоторую промежуточную количественную информацию о процессах, способствующих или препятствующих устойчивости. “Диффузионная” устойчивость равносильна положительному спектру дифференциального оператора (2.2), который, в свою очередь, зависит от коэффи-

циента  $Q(\psi)$ . Оператор  $-\Delta\psi$  положителен практически в любой геометрии. Хорошо известно (см., например, [27]), что при

$$Q < 0 \tag{2.3}$$

спектр  $L$  смещен вправо и, следовательно, становится “еще более положительным”, т.е. задача устойчива.

Если условие (2.3) не выполнено, но коэффициент  $Q(\psi)$  ограничен сверху положительной константой

$$Q(\psi) \leq Q_{\max},$$

то его спектр можно сравнивать со спектром оператора  $-\Delta\psi$ , а именно, записав  $L[u] = \lambda u$  в виде

$$-\Delta u + (Q_{\max} - Q(\psi))u = (\lambda + Q_{\max})u.$$

Здесь коэффициент при  $u$  неотрицателен, следовательно, собственные значения оператора в левой части равенства удовлетворяют неравенству

$$\lambda + Q_{\max} \geq \mu,$$

где  $\mu$  – положительные собственные значения оператора  $-\Delta u$ .

Отсюда следует достаточное условие

$$Q_{\max} \leq \mu_1 \tag{2.4}$$

положительности оператора  $L[u]$  и диффузионной устойчивости рассматриваемой конфигурации. Здесь  $\mu_1$  – первое, т.е. минимальное собственное значение  $-\Delta u$ , которое во многих простых вариантах геометрии может быть легко вычислено.

Таким образом, вопрос о диффузионной устойчивости решения задачи требует численного решения задачи с уравнением (2.1), только если  $Q_{\max} > \mu_1$ . Рассмотрим промежуточную устойчивость полученных в разд. 1 одномерных конфигураций в кольцевой окрестности проводника с током. Для этого попытаемся воспроизвести их с помощью уравнения Грэда–Шафранова. Его одномерный вариант для функции  $\psi$ , связанной с магнитным полем уравнением  $H = -d\psi/dr$ , имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{dp}{d\psi} = 0. \tag{2.5}$$

Краевая задача ставится на отрезке  $r_c < r < 1$  с граничными условиями

$$\frac{d\psi(r_c)}{dr} = -\frac{1}{r_c}; \quad \psi(1) = 0.$$

Второе из них призвано зафиксировать для определенности значение  $\psi$  на границе, которое не играет роли в решении, поскольку функция потока  $\psi$  определена с точностью до произвольного слагаемого.

В итерационном процессе нелинейное слагаемое в (2.5) берется с предыдущего слоя (итерации). Итерационный процесс установления состоит в численном решении методом прогонки разностного аналога уравнения (2.5), дополненного производной по времени  $\partial\psi/\partial t$ :

$$\frac{\Psi_m^{n+1} - \Psi_m^n}{\tau} = \frac{1}{r_m} \left( r_{m+1/2} \frac{\Psi_{m+1}^{n+1} - \Psi_m^{n+1}}{h} - r_{m-1/2} \frac{\Psi_m^{n+1} - \Psi_{m-1}^{n+1}}{h} \right) + g_m^{n+1}.$$

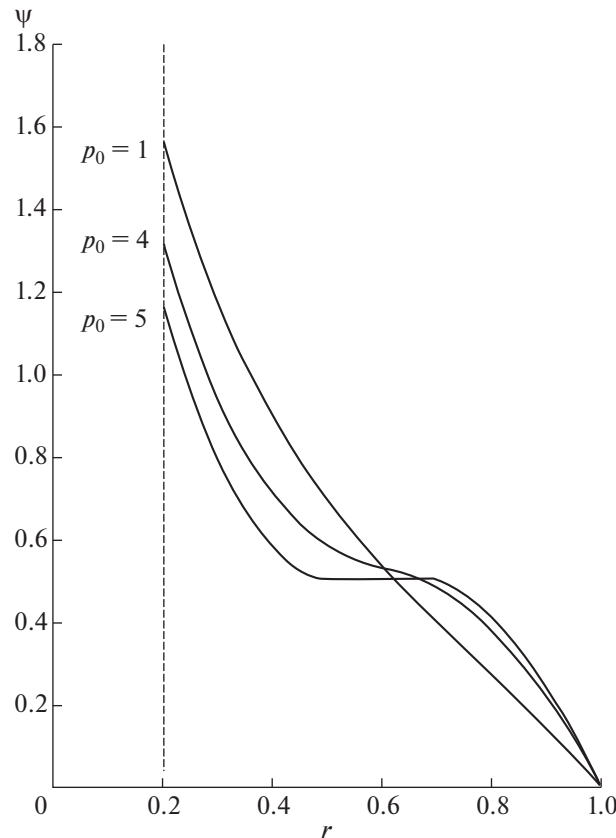
Слагаемое  $g_m^{n+1}$ , соответствующее нелинейному слагаемому уравнения (2.1), содержит значения  $\psi$  только с предыдущего слоя:

$$g_m^{n+1} = \left( \frac{dp}{d\psi} \right)_m^{n+1} = \frac{p_{m+1} - p_{m-1}}{\Psi_{m+1}^n - \Psi_{m-1}^n},$$

где  $p_m = p(r_m)$  – значения заданной функции (1.6).

В качестве нулевого приближения удобно взять любую монотонно убывающую функцию  $\psi(r)$ , например, линейную.





Фиг. 5. Графики функции магнитного потока  $\psi$  при  $p_0 = 1; 4; 5$ .

В расчетах, проведенных этим методом, получены установившиеся равновесные значения функции  $\psi(r)$ . Они представлены на фиг. 5. Определенные с ее помощью  $H$ ,  $j$  и  $p$  совпали с изложенными в разд. 1 результатами при всех значениях параметра  $p_0 < p_0^{\text{cr}}$ , т.е. ограничение давления с помощью очевидного требования  $(Hr^2) \geq 0$  оказалось сильнее требования обсуждаемой промежуточной устойчивости. Этот же результат следует из условия (2.4) при  $p_0 < p_0^{\text{cr}}$ , где  $Q_{\text{max}} < \mu_1$ , а  $\mu_1 \approx 6.5$  (вычисляется с помощью корней бесселевых функций  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$ ). При  $p_0 > p_0^{\text{cr}}$  итерационный процесс решения задачи с уравнением (2.1) расходится, однако считать “обрезанные” решения на фиг. 4 неустойчивыми, по-видимому, преждевременно, т.к. разрывы функции  $j(r)$  и производных функций  $H(r)$  и  $p(r)$  могут оказать влияние на решение эллиптического уравнения, обычно имеющего дело с гладкими функциями.

Таким образом, в данном случае можно ограничиться выводом, что промежуточная устойчивость конфигураций с заданным давлением (1.6) и само существование гладких решений задачи ограничены одним и тем же пределом  $p_0^{\text{cr}}$ , определяемым формулой (1.10).

### 3. МГД-УСТОЙЧИВОСТЬ

Необходимость, но не достаточность рассмотренной диффузионной устойчивости подтверждается примером расчета МГД-устойчивости конфигураций в кольце для нескольких гармоник малых линейных возмущений. В линейных однородных уравнениях для трехмерных возмущений коэффициенты составлены из равновесного решения, поэтому не зависят от переменных  $t$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , следовательно, их частные решения зависят от этих переменных экспоненциально посредством множителя

$$\exp(i\omega t + im\varphi - ikz) \quad (3.1)$$

с действительными значениями  $k$  и целыми значениями  $m$ . В результате семь уравнений для возмущений векторов скорости  $\mathbf{V}_1$  и магнитного поля  $\mathbf{H}_1$  и скаляра  $p_1$  после громоздких выкладок приводят к задачам на собственные значения с уравнением второго порядка для функции  $u = V_{1r}r$ :

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r F_{m,k} \frac{du}{dr} \right) + G_{m,k} u = 0, \quad (3.2)$$

которые ставятся на отрезке  $r_c < r < 1$  с условиями  $u(r_c) = u(1) = 0$  и сложной нелинейной зависимостью коэффициентов  $F_{m,k}$  и  $G_{m,k}$  от собственного значения  $\omega^2$ . Уравнение (3.2) получено Л.С. Соловьевым [26] (см. также [19], [20]). Если  $\omega^2 > 0$ , то возмущения не возрастают со временем согласно (3.1), т.е. невозмущенное равновесие устойчиво относительно гармоник возмущений с параметрами  $m$  и  $k$ . Если  $\omega^2 < 0$ , оно неустойчиво. Поскольку интерес представляет лишь “двубалльный” результат, то можно, не прибегая к численному решению краевой задачи, ограничиться поиском “границы устойчивости” – найти значение параметров задачи, при которых старшее собственное значение  $\omega^2$  переходит через нуль, т.е. когда краевая задача с уравнением (3.2) при  $\omega^2 = 0$  имеет нетривиальное решение. Уравнение при этом упрощается и имеет вид

$$-\frac{d}{dr} \left( \frac{H^2}{\eta r} \frac{du}{dr} \right) + \left[ \frac{m^2 H^2}{r^3} - \frac{4\alpha^2 H^2}{\eta r} + \frac{d}{dr} \left( \frac{2 - \eta H^2}{\eta r^2} \right) \right] u = 0,$$

где  $\eta = 1 + \alpha^2 r^2$ ,  $\alpha = k/m$ .

Численно решая его с начальными условиями  $u(r_c) = 0$ ,  $u'(r_c) > 0$  и разными значениями параметра  $p_0$ , подбираем “методом стрельбы” такое его значение, при котором  $u(1)$  обратится в нуль.

Первые расчеты проведены для  $m = 1$ , т.е. для первой гармоники по  $\phi$  и разных значениях показателя  $k$  в формуле (3.2), который характеризует зависимость возмущений от координаты  $z$ .

В расчетах установлены следующие результаты. Гармоники с  $k = 0, 1, 2$  оказались устойчивыми во всем диапазоне  $p_0 < p_0^{ct} \approx 4.17$ . При  $k = 3$  собственная функция с  $\omega = 0$  появилась при  $p_0 = 3.17$ . Это значит, что конфигурация устойчива относительно данной гармоники возмущений при  $p_0 < 3.17$ . С ростом частоты  $k$  диапазон значений  $p_0$  сужается, т.е. пороговые значения  $p_0$  убывают: при  $k = 5$  до  $p_0 = 1.34$ , при  $k = 10$  до  $p_0 = 0.55$ .

Таким образом, рассмотренные конфигурации в кольце устойчивы относительно независимых от  $z$  возмущений в пределах  $p_0 < p_0^{ct} \approx 4.17$  и становятся все менее устойчивыми, если включить их “гофрированную” зависимость от  $z$ . Неустойчивость усиливается при возрастании частоты  $k$  колебаний по  $z$ .

Этот результат качественно повторяет хорошо известные результаты о неустойчивости  $Z$ -пинча (того же цилиндра, но без проводника внутри) [11], [19], [25].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены вопросы устойчивости равновесных конфигураций плазмы, магнитного поля и электрического тока в цилиндрической окрестности кольцевого сечения вокруг прямого проводника с током. В простейшей одномерной модели получены явные выражения для характеристик конфигураций и установлено ограничение на отношение газового и магнитного давлений, в пределах которого могут существовать равновесные конфигурации, не соприкасающиеся с проводником. Проведено два этапа исследования устойчивости конфигураций. Они оказались устойчивыми относительно возмущений ограниченной размерности, но диапазон устойчивых значений давления сужается при включении возмущений, зависящих от координаты  $z$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. О галатях – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физ. плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 3. С. 305–316.
2. Морозов А.И., Пустовитов В.Д. О стеллараторе с левитирующими обмотками // Физ. плазмы. 1991. Т. 17. Вып. 10. С. 1276.

3. *Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б.* Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // *Физ. плазмы.* 1994. Т. 20. № 3. С. 284–292.
4. *Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Петровская Н.Б.* О единственности и устойчивости решений двумерных задач плазмостатики // *Матем. моделирование.* 1995. Т. 7. № 4. С. 73–86.
5. *Брушлинский К.В., Морозов А.И., Петровская Н.Б.* Численное моделирование винтовой равновесной конфигурации с плазмой на сепаратрисе // *Матем. моделирование.* 1998. Т. 10. № 11. С. 29–36.
6. *Морозов А.И., Франк А.Г.* Тороидальная магнитная ловушка-галатея с азимутальным током // *Физ. плазмы.* 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.
7. *Морозов А.И., Мурзина М.В.* Простейшие равновесные конфигурации галатей типа “Пояс” // *Физ. плазмы.* 1996. Т. 22. № 6. С. 551–563.
8. *Богданов С.Ю., Марков В.С., Морозов А.И., Франк А.Г.* Плазменная конфигурация “Галатея-Пояс”. Первые результаты экспериментальных исследований // *Письма в ЖЭТФ.* 1995. Т. 21. Вып. 24. С. 5–9.
9. *Франк А.Г., Кирий Н.П., Марков В.С.* Эксперименты по формированию магнитоплазменных конфигураций “Галатея-пояс” // *Физ. плазмы.* 2019. Т. 45. № 1. С. 32–36.
10. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Десятова А.С.* Плазмостатические модели магнитных ловушек-галатей // *Матем. моделирование.* 2012. Т. 24. № 8. С. 81–86.
11. *Брушлинский К.В., Кондратьев И.А.* Сравнительный анализ расчетов равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // *Матем. моделирование.* 2018. Т. 30. № 6. С. 76–94.
12. *Сыроватский С.И.* Токовые слои и вспышки в космической и лабораторной плазме // *Вестник АН СССР.* 1977. № 10. С. 33–44.
13. *Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Давыдова Н.А.* Плазменные конфигурации в ловушках-галатеях и токовых слоях // *Матем. моделирование.* 2016. Т. 28. № 7. С. 107–120.
14. *Морозов А.И., Савельев В.В.* О галатеях – ловушках с погруженными в плазму проводниками // *Успехи физ. наук.* 1998. Т. 168. № 11. С. 1153–1194.
15. *Шафранов В.Д.* О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 33. Вып. 3 (9). С. 710–722.
16. *Grad H., Rubin H.* Hydrodynamic equilibria and force-free fields // *Proc. 2<sup>nd</sup> United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy.* Geneva. 1958. V. 31. P. 190–197 / N.Y. Columbia Univ. Press. 1959.
17. *Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А.* Численная модель формирования квазиравновесия плазмы в магнитном поле ловушек-галатей // *Вестник НИЯУ МИФИ.* 2014. Т. 3. № 1. С. 40–52.
18. *Брушлинский К.В.* Два подхода к задаче об устойчивости равновесия плазмы в цилиндре // *Прикл. матем. и механ.* 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 235–243.
19. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
20. *Брушлинский К.В.* Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2017. 272 с.
21. *Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А.* О равновесии плазмы в магнитном поле ловушек-галатей // *Матем. моделирование.* 2010. Т. 22. № 6. С. 3–14.
22. *Дудникова Г.И., Морозов А.И., Федорук М.П.* Численное моделирование прямых плазменных конфигураций – галатей типа “Пояс” // *Физ. плазмы.* 1997. Т. 23. № 5. С. 387–396.
23. *Морозов А.И., Савельев В.В.* Фигуры равновесия идеальной плазмы с  $\beta = 1$  в магнитном поле // *Физ. плазмы.* 1993. Т. 19. № 8. С. 977–989.
24. *Савельев В.В.* Фигуры равновесия идеальной плазмы с током в магнитном поле // *Физ. плазмы.* 1995. № 3. С. 216–220.
25. *Кадомицев Б.Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // *Вопросы теории плазмы / Ред. М.А. Леонтович.* М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132–176.
26. *Соловьев Л.С.* Симметричные магнитогидродинамические течения и винтовые волны в круглом плазменном цилиндре // *Вопросы теории плазмы / Ред. М.А. Леонтович.* М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3. С. 245–289.
27. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.