

УДК 519.63

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ, ПОСТРОЕННЫЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИДЕЙ ОСНОВОПОЛАГАЮЩИХ РАБОТ С.К. ГОДУНОВА

© 2020 г. М. Я. Иванов^{1,*}, В. К. Мамаев¹

¹ 111116 Москва, Авиамоторная ул., 2, ЦИАМ, Россия

*e-mail: ivanov@ciam.ru

Поступила в редакцию 14.11.2019 г.

Переработанный вариант 14.11.2019 г.

Принята к публикации 16.12.2019 г.

Выполнен анализ галилеево-инвариантных термодинамически согласованных законов сохранения, допускающих класс обобщенных решений. Главная особенность рассматриваемых в статье обобщенных решений состоит в описании гладких решений с потерями кинетической энергии и полного давления, сопровождающих динамический процесс подвода тепла. Принципиальными свойствами рассмотренных обобщенных решений являются проанализированная в работах С.К. Годунова галилеева инвариантность и термодинамическая согласованность исходных законов сохранения при замкнутой математической формулировке теплового газодинамического процесса. Библ. 21. Фиг. 4.

Ключевые слова: законы сохранения, обобщенные решения, термодинамическая согласованность, рост энтропии, потери кинетической энергии, потери полного давления.

DOI: 10.31857/S0044466920040092

ВВЕДЕНИЕ

Исчерпывающее ознакомление с основными идеями академика С.К. Годунова по вопросу обобщенных решений термодинамически согласованных квазилинейных уравнений газовой динамики можно получить по монографиям [1], [2], статьям [3], [4] и записям двух семинаров МИАН им. В.А. Стеклова (в 2002 и 2016 г.), легко доступным по интернету.

Известно, что класс обобщенных решений, помимо традиционных классических гладких решений, включает соотношения на разрывах. В нашем случае при наличии подвода тепла к потоку газа класс обобщенных решений квазилинейных уравнений при замкнутой математической формулировке процесса расширяется и включает гладкие решения. Следуя С.К. Годунову, постановка проблемы рассматривается лишь для небольшой простейшей части феноменологической термогазодинамики (без химических реакций, фазовых переходов и т.п.). Определяющими факторами анализируемых обобщенных решений будут рост энтропии и непосредственно связанные с ним потери кинетической энергии и наличие потерь полного давления.

Обобщенными решениями квазилинейных уравнений мы называем, следуя классическим работам О.А. Ладыженской [5], О.А. Олейник [6], И.М. Гельфанда [7] и С.К. Годунова [8], решения, которые могут быть получены как пределы решений расширенных уравнений с вязкостью и теплопроводностью при стремлении к нулю коэффициентов вязкости и теплопроводности. В цитированных работах подробно изучены условия сходимости гладких решений расширенных уравнений, включающих слагаемые с производными второго порядка, к разрывным решениям. Особенности рассматриваемых нами решений вытекают, во-первых, из использования исходной замкнутой математической формулировки для теплового процесса в виде трех балансовых законов сохранения массы, импульса и энергии и, во-вторых, из построения итоговых, в том числе гладких решений с подводом тепла, характеризующихся наличием потерь кинетической энергии и потерь полного давления.

Выполнение свойства галилеевой инвариантности для получения замкнутой математической формулировки требуется также для задаваемых граничных условий задачи. С этим обстоятель-

ством связано, в частности, задание входных граничных параметров моделируемого потока. В качестве наглядного примера приведем задание значений полного давления и полной температуры потока, втекающего в моделируемую область. При решении стационарных задач методом установления термодинамическая согласованность конечного решения достигается в процессе установления, благодаря интегрированию термодинамически согласованных исходных нестационарных уравнений.

1. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ СОГЛАСОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Сергей Константинович Годунов в своем фундаментальном докладе “Законы сохранения в газовой динамике” на семинаре Математического Института Академии Наук (МИАН) им. Стеклова 24 марта 2016 г. в вводной части подчеркнул: “Проблема, в которой я уже 60 лет пытаюсь разобраться, – это сформулировать определение, что надо называть обобщенным решением у систем квазилинейных уравнений классической математической физики”. В настоящей статье на данный вопрос предложен конкретный ответ для частного случая замкнутой системы квазилинейных уравнений газовой динамики при наличии подвода тепла. Ответ заключается в следующем: “Обобщенными решениями законов сохранения газовой динамики следует называть разрывные или гладкие решения с потерями кинетической энергии и соответствующими потерями полного давления, не удовлетворяющие первому началу термодинамики”. При этом внимание специально акцентируется на проблеме термодинамического согласования формулировки задачи в целом.

Вопрос выделения термодинамически согласованных уравнений и систем в работах С.К. Годунова и соавторов [2]–[4] связывается, прежде всего, с математическим аспектом их инвариантности относительно группы преобразований Галилея, включающей группу вращений. Здесь мы приведем наглядный пример термодинамически несогласованной и термодинамически согласованной систем уравнений с теплофизическими позициями (для случая гладких решений). Свойства галилеевой инвариантности также будут весьма важны далее для нашего рассмотрения. Примером термодинамически несогласованной газодинамической системы при наличии подвода тепла является следующая система трех уравнений неразрывности, движения и энергии

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{q} &= 0, \\ \frac{d\bar{q}}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p &= 0, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \bar{q} &= \frac{\delta Q}{\delta t}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

которая при решении замыкается соответствующим уравнением состояния. Система уравнений (1.1) записана с использованием традиционных обозначений: ρ – плотность, p – давление, ε – удельная внутренняя энергия, \bar{q} – вектор скорости, Q – интенсивность подвода тепла. Эта система уравнений является галилеево-инвариантной [3], [9] и описывает класс гладких классических решений с обратимым подводом тепла (без потерь кинетической энергии). Третье уравнение системы (1.1) следует из традиционного уравнения первого начала термодинамики [10]–[12]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\delta Q}{\delta t}, \quad (1.2)$$

переписанного после дифференцирования величины $1/\rho$ с помощью уравнения неразрывности. Уравнение (1.2) справедливо только для квазистатических обратимых процессов подвода тепла и не содержит изменения удельной кинетической энергии, связанного с теплоподводом. Таким образом, система (1.1), (1.2) рассматривается нами как термодинамически несогласованная система, описывающая процесс обратимого подвода тепла без учета потерь кинетической энергии.

Термодинамическое согласование системы (1.1) достигается использованием вместо уравнения энергии системы (1.1) соотношения, учитывающего дополнительно при подводе тепла изменение удельной кинетической энергии

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \bar{q} \operatorname{grad} p = \frac{\delta Q}{\delta t}. \quad (1.3)$$

Термодинамически согласованная система нестационарных уравнений газовой динамики (1.1) с уравнением (1.3) дает решения для необратимого процесса подвода тепла к движущемуся со скоростью \bar{q} потоку газа (с учетом потерь удельной кинетической энергии и дополнительных тепловых потерь полного давления).

Для возможности получения обобщенных решений системы уравнений газовой динамики, включающей помимо классических гладких решений также решения на сильных разрывах, рассматривают законы сохранения массы, импульса и энергии, записанные в форме интегральных соотношений. Запишем балансовые интегральные уравнения для постоянного по времени объема ω с границей γ (см. [9])

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho d\omega &= - \iint_{\gamma} \rho \bar{q} \cdot \bar{n} d\gamma, \\ \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho \bar{q} d\omega &= - \iint_{\gamma} (p \cdot \bar{n} + \rho \bar{q} (\bar{q} \cdot \bar{n})) d\gamma, \\ \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) d\omega &= - \iint_{\gamma} \left(p + \rho \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) \right) \bar{q} \cdot \bar{n} d\gamma + \iiint_{\omega} \rho \frac{\delta Q}{\delta t} d\omega. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Эта система уравнений представляет собой термодинамически согласованную систему галилеево-инвариантных интегральных законов сохранения, которая описывает необратимый процесс подвода тепла с потерями кинетической энергии дополнительными потерями полного давления.

Здесь можно отметить, что вопрос природы роста энтропии для изолированной системы при $Q = 0$ не нашел к настоящему времени достаточно полного своего решения. В 5-м томе известного десятитомного курса теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица в § 8 (с. 48) читаем: “Вопрос о физических основаниях монотонного возрастания энтропии остается, таким образом, открытым. Не имеет ли его происхождение космологической природы и не связано ли оно с общей проблемой начальных условий в космологии?” [14]. Российский патриарх теоретической физики В.Л. Гинзбург проблему возрастания энтропии вообще относит к первой среди “великих” нерешенных проблем физики. В ведущем отечественном журнале “Успехи физических наук” (т. 169, с. 435), говоря о трех “великих” нерешенных проблемах, он пишет: “Во-первых, речь идет о возрастании энтропии, необратимости и “стреле времени”. Во-вторых, эта проблема интерпретации и понимания квантовой механики. И, в-третьих, это вопрос о связи физики с биологией и, конкретно, проблема редукционизма” [15]. В следующих разделах статьи вопрос необратимого роста энтропии и дополнительных тепловых потерь будет рассмотрен с точки зрения расширенного класса обобщенных решений системы (1.4).

2. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ С ПОТЕРЯМИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Из интегральных соотношений (1.4) следует дивергентная форма дифференциальных уравнений неразрывности, импульса и энергии в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{q}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{q} + \operatorname{div} \Pi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[\left(p + \rho \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) \right) \bar{q} \right] &= \rho \frac{\delta Q}{\delta t}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь Π – известный тензор второго ранга.

Система уравнений (2.1) замыкается уравнением состояния

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \tag{2.2}$$

Дифференциальные соотношения (2.1) в дивергентной форме справедливы для обобщенных решений уравнений газовой динамики при наличии подвода тепла. Осуществим теперь сопоставление приведенной математической формулировки с первым началом термодинамики (1.2),

отмечая на каждом этапе справедливость соответствующих преобразований. Продифференцируем левую часть уравнения энергии из (2.1), допуская соответствующую гладкость решений,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) + \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \bar{q} \operatorname{grad} \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) + \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) \operatorname{div}(\rho \bar{q}) + \operatorname{div}(p \bar{q}) = \rho \frac{\delta Q}{\delta t}.$$

При выполнении уравнения неразрывности, сокращениях на величину ρ и переходе к полной производной приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\varepsilon + \frac{q^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(p \bar{q}) = \frac{\delta Q}{\delta t}. \quad (2.3)$$

Такую форму принимает дифференциальный закон сохранения энергии при использовании замкнутой математической формулировки рассматриваемого теплового процесса. Далее, с учетом уравнения неразрывности из (2.1) соотношение (2.3) сводится к виду (1.3), которое здесь в целях удобства изложения стоит повторить:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \frac{\bar{q}}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{\delta Q}{\delta t}. \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) показывает, что в случае необратимого процесса подвода тепла к потоку газа, движущемуся со скоростью \bar{q} , подводимая тепловая энергия затрачивается на возрастание удельной внутренней энергии (со скоростью $d\varepsilon/dt$), на произведенную квазистатическую работу (слагаемое $pd(1/\rho)/dt$), на изменение удельной кинетической энергии (со скоростью $d(q^2/2)/dt$) и на величину дополнительной мощности, производимой силами давления (слагаемое $\bar{q}(\operatorname{grad} p)/\rho$). Последнее слагаемое обычно отсутствует в энергетических соотношениях термодинамики.

Увеличение энтропии в процессе необратимого подвода тепла в рассматриваемом случае можно оценить по сумме первых двух слагаемых в левой части соотношения (2.4), приравняв его члену Tds/dt ,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\delta Q_1}{\delta t}. \quad (2.5)$$

Потери кинетической энергии (и, как следствие, дополнительные потери полного давления) определяются по соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \frac{\bar{q}}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{\delta Q_2}{\delta t}. \quad (2.6)$$

Дифференциальные уравнения (2.3)–(2.6) получены в общем случае для гладких решений из системы (2.1) и описывают необратимый процесс подвода тепла к потоку газа. Обратимый процесс подвода тепла, как уже было отмечено, описывается первым началом термодинамики (1.2) и справедлив только при отсутствии потерь кинетической энергии, когда выполняется теорема “живых сил”

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \frac{\bar{q}}{\rho} \operatorname{grad} p = 0. \quad (2.7)$$

Теорема “живых сил”, выражаемая соотношением (2.7), следует из уравнения импульсов (второе уравнение системы (1.1)) путем скалярного умножения на вектор скорости \bar{q} и описывает изменение кинетической энергии без присущих ей потерь, связанных с подводом тепла. Здесь важно отметить, что уравнение (2.7) не является инвариантным относительно преобразования Галилея и не сводится к форме закона сохранения.

Основным выводом проведенных преобразований является тот факт, что для рассматриваемого процесса необратимого подвода тепла к потоку газа на гладких решениях выполняется закон сохранения энергии (1.3), отличающийся в общем случае от первого начала термодинамики для квазистатических обратимых процессов. Еще раз подчеркнем хорошо известный факт, что первое начало термодинамики (1.2) справедливо только для квазистатических обратимых процессов, в силу чего систему (1.1) следует считать термодинамически несогласованной.

3. ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

Наличие потерь кинетической энергии и дополнительных потерь полного давления является узловым свойством рассматриваемых нами обобщенных решений галилеево-инвариантных уравнений термодинамики. Свойство галилеевой инвариантности должно выполняться также для граничных условий задачи, так как при переходе в движущуюся систему координат кинетическая энергия втекающего в рассматриваемую область потока увеличивается. При этом важно также учитывать возможное изменение ориентации вектора скорости (при реализации преобразований вращения).

Укажем еще раз на то, что используемое нами расширение класса обобщенных решений состоит в рассмотрении гладких дифференцируемых решений замкнутой системы уравнений. Следуя классическим цитированным выше работам [5]–[8], обобщенными решениями квазилинейных уравнений мы продолжаем называть решения, которые могут быть получены как пределы решений расширенных уравнений с вязкостью и теплопроводностью при стремлении к нулю коэффициентов вязкости и теплопроводности. Поясним сказанное сначала на хорошо изученном примере одномерных обобщенных решений без подвода тепла и связанной с ним знаменитой “ошибке Римана”, а затем перейдем к задачам термодинамики с гладкими решениями и теплоподводом.

Используя методологию работы [5], запишем одномерную систему балансовых уравнений, аналогичных (2.1), для вязкого и теплопроводного газа при отсутствии теплоподвода

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(p + \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right) u \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \eta u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Система уравнений (3.1) с использованием уравнения состояния (2.2) является замкнутой и имеет гладкие (дифференцируемые) решения. Она представляет собой конкретный достаточно простой пример галилеево-инвариантных законов сохранения [9], удовлетворяющих группе преобразований вращения (в одномерном случае сводящейся к преобразованию отражения, т.е. к одновременной замене x на $-x$ и u на $-u$), и преобразованию перехода в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью. Удовлетворение системой (3.1) преобразованию вращения является очевидным. С целью демонстрации для (3.1) справедливости преобразования перехода в движущуюся с постоянной скоростью D систему координат выполним традиционное преобразование независимых переменных

$$X = x - Dt; \quad T = t.$$

Несложно показать, что в этих независимых переменных система дивергентных уравнений (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial \rho(u - D)}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial \rho(u - D)}{\partial T} + \frac{\partial (p + \rho(u - D)^2)}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{4}{3} \eta \frac{\partial (u - D)}{\partial X} \right), \\ \frac{\partial}{\partial T} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{(u - D)^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[\left(p + \rho \left(\varepsilon + \frac{(u - D)^2}{2} \right) \right) (u - D) \right] &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{4}{3} \eta (u - D) \frac{\partial (u - D)}{\partial X} + \lambda \frac{\partial T}{\partial X} \right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Полученная система (3.2), для которой скорость газа в новой системе координат выражается в виде $U = u - D$, доказывает инвариантность начальных уравнений (3.1) при переходе в координатную систему, движущуюся с постоянной скоростью D . При этом следует соответствующим образом определять кинетическую энергию потока, втекающего в рассматриваемую область. Нами выписана итоговая галилеево-инвариантная система уравнений (3.2), когда промежуточные преобразования для краткости опущены.

Преобразуем теперь уравнение сохранения энергии из замкнутой системы (3.1) по аналогии с преобразованиями предыдущего раздела статьи и придем к соотношению, аналогичному (2.4), вида

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{u \partial p}{\rho \partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \eta u \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (3.3)$$

Рассматриваемые нами обобщенные гладкие решения включают описание потерь кинетической энергии и полного давления. При стремлении η и λ к 0 эти гладкие решения преобразуются в разрывные решения, также включающие описание потерь кинетической энергии и полного давления. При этом для расчета роста энтропии в скачке уплотнения следует использовать соотношение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \sigma > 0, \quad (3.4)$$

а величина возникающих потерь кинетической энергии и полного давления в скачке уплотнения характеризуется соотношением

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{u \partial p}{\rho \partial x} = -\sigma < 0. \quad (3.5)$$

Известная “ошибка Римана” состояла в том, что при получении соотношений на скачке уплотнения использовались условия для изоэнтропического потока при $\sigma = 0$ (без потерь полного давления). В этом случае, вводя обычным образом величину энтропии s (с помощью интегрирующего множителя $1/T$), получаем дополнительный закон сохранения энтропии

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (3.6)$$

Выполненный анализ дает ответ на вопрос условий выполнения дополнительного закона сохранения газовой динамики, а именно закона сохранения энтропии. Из соотношений (3.4)–(3.6) следует, что дополнительный закон сохранения энтропии выполняется, как это хорошо известно, для обратимых процессов, когда с необходимостью отсутствуют потери кинетической энергии и полного давления.

В заключение этого раздела статьи подчеркнем еще раз важные для дальнейшего изложения особенности получения обобщенных решений. Во-первых, это рассмотрение обобщенных решений для законов сохранения, описывающих, в том числе, необратимые нестационарные процессы при наличии потерь кинетической энергии и полного давления. Во-вторых, это галилеева инвариантность исходных законов и граничных условий, в-третьих, это процедура получения обобщенных решений из расширенной системы со вторыми производными при стремлении коэффициентов вязкости и теплопроводности к нулю. Все перечисленные особенности присущи обобщенным гладким решениям термодинамически согласованных галилеево-инвариантных уравнений при наличии необратимого процесса подвода тепла. Важным моментом является также аккуратный переход от решений для исходной нестационарной системы уравнений к стационарным решениям с соблюдением соответствующих граничных условий. В частности, напомним, что известный интеграл Бернулли справедлив только на стационарных решениях.

4. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОТЕРЬ ПОЛНОГО ДАВЛЕНИЯ

С учетом принципиальной важности вопроса о потерях кинетической энергии и полного давления продемонстрируем также на простом одномерном примере отличие гладких дифференцируемых решений системы уравнений (3.1) от решений, получаемых с использованием уравнения импульсов в обычной продифференцированной форме (далее, обозначения параметров, аналогичны обозначениям в (3.2) и (3.3))

$$\rho \frac{dU}{dT} = -\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{4}{3} \eta \frac{\partial U}{\partial X} \right). \quad (4.1)$$

Умножаем соотношение (4.1) на U и приходим к “механическому” уравнению энергии (теореме “живых сил”):

$$\rho \frac{d(U^2/2)}{dT} = -U \frac{\partial p}{\partial X} + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{4}{3} \eta \frac{\partial U}{\partial X} \right). \quad (4.2)$$

Построим стационарные гладкие решения в виде фронта перехода для системы (3.2) и той же системы, в которой уравнение импульсов заменено на соотношение (4.2). Зададим граничные условия, согласно которым градиенты всех величин перед фронтом при $x \rightarrow -\infty$ и за фронтом при $x \rightarrow +\infty$ равны нулю, а сами величины принимают свои начальные и конечные значения, которым припишем индексы “1” и “2”. Стационарное решение реализуется для конкретного значения скорости фронта перехода D , определяемого заданием граничных условий (в частности, по перепаду давления). Для случая стационарного решения при $d/dT = 0$ из (3.2) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}(\rho U) &= 0, \\ \frac{d}{dX} \left(p + \rho U^2 - \frac{4}{3} \eta \frac{dU}{dX} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dX} \left[\rho U \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \eta U \frac{dU}{dX} - \lambda \frac{dT}{dX} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Первые интегралы системы (4.3) очевидны:

$$\begin{aligned} \rho_1 U_1 &= \rho U, \\ p_1 + \rho_1 U_1^2 &= p + \rho U^2 - \frac{4}{3} \eta \frac{dU}{dX}, \\ \rho_1 U_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{U_1^2}{2} \right) &= \rho U \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \eta U \frac{dU}{dX} - \lambda \frac{dT}{dX}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Постоянные интегрирования здесь выражены через начальные значения величин с индексом “1”, а искомые функции ρ , p , ε и U являются функциями координаты x . Итак, нами получены известные гладкие решения, описывающие изменение параметров через фронт сжатия конечной толщины в системе координат, связанной со скоростью распространения фронта.

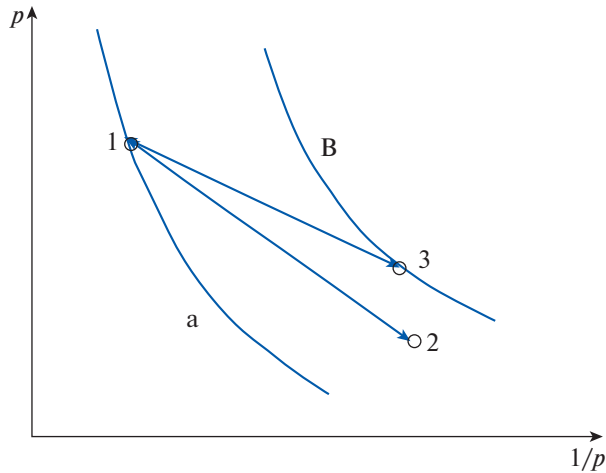
Из соотношений (4.4), полученных на основе законов сохранения (4.3), легко выписать связь между параметрами на границах фронта и в пределе при стремлении коэффициентов вязкости и теплопроводности к нулю известные соотношения на скачке уплотнения. В то же время уравнение (4.2) не представляется в форме закона сохранения и не может быть проинтегрировано в явном виде при переходе через фронт сжатия. При интегрировании (4.2) на фронте сжатия действуют отличные от физического механизма диссипативные эффекты, задаваемые последним слагаемым в правой части уравнения (4.2). В итоге получаем отличное от предыдущего случая решение.

Для гладких решений системы (4.4), когда на границах фронта перехода выполняется условие постоянства параметров (т.е. $d/dX = 0$), связь между термодинамическими величинами ρ , p , ε выражается известной адиабатой Гюгонио

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) (p + p_1). \quad (4.5)$$

Рассмотрим далее подробно гладкие одномерные стационарные решения с теплоподводом для цилиндрической трубы постоянного сечения. При этом будем исходить из законов сохранения, аналогичных (4.3):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho u}{dx} &= 0, \\ \frac{d(p + \rho u^2)}{dx} &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$



Фиг. 1. Процесс подвода тепла в плоскости $(p, 1/\rho)$ по лучу Михельсона 1–2 при наличии потерь полного давления и по лучу Михельсона 1–3 при отсутствии потерь полного давления (с “ошибкой Римана”); линии (а) и (в) – адиабаты.

$$\frac{d\rho \left[\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p u \right]}{dx} = \rho \frac{\delta Q}{\delta t}.$$

Система (4.6), в частности, используется при описании дефлаграционного процесса горения [20], [21].

Напомним некоторые известные свойства системы (4.6). Весьма интересными для нас являются “лучи Михельсона” [20], [21]. Из первых двух уравнений (4.6) имеем связь между параметрами потока в двух сечениях 1 и 2 цилиндрической трубы

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 = m, \\ p_1 + u_1 m &= p_2 + u_2 m. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для лучей Михельсона связь плотности и давления выражается с помощью постоянного параметра m^2

$$m^2 = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}. \quad (4.8)$$

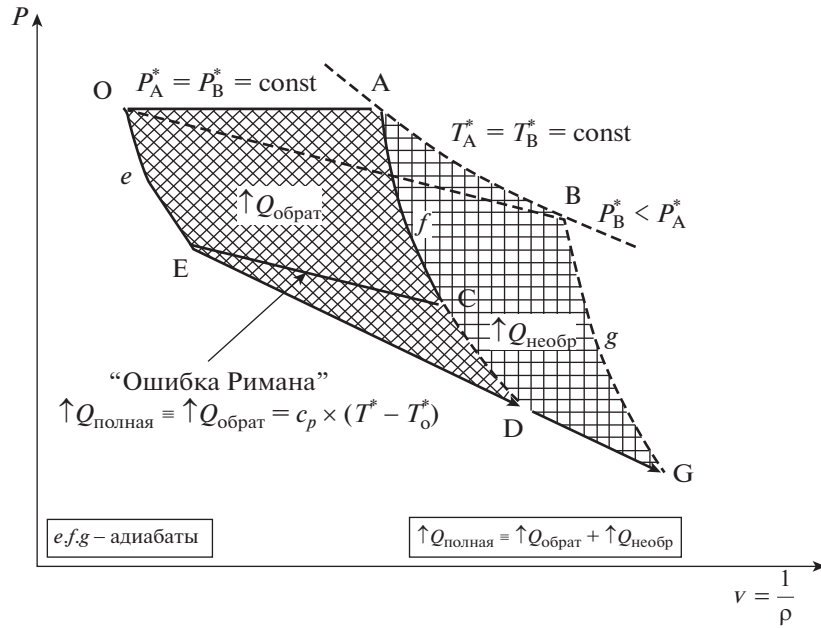
Параметр m^2 определяет при $Q = 0$ касательную к адиабате Пуассона (при условии постоянства энтропии) или линию перехода от сечения 1 к сечению 2 по адиабате Гюгонио (при наличии скачка уплотнения и потерь полного давления).

Для нас интересен случай с подводом тепла $Q \neq 0$, на примере которого мы продемонстрируем термодинамически согласованные и не согласованные решения. При отсутствии термодинамического согласования соотношения (4.7) и (4.8) замыкаются первым началом термодинамики (для обратимого процесса подвода тепла), при котором справедливо традиционное выражение для роста энтропии

$$s_3 - s_1 = c_v \left[\ln \left(\frac{p_3}{\rho_3^\kappa} \right) - \ln \left(\frac{p_1}{\rho_1^\kappa} \right) \right] = \int_1^3 \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.9)$$

В случае дозвукового потока по лучу Михельсона в плоскости $(p, 1/\rho)$, представленной на фиг. 1, мы переходим из точки 1 на адиабате (а) в точку 3 на соседней адиабате (в) без потерь полного давления.

Для термодинамически согласованной системы при $Q \neq 0$ наклон луча Михельсона определяется интегрированием соотношения энергии системы (4.6). При этом для дозвукового потока



Фиг. 2. Диаграмма подвода тепла при применении соотношений (1.2) и (2.4).

луч Михельсона 1–2 располагается между адиабатой (а) и лучом 1–3 (фиг. 1). Не все подведенное тепло идет на увеличение энтропии (4.9). Часть тепла тратится на увеличение удельной кинетической энергии потока при наличии потерь полного давления, которая определяется степенью подогрева:

$$\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right)_2 - \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right)_1 = \Delta Q, \tag{4.10}$$

где при выполнении (4.7) имеем $u = m/\rho$.

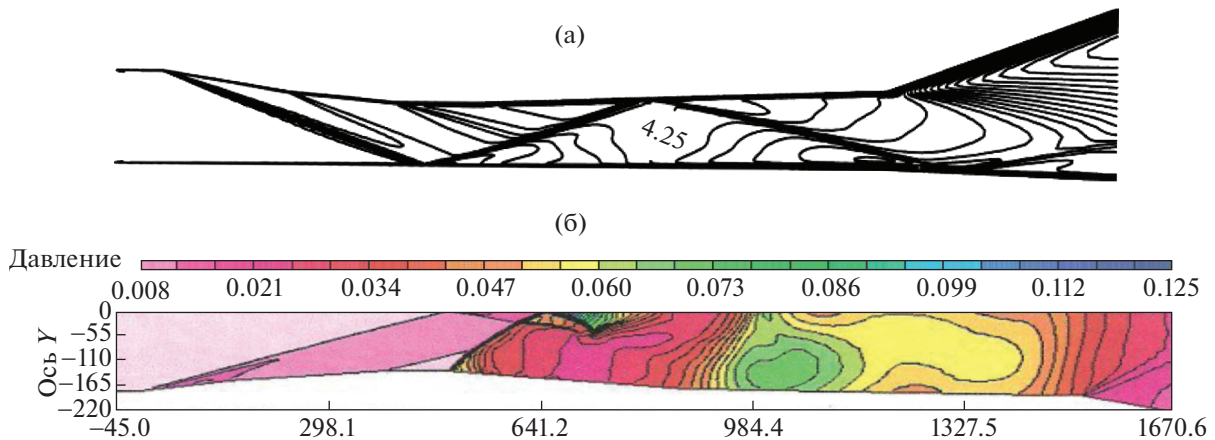
Для дозвукового течения в сечении 2 величина давления p_2 задается граничным условием задачи. При критическом истечении реализуется режим Чепмена–Жуге [20]. При подводе тепла сверхзвуковому потоку по аналогии легко рассмотреть режим с торможением потока.

Проиллюстрируем также данный процесс с демонстрацией изменения полных давлений. На фиг. 2 наглядным графическим способом для стационарного одномерного случая показана диаграмма подвода тепла в цикле Брайтона [13] в той же плоскости ($p, 1/\rho$) при применении соотношений (1.2) и (2.4) и потере полного давления. Отрезок прямой OA соответствует постоянству полного давления при подводе тепла Q . Отрезок ЕС отвечает подводу этого же количества тепла Q к движущемуся потоку без потерь полного давления (аналог “ошибки Римана”, это тот же отрезок 1–3 на фиг. 1). Отрезок EG соответствует реальному процессу подвода тепла с потерями полного давления (на фиг. 1 это отрезок 1–2). Отрезок OB показывает изменение потерь полного давления для процесса подвода тепла с потерями полного давления, линия AB отвечает постоянной температуре торможения, кривые e, f, g – адиабаты.

Приведем теперь количественные формулы. Запишем законы сохранения через газодинамическую функцию $q(\lambda)$ [18] в форме, используемой для одномерного термогазодинамического расчета цикла Брайтона [13]. Рассмотрим тепловые потери при подводе тепла ΔQ к потоку газа в канале с поперечным сечением F . Одномерные законы сохранения потоков массы (постоянство расхода G) и энергии ($Gc_p T^*$) для двух сечений канала 1 и 2 имеют вид (см. [13], [18])

$$G = \frac{m_2 p_2^* q(\lambda_2) F_2}{\sqrt{R_2 T_2^*}} = \frac{m_1 p_1^* q(\lambda_1) F_1}{\sqrt{R_1 T_1^*}}, \tag{4.11}$$

$$Gc_{p2} T_2^* = Gc_{p1} T_1^* + \Delta Q.$$



Фиг. 3. Линии постоянства числа Маха при отсутствии горения (а) и на рабочем режиме с горением (б).

Здесь p^* и T^* – полные значения давления и температуры, p – статическое давление, u – скорость, R – газовая постоянная, κ – показатель адиабаты.

Соотношения (4.11) для простейшего случая канала постоянного сечения и неизменных свойств газа сводятся к элементарным соотношениям (см. [13])

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = 1 + \nu = \theta, \quad \nu = \frac{\Delta Q}{Gc_p T_1^*},$$

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_2)} \sqrt{\theta}.$$

Последнее соотношение определяет величину потерь полного давления в зависимости от степени подогрева θ . Эти одномерные соотношения наглядно показывают необходимость аккуратного учета тепловых потерь и связанных с ними потерь полного давления.

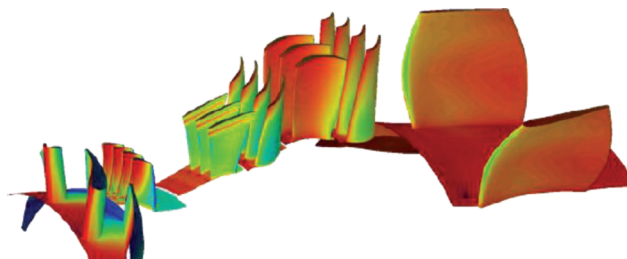
С указанными весьма заметными потерями связан, в частности, тот факт, что при согласовании узлов газогенератора современных и перспективных высокотемпературных турбореактивных двухконтурных двигателей (ТРДД) применяют повышенные степени сжатия компрессоров. В настоящее время при термодинамической увязке ТРДД описанные в статье дополнительные потери в большинстве случаев игнорируются.

5. ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Моделирование рассмотренных обобщенных решений продемонстрируем на примерах расчета термогазодинамического процесса в проточной части воздушно-реактивных двигателей (ВРД), реализующих цикл Брайтона. Расчеты выполнены с детальным учетом влияния всех значимых потерь и теплового излучения [22], [23]. На фиг. 3 представлена картина течения в виде линий постоянства числа Маха в проточной части прямоточного двигателя без теплоподвода (а) и при наличии интенсивного теплоподвода (б). При интенсивном подводе тепла в камере сгорания реализуется течение в тракте двигателя с системой “выбитых” скачков уплотнения в область воздухозаборника.

Следующие результаты относятся к моделированию процесса, реализующегося в полном тракте авиационной газовой турбины, состоящей из одноступенчатой турбины высокого давления, двухступенчатой турбины низкого давления и выходного диффузора. На фиг. 4 приведена полная картина распределения скорости потока по тракту турбины. Расчет выполнен с детальным учетом потерь полного давления.

В заключение статьи отметим необходимость аккуратного учета эффектов необратимости тепловых процессов и наличия потерь полного давления при решении прикладных задач аэротермогазодинамики. Выполненный анализ позволяет, в частности, обосновать стратегию выбо-



Фиг. 4. Картина распределения скорости потока по тракту турбины.

ра схем и параметров новых высокотемпературных авиационных двигателей, реализующих в своей работе тепловой цикл Брайтона.

Авторы выражают признательность Р.З. Нигматуллину и Ю.И. Кимасову за полезные обсуждения и высказанные замечания по работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Термодинамика газов и дифференциальные уравнения // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. № 5 (89). С. 97–116.
2. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. М.: Науч. Книга, 1988. 280 с.
3. Годунов С.К., Гордиенко В.М. Простейшие галилеево-инвариантные и термодинамически согласованные законы сохранения // Прикл. механ. и техн. физ. 2002. Т. 43. № 1 (251). С. 3–16.
4. Годунов С.К., Михайлова Т.Ю., Роменский Е.И. Системы термодинамически согласованных законов сохранения, инвариантные относительно вращений // Сибирский матем. журнал. 1996. Т. 37. № 4. С. 790–806.
5. Ладыженская О.А. О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений, как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении “коэффициента вязкости” к нулю // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111. № 2. С. 291–294.
6. Олейник О.А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 3 (75). С. 3–73.
7. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. № 2 (86). С. 87–158.
8. Годунов С.К. О понятии обобщенного решения // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 6. С. 1279–1282.
9. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
10. Путилов К.А. Термодинамика. М.: Наука, 1971. 376 с.
11. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высш. школа, 1991. 376 с.
12. Ястржембский А.С. Техническая термодинамика. М.–Л., 1953. 544 с.
13. Теория ВРД / Под ред. С.М. Шляхтенко. М.: Машиностроение, 1975. 568 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том V. Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
15. Гинзбург В.Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169. № 4. С. 419–441.
16. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991. 600 с.
17. Нечаев Ю.Н., Федоров Р.М., Котовский В.Н., Полев А.С. Теория авиационных двигателей. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2006. 366 с.
18. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
19. Михельсон В.А. О нормальной скорости воспламенения гремучих газовых смесей. М.: МГУ, 1890.
20. Иванов М.Я., Нигматуллин Р.З. Высокоуровневое моделирование рабочего процесса в газовых турбинах // В сб. Высокотемпературные газовые турбины. М.: Торус-Пресс, 2010. С. 11–56.
21. Иванов М.Я. Термодинамически согласованные законы сохранения в модели излучающего теплопроводного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 142–151.