ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 4, с. 676–686

УДК 519.64

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ МАССЫ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

© 2020 г. Н. П. Чуев

620034 Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66, Уральский государственный университет путей сообщения, Россия
e-mail: n_chuev44@mail.ru

Поступила в редакцию 14.11.2019 г.
Переработанный вариант 14.11.2019 г.
Принята к публикации 16.12.2019 г.

В работе исследуется задача Коши для системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, описывающей с применением лагранжевых координат движение конечной массы разреженного самогравитирующего газа, ограниченной свободной границей. Сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения задачи в пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Решение строится в виде ряда с реккурентно вычисляемыми коэффициентами. Локальная сходимость ряда доказывается с помощью метода последовательных приближений. Библ. 33.

Ключевые слова: задача Коши, разреженный самогравитирующий газ, свободная граница, лагранжевы координаты, система интегральных уравнений типа Вольтерра, метод последовательных приближений.

DOI: 10.31857/S0044466920040079

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье изучается задача Коши о движении в вакууме конечной массы самогравитирующего по закону Ньютона идеального разреженного газа с переменной областью течения, ограниченного свободной поверхностью.

Исследованиями движений сплошной среды с учетом сил самогравитации занимались Дирихле, Дедекинд и Риман. Они изучали фигуры равновесия вращающейся идеальной сжимаемой жидкости. Затем данная теория получила развитие в работах выдающихся ученых А. Пуанкаре, Дж. Дарвина, Дж. Джинса, А.М. Ляпунова, Л. Лихтенштейна и др. [1]–[3]. Движение гравитирующего газового шара рассматривалось как модель звезд в работах и монографиях К.П. Станюковича [4], Л.И. Седова [5]. Движение газа в поле тяжести изучалось в работе А.Ф. Сидорова [6], в которой были построены точные решения установившегося плоскопараллельного изэнтропического течения газа с политропным уравнением состояния. В статье О.И. Богоявленского [7] рассмотрена динамика адиабатических движений гравитирующего идеального газа, при которых скорости являются линейными функциями координат и газ с постоянной плотностью заполняет некоторый эллипсоид. В работе С.Л. Дерябина, Н.П. Чуева [8] исследовались сферически-симметричные течения самогравитирующего идеального газа в вакуум и задача о распаде разрыва, построены точные решения начально-краевой задачи для нелинейной интегродифференциальной системы с частными производными в виде сходящихся степенных рядов. Теория математического моделирования динамики самогравитирующих газовых сред интенсивно развивается [9]–[11]. Данная работа является продолжением исследования автора [12] и разработкой методов доказательства существования и единственности решения задачи Коши для системы газовой динамики, описывающей эволюцию конечной массы самогравитирующего газа.

В связи с развитием космических исследований, особенно астрофизики, учеными стали интенсивно изучаться проблемы динамики разреженных газов. При этом в литературе рассматривались главным образом задачи, требующие кинетического описания [13]. В данной работе задача динамики разреженного газа изучается в рамках феноменологической математической модели газовой динамики [14], исследуется закон эволюции конечной массы газа и свободной границы. Система газовой динамики без давления или разреженного самогравитирующего газа описывает распределение вещества на космологических масштабах, течение сред, эволюцию материи только посредством гравитации. Задачи о движении газа со свободными границами в последние 50 лет стали объектом строгих математических исследований. Основные результаты в этом направлении получены М.А. Лаврентьевым, Л.В. Овсянниковым, В.И. Налимовым, В.В. Пухначевым, В.К. Андреевым и др. [15]–[18].

Система уравнений газовой динамики, описывающая движение разреженной среды в поле тяжести, является системой нелинейных интегродифференциальных уравнений [3]. Разработка теории нелинейных интегродифференциальных уравнений была начата А.М. Ляпуновым, Э. Шмидтом, А. Хаммерштейном, Л. Лихтенштейном. В течение последующего столетия появляется множество работ, посвященных исследованию интегродифференциальных уравнений. Некоторые результаты этих работ изложены в монографиях и обзорах [8]–[11] с приложением обширных библиографий по данной теме.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается нестационарная задача со свободной поверхностью для системы уравнений газовой динамики, описывающей движение изэнтропического, самогравитирущего и изолированного конечного объема идеального газа. Пусть в момент $t = 0$ в пространстве R^3 задана область Ω_0, заполненная идеальным разреженным изэнтропическим газом, частицы которого притягиваются друг к другу по закону Ньютона. Задача о движении газа в силовом поле сводится к определению области $\Omega_t \in R^4$, занимаемой газом в момент времени t, вектора скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ и плотности $\rho(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющих в области $\mathbf{x} \in \Omega_t$, $t \in (0,T)$ системе уравнений газовой динамики в форме Л. Эйлера [3]:

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \\ \frac{d\rho(\mathbf{x},t)}{dt} = -\rho(\mathbf{x},t)\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t), \end{gathered} \tag{1}$$

при условиях, что при $t = 0$ в каждой точке $\mathbf{x} = \{x,y,z\}$ области Ω_0 известны распределения: $\mathbf{u}_0 = \{u_0, v_0, w_0\}$, $\rho = \rho_0(\mathbf{x})$, где $u_0(\mathbf{x})$ – вектор скорости частиц газа, $\rho_0(\mathbf{x})$ – плотности газа.

На границе Γ_t области Ω_t выполняется условие $\rho(\mathbf{x},t) = 0$ для $\mathbf{x} \in \Gamma_t$, при $t \geq 0$.

Функции $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\rho_0(\mathbf{x})$ и замкнутая граница области Γ_0 задаются в пространстве $C^\infty(\bar{\Omega}_0)$ – бесконечно-дифференцируемых функций в области $\bar{\Omega}_0$.

Сила ньютоновского притяжения в правой части векторного уравнения системы (1) равна $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \nabla\Phi(\mathbf{x},t)$, где $\nabla\Phi$ – градиент ньютоновского потенциала, который задается тройным интегралом

$$\Phi(\mathbf{x},t) = G\iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d\mathbf{x}', \tag{2}$$

где G – гравитационная постоянная, $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ – расстояние между точками области.

Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона [12]–[15]

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \Delta\Phi(\mathbf{x},t) = -4\pi G\rho(\mathbf{x},t),$$

где Δ – оператор Лапласа, оператор div – оператор дивергенции.

Отметим следующее: функции $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{x}$ и переменные $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{x}$ всюду в тексте являются векторными величинами.

В настоящем исследовании движение газа будем рассматривать при условии, что свободная граница во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц, т.е. исключается возможность переноса массы через свободную поверхность. Это обстоятельство, а также условие разреженности газа делает удобным переход от эйлеровых координат $(\mathbf{x},t)$ к лагранжевым координатам $(\boldsymbol{\xi},t)$, для которых область определения решения задачи о движении конечной массы газа будет заранее фиксированной. При переходе к этим координатам область становится заданной цилиндрической областью $Q_t = \Omega_0 \times (0,T)$.

Преобразуем систему газовой динамики (1) и найдем ее вид в лагранжевых координатах (ξ, t) следующим образом.

Пусть система газовой динамики (1) имеет решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$. При известном векторе скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ закон движения частиц газа определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{3}$$

с начальным условием в момент времени $t = 0$

$$\mathbf{x} = \xi. \tag{4}$$

Известно, что если векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ задано в некоторой области $\Omega_t \in R^4$, непрерывно и удовлетворяет условию Липшица по $\mathbf{x}$, то область Q_t однократно покрыта семейством интегральных кривых уравнения (3). Условие Липшица в любом замкнутом ограниченном множестве можно заменить более сильными условиями: дифференцируемости функции и ограниченности частных производных на любой замкнутой ограниченной части Ω_t. Эти условия выполняются тогда, когда частные производные непрерывны на множестве Ω_t. Каждая интегральная кривая однозначно определена условием прохождения через заданную точку $\xi \in \Omega_0$ в момент времени $t = 0$. Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями (4) будет иметь вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t). \tag{5}$$

Рассмотрим подробнее свойства решения (5) задачи Коши (3), (4). Вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ описывает траекторию частицы газа, находящейся в точке $\xi \in \Omega_0$ в момент $t = 0$, а также задает отображение замкнутой Ω_0 в область Ω_t при фиксированном t. Непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathbf{x}(\xi, t)$ обладает достаточной гладкостью, существованием дифференцируемого обратного преобразования и выполнимо при условии, что якобиан отображения

$$J(\xi, t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}\right) \tag{6}$$

отличен от нуля. Якобиан отображения $J(\xi, t)$ является решением задачи Коши для уравнения Л. Эйлера [14]

$$\frac{\partial J(\xi, t)}{\partial t} = J(\xi, t)\operatorname{div}_x \mathbf{u}(\mathbf{x}(\xi, t)t) \tag{7}$$

при начальном условии

$$J(\xi, 0) = 1. \tag{8}$$

Решением (7), (8) будет функция

$$J(\xi, t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}(\xi, \tau)\tau)\right)d\tau. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$J(\xi, 0) = 1 \quad \text{и} \quad J(\xi, t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Введем лагранжевы переменные $\xi = \{\xi, \eta, \zeta\}$ как значения координат частиц газа в начальный момент в области Ω_0. Если $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ как функции независимых переменных ξ, η, ς, t, то в момент t скорость частицы будет

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = \mathbf{v}(\xi, t). \tag{11}$$

Используем для функций при переходе от эйлеровых к лагранжевым переменным

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\xi, t), t) = g(\xi, t) \tag{12}$$

дифференциальное равенство

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t}, \tag{13}$$

тогда ускорение можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа имеет вид [14]

$$\rho(\mathbf{x}(\xi,t),t)\,J(\xi,t) = \rho_0(\xi), \tag{15}$$

после преобразования $\rho(\mathbf{x}(\xi,t),t) = \tilde{\rho}(\xi,t)$ оно примет вид

$$\tilde{\rho}(\xi,t)J(\xi,t) = \rho_0(\xi), \tag{16}$$

здесь $\rho_0(\xi)$ обозначает первоначальную плотность в точках Ω_0.

Перейдем в векторном уравнении системы (1) к лагранжевым координатам, предварительно продифференцировав потенциал $\Phi(\xi,t)$. Тогда силовая функция $\mathbf{F}$ (2)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,t),t) = G\iiint\limits_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}',t)\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}(\xi,t)}{|\mathbf{x}(\xi,t) - \mathbf{x}'|^3}\,d\mathbf{x}'.$$

Применяя теорему о замене переменной в кратном интеграле и заменяя $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t)$ в предыдущем равенстве, получаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,t),t) = G\iiint\limits_{\Omega_0} \rho(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t),t)\frac{\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t) - \mathbf{x}(\xi,t)}{|\mathbf{x}(\xi,t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t)|^3}\,J(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t))\,d\boldsymbol{\eta}, \tag{17}$$

где $J(\boldsymbol{\eta},t) = \dfrac{\partial(x',y',z')}{\partial(\xi',\eta',\zeta')}$ – якобиан преобразования (6) для $\boldsymbol{\eta} = \{\xi',\eta',\zeta'\} \in \Omega_0$.

На основании (14)–(17) система (1) в форме Лагранжа примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = G\iiint\limits_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{\eta})\frac{\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t) - \mathbf{x}(\xi,t)}{\left|\mathbf{x}(\xi,t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t)^3\right|}\,d\eta = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,t)),\\ \tilde{\rho}(\xi,t)J(\xi,t) = \rho_0(\xi).\end{gathered} \tag{18}$$

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение – аналог леммы [16].

Лемма. *Для того чтобы гладкое отображение* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi,t)$ (5) *определяло с помощью равенства* $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (3) *и уравнения неразрывности решение системы* (1)*, описывающей движение разреженной массы самогравитирующего газа, необходимо и достаточно, чтобы это отображение удовлетворяло системе уравнений* (18)*, а также следующим начально-краевым условиям:*

$$\begin{gathered}\mathbf{x}(\xi,0) = \xi, \quad \left.\frac{\partial \mathbf{x}(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\xi), \quad J(\xi,0) = 1, \quad \tilde{\rho}(\xi,0) = \rho_0(\xi),\\ \tilde{\rho}(\xi,t) = 0 \quad \textit{при} \quad \xi \in \Gamma_0 \quad \textit{и} \quad t \ge 0 \quad \textit{для} \quad \forall\xi \in \Omega_0.\end{gathered} \tag{19}$$

Функции $\mathbf{u}_0(\xi)$, $\rho_0(\xi)$ *и замкнутая граница области* Γ_0 *принадлежат пространству* $C^\infty(\bar{\Omega}_0)$ *– бесконечно-дифференцируемых функций.*

Доказательство. Если система (1) имеет решение $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, $\rho(\mathbf{x},t)$, то предыдущие рассуждения доказывают необходимость утверждения. Докажем достаточность. Пусть система (18) с учетом (19) определяет решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi,t)$ и $\rho = \tilde{\rho}(\xi,t)$. Рассмотрим уравнение неразрывности системы (18). Дифференцируя это уравнение по t, получаем

$$\frac{\partial\tilde{\rho}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t}J(\xi,t) + \frac{\partial J(\xi,t)}{\partial t}\tilde{\rho}(\xi,t) = 0. \tag{20}$$

На основании (10) для $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ существует дифференцируемое обратное преобразование

$$\xi = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t), \tag{21}$$

при этом из равенства (5) следует

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \tag{22}$$

с помощью которого определяем

$$\tilde{\rho}(\xi, t) = \tilde{\rho}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \rho(\mathbf{x}, t). \tag{23}$$

Используя правила дифференцирования функций (13) с лагранжевыми переменными, получаем

$$\frac{\partial \tilde{\rho}(\xi, t)}{\partial t} = \frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt}. \tag{24}$$

На основании последнего равенства и производной якобиана (7) получим

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} J(\xi, t) + J(\xi, t)\tilde{\rho}(\xi, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = 0.$$

Окончательно выполнив преобразование (23) и сократив на $J(\xi, t) > 0$ при $t \geq 0$, получим, что $\rho = \tilde{\rho}(\xi, t)$ удовлетворяет уравнению неразрывности системы (1). При этом выполняются начальные и краевые условия для $\rho(\mathbf{x}, t)$ в силу условий (16) и равенства (22). Аналогично решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ системы (18) на основании равенств (11), а также (14), (21), (22) и замены переменной интегрирования в кратном интеграле системы (18) $\boldsymbol{\eta}$ на $\mathbf{x}' \in \Omega_t$ удовлетворяет уравнению Эйлера системы (1)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = G\nabla_x \iiint_{\Omega_t} \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'.$$

При этом выполняются начальные условия

$$\left.\frac{\partial \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{v}(\xi, t)|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим граничные условия. Граница Γ_t при $t \geq 0$ отделяет газ от вакуума, и в качестве уравнения поверхности можно взять $\Gamma_t : \rho(\mathbf{x}, t) = 0$ при $t \geq 0$. Условие, что поверхность $\Gamma_t : \rho(x, t) = 0$ все время состоит из одних и тех же частиц, определяется равенством

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho\mathbf{u} = 0$$

при $\rho|_{\Gamma_t} = 0$.

Это равенство также является кинематическим условием, которое следует из уравнения неразрывности системы (1) при $\rho|_{\Gamma_t} = 0$.

Решение системы (18), (19) будет обеспечивать выполнение кинематического условия при

$$\tilde{\rho}(\xi, t) J(\xi, t) = \rho_0(\xi).$$

Так как $\rho_0(\xi)|_{\Gamma_0} = 0$ и $J \neq 0$, то с учетом (23), (24) $\rho(\mathbf{x}(\xi, t)) = 0$, после дифференцирования которого по t получим выполнение кинематического условия $\rho_t + \nabla\rho\mathbf{x}_t = 0$ или $\rho_t + \nabla\rho\mathbf{u} = 0$.

Подробное изучение вопросов непрерывности и дифференцируемости искомых функций в системах (1) и (18) проведем в разд. 3.

Продолжим преобразование системы (18), (19). Задача Коши для интегродифференциальной системы уравнений (18), (19) эквивалентна системе интегральных уравнений типа Вольтерра:

$$\mathbf{x}(\xi,t) = \xi + \mathbf{u}_0(\xi)t + \int_0^t (t-\tau)\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,\tau),\tau)d\tau, \tag{25}$$

где функции $\mathbf{u}_0(\xi)$ – начальная скорость, $\rho_0(\xi)$ – начальная плотность и замкнутая граница данной области Γ_0 задаются начально-краевыми значениями (19) и дополнительными условиями, для $\forall\xi \in \Omega_0$ имеем:

$$\max\begin{pmatrix} \sup|\xi|, \sup|u_0(\xi)|, \sup|\rho_0(\xi)|, \\ \sup|\mathbf{F}_0| = G\iiint\limits_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{\eta})\dfrac{\boldsymbol{\eta}-\xi}{|\xi-\boldsymbol{\eta}|^3}d\boldsymbol{\eta}| \end{pmatrix} = A < \infty. \tag{26}$$

Эквивалентность уравнений (18) и (25) легко проверяется дифференцированием и 2-кратным интегрированием.

Решение системы интегральных уравнений (25) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi,t)$ по заданному начальному значению плотности позволит определить плотность газа для $t \geq 0$:

$$\rho(\mathbf{x}(\xi,t),t) = \rho_0(\xi)J(\xi,t)^{-1}. \tag{27}$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим систему (25) с условиями (19), (26). Докажем теорему.

Теорема. *Интегральное уравнение* (25) *в области* $Q_t = \bar{\Omega}_0 \times [0,t_1]$ *при* $0 \leq t \leq t_1$ *имеет единственное решение, удовлетворяющее начально-краевым условиям* (19), (26)*, принадлежащее пространству* $\mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega}_0)$*, в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда. Общий член ряда может быть вычислен по рекуррентной формуле*

$$\mathbf{x}_{n+1}(\xi,t) = \xi_0 + \mathbf{u}_0(\xi)t + \int_0^t (t-\tau)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}_n(\xi,\tau),\tau)d\tau, \tag{28}$$

и решение $x(\xi,t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\mathbf{x}(\xi,t)| \leq \max|\xi| + \frac{\max|\mathbf{u}_0(\xi)|t + \max|\mathbf{F}_0(\xi)|\frac{t^2}{2}}{1-Dt^2}, \tag{29}$$

где D – фиксированное число.

Доказательство. Применяя метод последовательных приближений [28], [29], построим первое приближение, полагая $\mathbf{x}_0(\xi,t) = \xi$, $\mathbf{x}_0(\boldsymbol{\eta},t) = \boldsymbol{\eta} = \{\xi',\eta',\zeta'\}$:

$$\mathbf{x}_1(\xi,t) = \xi + \mathbf{u}_0(\xi)t + G\int_0^t (t-\tau)\iiint\limits_{\Omega_0} \rho_0(\eta)\frac{\boldsymbol{\eta}-\xi}{|\xi-\boldsymbol{\eta}|^3}d\boldsymbol{\eta}d\tau = \xi + \mathbf{u}_0(\xi)t + \mathbf{F}_0(\xi)\frac{t^2}{2}. \tag{30}$$

Продолжим построение последовательности функции, получим для $n+1$-й итерации:

$$\mathbf{x}_{n+1}(\xi,t) = \xi + \mathbf{u}_0(\xi)t + G\int_0^t (t-\tau)\iiint\limits_{\Omega_0} \rho_0(\eta)\frac{\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\eta},\tau)-\mathbf{x}_n(\xi,\tau)}{|\mathbf{x}_n(\xi,\tau)-\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\eta},\tau)|^3}d\boldsymbol{\eta}d\tau. \tag{31}$$

Докажем методом математической индукции непрерывность функций $\mathbf{x}_n(\xi,t)$ и принадлежность пространству $C^\infty(\bar{\Omega}_0)$. Для $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$ это следует из начальных условий (19), (26) на основании теорем о дифференцируемости ньютоновского потенциала [23]–[27]. Пусть $\mathbf{x}_n(\xi,t) \in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$ в области $Q_t = \bar{\Omega}_0 \times [0,t_1]$, причем время t_1 в дальнейшем будет определено. Докажем справедливость утверждения для $\mathbf{x}_{n+1}(\xi,t)$. Для доказательства рассмотрим (31). Преобразуем тройной интеграл в равенстве (31), представляющий вектор-функцию объемной силы притяжения $\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi,t),t)$. Итерации $\mathbf{x}_n(\xi,t)$ задают последовательность отображений $\Omega_0 \cup \Gamma_0$ в области $\Omega_n \cup \Gamma_n$ для $n \in N$, где N – множество натуральных чисел. Обратное отображение $\Omega_n \cup \Gamma_n \to \Omega_0 \cup \Gamma_0$ с помощью функций

$$\xi = \mathbf{x}_n^{-1}(\mathbf{x}_n, t) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}_n^{-1}(\mathbf{x}'_n, t), \tag{32}$$

где точки $\mathbf{x}_n \in \Omega_n \cup \Gamma_n$ и $\mathbf{x}'_n \in \Omega_n \cup \Gamma_n$, преобразует функцию $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n(\xi,t),t)$ следующим образом.

Пусть

$$\mathbf{F}(\mathbf{x_n}(\xi,t),t) = G\iiint\limits_{\Omega_0} \rho_0(\eta)\frac{\mathbf{x_n}(\boldsymbol{\eta},t) - \mathbf{x_n}(\xi,t)}{\left|\mathbf{x_n}(\xi,t) - \mathbf{x_n}(\boldsymbol{\eta},t)\right|^3}d\boldsymbol{\eta},$$

после преобразования интеграла, используя (32), получим

$$\mathbf{F}(\mathbf{x_n},t) = G\iiint\limits_{\Omega_n} \rho_0(\mathbf{x_n}^{-1}(\mathbf{x'_n},t))J^{-1}(\mathbf{x'_n},t)\frac{\mathbf{x'_n} - \mathbf{x_n}}{\left|\mathbf{x_n} - \mathbf{x'_n}\right|^3}d\mathbf{x'_n}.$$

На основании закона сохранения массы для произвольной области справедливо равенство

$$\rho(\mathbf{x'_n},t) = \rho_0(\mathbf{x_n}^{-1}(\mathbf{x'_n},t))J^{-1}(\mathbf{x'_n},t), \tag{33}$$

где

$$J^{-1}(\mathbf{x'_n},t) = \frac{\partial(\xi',\boldsymbol{\eta}',\zeta')}{\partial(\mathbf{x'_n},\mathbf{y'_n},\mathbf{z'_n})}$$

– якобиан обратного преобразования, и тогда сила притяжения $\mathbf{F}$ примет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x_n},t) = G\iiint\limits_{\Omega_n} \rho(\mathbf{x'_n},t)\frac{\mathbf{x'_n} - \mathbf{x_n}}{\left|\mathbf{x_n} - \mathbf{x'_n}\right|^3}d\mathbf{x'_n} \tag{34}$$

для $n \in N$.

Функция $\mathbf{F}(\mathbf{x_n},t)$ в области $\bar{\Omega}_n$ имеет классический вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x_n},t) = \nabla\Phi(\mathbf{x_n},t),$$

где $\Phi(\mathbf{x_n},t)$ – потенциал объемных масс в области $\bar{\Omega}_n$. На основании теорем о непрерывности, дифференцируемости потенциала, существования несобственного интеграла, зависящего от параметров ξ, η, ζ, t [23]–[27], теорем о непрерывности, дифференцируемости сложной и обратной функций [30] следует, что $\rho(\mathbf{x_n},t) \in C^\infty$ в области $Q_{n_t} = \bar{\Omega}_n \times [0,t_1]$, граница Γ_n области Ω_n, уравнение которой можно взять $\rho(\mathbf{x_n},t) = 0$, принадлежит пространству C^∞, и окончательно вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{x_n},t) \in C^\infty$ в области Q_{n_t}.

На основании индуктивного предположения, что $\mathbf{x_n} = \mathbf{x_n}(\xi,t) \in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$, принадлежности $\mathbf{u}_0(\xi) \in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$, интегрирования бесконечно дифференцируемой функции по t следует, что $\mathbf{x_{n+1}}(\xi,t) \in C^\infty$ в области $Q_t = \bar{\Omega}_0 \times [0,t_1]$.

Таким образом, $\mathbf{x_n}(\xi,t) \in C^\infty$ при всех n, принадлежащих N.

Из равенства (11) следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{x_n}(\xi,t)}{\partial t} = \mathbf{v_n}(\xi,t) = \mathbf{v_n}(\mathbf{x_n}^{-1}(\mathbf{x},t),t) = \mathbf{u_n}(\mathbf{x},t)$$

и функции $\mathbf{v_n}(\xi,t)$ и $\mathbf{u_n}(\mathbf{x},t)$ принадлежат пространству C^∞ по всем переменным.

Рассмотрим и оценим разность $|\mathbf{x_{n+1}}(\xi,t)-\mathbf{x_n}(\xi,t)|$ для $n\in N$. Из равенства (28) имеем

$$|\mathbf{x_{n+1}}(\xi,t)-\mathbf{x_n}(\xi,t)| = \left|\int_0^t (t-\tau)\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}(\xi,\tau),\tau\right)-\mathbf{F}\left(\mathbf{x_{n-1}}(\xi,\tau),\tau\right)\right]d\tau\right|. \tag{35}$$

Для произвольной точки $(\xi,t)\in Q_t$ разность функций в подынтегральном выражении запишем с применением леммы Адамара [31], [32] в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n}(\xi,t),t\right)-\mathbf{F}\left(\mathbf{x_{n-1}}(\xi,t),t\right) = \int_0^1 \frac{d}{dr}\mathbf{F}\left(r\mathbf{x_n}(\xi,t)+(1-r)\mathbf{x_{n-1}}(\xi,t),t\right)dr = \\ = \int_0^1 \mathbf{F}'\left(\mathbf{X},t\right)dr\times\left(\mathbf{x_n}(\xi,t)-\mathbf{x_{n-1}}(\xi,t)\right)\end{gathered} \tag{36}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x_n},t\right)-\mathbf{F}\left(\mathbf{x_{n-1}},t\right) = \Phi(\xi,t)\left(\mathbf{x_n}-\mathbf{x_{n-1}}\right),$$

где в последнем равенстве произведение есть скалярное произведение матрицы Φ на вектор $\mathbf{x_n}-\mathbf{x_{n-1}}$, $\mathbf{X} = r\mathbf{x_n}+(1-r)\mathbf{x_{n-1}}$ и

$$\Phi(\xi,t) = \int_0^1 \frac{\partial\mathbf{F}\left(\mathbf{X},t\right)}{\partial\mathbf{X}}dr.$$

Так как производные элементов матрицы $\dfrac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}$ ограничены в замкнутой области Q_t некоторой величиной M, применяя оценку к матрице $\Phi(\xi,t)$ [32], получаем

$$|\Phi(\xi,t)|\le 3M. \tag{37}$$

Из равенств (35), (36) и оценки (37) следует, что

$$|\mathbf{x_{n+1}}(\xi,t)-\mathbf{x_n}(\xi,t)|\le 3M\int_0^t (t-\tau)|\mathbf{x_n}(\xi,\tau)-\mathbf{x_{n-1}}(\xi,\tau)|d\tau.$$

Последнее неравенство имеет место для любых $(\xi,t)\in Q_t$, поэтому его можно переписать в виде

$$\max|\mathbf{x_{n+1}}-\mathbf{x_n}|\le 3M\int_0^t (t-\tau)\max|\mathbf{x_n}-\mathbf{x_{n-1}}|d\tau\le 3M\max|\mathbf{x_n}-\mathbf{x_{n-1}}|\frac{t^2}{2},$$

что будет справедливо для $n\in N$. Выбирая $0<t<\sqrt{\dfrac{2}{3M}}=T$ и обозначая $3M\dfrac{t^2}{2}=q$ при $t<t_1<T$, получаем неравенство

$$\max|\mathbf{x_{n+1}}-\mathbf{x_n}|\le q\max|\mathbf{x_n}-\mathbf{x_{n-1}}|,\quad q<1,$$

справедливое для $n\in N$. Полученное рекуррентное неравенство последовательно

$$\max|\mathbf{x_{n+1}}-\mathbf{x_n}|\le q^2\max|\mathbf{x_{n-1}}-\mathbf{x_{n-2}}|,$$

и далее имеем

$$\max|\mathbf{x_{n+1}}-\mathbf{x_n}|\le q^n\max|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}|. \tag{38}$$

Величина $\max|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_0}|$ имеет определенное фиксированное значение в силу (30) и условий (26)

$$\max|\mathbf{x_{n+1}}-\mathbf{x_n}|\le q^n\max\left|\mathbf{u}_0(\xi)t+\mathbf{F}_0(\xi)\frac{t^2}{2}\right|\le q^nA\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\le Cq^n\quad\text{при}\quad C=A\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=t_1}. \tag{39}$$

Последнее неравенство показывает, что для $n > N_1$ максимум разности $\left|\mathbf{x_{n+p}} - \mathbf{x_n}\right|$ может быть сколь угодно малым при любом $p > 0$. Это доказывают неравенства

$$\left|\mathbf{x_{n+p}} - \mathbf{x_n}\right| \le \left|\mathbf{x_{n+p}} - \mathbf{x_{n-p-1}}\right| + \ldots + \left|\mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x_n}\right| \le C(q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \ldots + q^n) = C\frac{q^n(1-q^p)}{1-q} <$$
$$< \frac{q^n}{1-q}C < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > \left[\frac{\ln\varepsilon(1-q) - \ln C}{\ln q}\right].$$

Таким образом, для $q < 1$ последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ является фундаментальной. Неравенства (38), (39) справедливы для $n \in N$, что приводит к утверждению об абсолютной и равномерной сходимости ряда относительно $\xi \in \bar{\Omega}_0$ и $t \in [0, t_1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) < \infty$$

и доказывает равномерную сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_n(\xi, t)\}$

$$\mathbf{x}_n(\xi, t) = \xi + \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{x}_k(\xi, t) - \mathbf{x}_{k-1}(\xi, t)) \tag{40}$$

к некоторой функции $\mathbf{x}(\xi, t)$, которая принадлежит пространству C^∞ в области $Q_t = \bar{\Omega}_0 \times [0, t_1)$.

Предельный переход при $n \to \infty$ в равенствах (28), (31) дает соотношение (25). Отсюда следуют дифференцируемость $\mathbf{x}(\xi, t)$ и обращение в тождество векторного уравнения системы (18).

Используем полученные результаты для оценки верхней границы решения $\mathbf{x}(\xi, t)$ в области $\bar{\Omega}_0 \times [0, t_1)$. Рассмотрим неравенство (40), тогда имеем

$$\left|\mathbf{x}_n(\xi, t)\right| \le \max\left|\xi\right| + \sum_{k=1}^{n}\max\left|\mathbf{x}_k(\xi, t) - \mathbf{x}_{k-1}(\xi, t)\right|.$$

Используя неравенство (38), получаем оценку в виде

$$\left|\mathbf{x}_n(\xi, t)\right| \le \max\left|\xi\right| + \max\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\right|\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, при $0 < q < 1$, получаем

$$\left|x_n(\xi, t)\right| \le \max\left|\xi\right| + \max\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\right|\frac{1}{1-q}$$

и после подстановки в это неравенство (30) получаем:

$$\left|\mathbf{x}_n(\xi, t)\right| \le \max\left|\xi\right| + \left(\max\left|\mathbf{u}_0(\xi)t\right| + \max\left|\mathbf{F}_0(\xi)\right|\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{1-q}.$$

Окончательно имеем оценку с использованием $q = \frac{3}{2}Mt^2$:

$$\left|\mathbf{x}_n(\xi, t)\right| \le \max\left|\xi\right| + \frac{\max\left|\mathbf{u}_0(\xi)t\right| + \max\left|\mathbf{F}_0(\xi)\right|\frac{t^2}{2}}{1 - \frac{3}{2}Mt^2}.$$

Неравенство (29) теоремы доказано при $(\xi, t) \in Q_t = \bar{\Omega}_0 \times [0, t1)$, $D = \frac{3}{2}M$.

Доказательство единственности решения. Допустим, что $\mathbf{y}(\xi, t)$ является другим решением интегрального уравнения (25), и составим разность двух решений (25):

$$\left|\mathbf{x}(\xi, t) - \mathbf{y}(\xi, t)\right| = \left|\int_0^t (t-\tau)\left[\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi, \tau), \tau) - \mathbf{F}(\mathbf{y}(\xi, \tau), \tau)\right]d\tau\right|.$$

Используя лемму Адамара и полученные преобразования (36), заменяя $\mathbf{x}_n$ и $\mathbf{x}_{n-1}$ в правой части равенства на $\mathbf{x}(\xi,t)$ и $\mathbf{y}(\xi,t)$, получаем

$$|\mathbf{x}(\xi,t)-\mathbf{y}(\xi,t)| \le 3M\int_0^t (t-\tau)|\mathbf{x}(\xi,t)-\mathbf{y}(\xi,t)|\,d\tau$$

или

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le 6MT_1\int_0^t |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\,d\tau. \tag{41}$$

Согласно неравенству Гронуолла [33], в интегральной форме для $\xi \in \bar{\Omega}_0$, $t \in [0,t_1)$ из (41) следует $|\mathbf{x}(\xi,t)-\mathbf{y}(\xi,t)| = 0$, т.е. $\mathbf{x}(\xi,t) = \mathbf{y}(\xi,t)$.

Таким образом, не существует другой функции $\mathbf{y}(\xi,t)$, отличной от $\mathbf{x}(\xi,t)$ и удовлетворяющей уравнению (25), начальным условиям (19) и условиям (26).

Доказательство теоремы полностью завершено.

Решение интегрального уравнения (25) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi,t)$ определено при $\xi \in \bar{\Omega}_0$, $t \ge 0$. Тогда свободная граница является образом точек Γ_0 при отображении $\xi \in \Gamma_0$ в точки $\mathbf{x} \in \Gamma_t$. Тем самым задача по определению закона движения свободной границы является также задачей об отыскании отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi,t)$.

Таким образом, задача Коши о движении разреженной конечной массы самогравитирующего газа решена полностью.

Замечание. Задача Коши о движении разреженной конечной массы самогравитирующего газа может быть рассмотрена без серьезных изменений данного текста в пространстве A – аналитических функций – на основании теорем об аналитичности потенциала [23]–[27].

Данную задачу можно изучать в пространстве $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, состоящем из функций, все k-е производные которых равномерно непрерывны по Гёльдеру с показателем α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.–Л., 1947.
2. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
3. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука, 1971.
4. *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 875 с.
5. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987.
6. *Сидоров А.Ф.* О некоторых течениях газа в поле тяжести // Прикл. матем. и механ. 1978. № 42. С. 96–104.
7. *Богоявленский О.И.* Динамика гравитирующего газового эллипсоида // Прикл. матем. и механ. 1976. № 40. С. 270–280.
8. *Дерябин С.Л., Чуев Н.П.* Сферически-симметричное истечение самогравитирующего газа в вакуум // Прикл. матем. и механ. 1994. Т. 58. № 2. С. 77–84.
9. *Барская И.С., Мухин С.И., Чечеткин В.М.* Математическое моделирование равновесных конфигураций самогравитирующего газа // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 41. 23 с.
10. *Страховская Л.Г.* Модель эволюции самогравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 80. 24 с.
11. *Паршин Д.В., Черевко А.А., Чупахин А.П.* Завихренные установившиеся течения самогравитирующего газа // Прикл. механ. и техн. физ. 2014. Т. 55. № 2.
12. *Чуев Н.П.* Аналитический метод исследования пространственных задач динамики самогравитирующего газа // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3. № 1.
13. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М., 1967. 440 с.
14. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
15. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
16. *Овсянников Л.В.* Общие уравнения и примеры. Задачи о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1967. 75 с.

17. *Налимов В.И., Пухначев В.В.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск: НГУ, 1975. 174 с.
18. *Андреев В.К.* Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1992. 136 с. ISBN 5-02 -029967.
19. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
20. *Вайнберг М.М.* Интегродифференциальные уравнения. ВИНИТИ. Итоги науки, 1962.
21. *Lichtenstein L.* Vorlesungen uber einige Klassen nichtlinearer Integralgleiungen und Integro-differential gleichungen. Berlin, 1931. 174 s.
22. *Цалюк З.Б.* Интегральные уравнения Вольтерра. Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. 1977. Т. 15. С. 131–198.
23. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. Гостехиздат, 1953. 415 с.
24. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.–Л.: ОГИЗ, 1946. 318 с.
25. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
26. *Schmidt E.* Bemerkungen zur Potentialtheorie. Mathematische Annalen. T. 68.
27. *Антонов В.А., Никифоров И. И., Холшевников К.В.* Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. 208 с. ISBN 978-5-288-04 733-6.
28. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002. 160 с. ISBN 5-9221-0275- 3.
29. *Смирнов Н.С.* Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 125 с.
30. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. II. М.: Наука, 1983. 448 с.
31. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
32. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1979.
33. *Эванс Л.К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск, 2003. 562 с. ISBN 5-901873-06-8.