ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 4, с. 612–620

УДК 517.929.4

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

ОЦЕНКИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1)]

© 2020 г. И. И. Матвеева[1,2]

[1] *630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия*
[2] *630090 Новосибирск, ул. Пирогова 2, Новосибирский государственный университет, Россия*
e-mail: matveeva@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 14.11.2019 г.
Переработанный вариант 14.11.2019 г.
Принята к публикации 16.12.2019 г.

Рассматривается класс нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах. Используя специальный класс функционалов Ляпунова–Красовского, указаны условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получены оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений на бесконечности. Библ. 26.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, экспоненциальная устойчивость, оценки решений, функционал Ляпунова–Красовского.

DOI: 10.31857/S0044466920040122

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) + F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \quad t \ge 0, \tag{1.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, т.е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad C(t+T) \equiv C(t),$$

$\tau > 0$ – параметр запаздывания, $F(t,u,v,w)$ – непрерывная вещественнозначная вектор-функция. Мы предполагаем, что $F(t,u,v,w)$ – липшицева функция по u на любом компакте $G \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u,v,w)\| \le q_1\|u\| + q_2\|v\| + q_3\|w\|, \quad t \ge 0, \quad u,v,w \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

при $q_1, q_2, q_3 \ge 0$.

Наша цель – получить условия экспоненциальной устойчивости решений и установить оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений при $t \to \infty$.

Исследованию проблемы устойчивости решений уравнений с запаздыванием посвящено очень много работ (см., например, монографии [1]–[11] и имеющуюся в них библиографию). Для получения условий устойчивости исследователи часто используют функционалы Ляпунова–Красовского (типа Ляпунова) (например, см. библиографию в обзорах [12], [13]). Отметим, что функционал Ляпунова–Красовского является аналогом функции Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае постоянных коэффициентов для ее построения можно использовать решение уравнения Ляпунова, с помощью которого удается не только формулировать условия асимптотической устойчивости (критерий Ляпунова), но и указывать скорость экспоненциального убывания решений на бесконечности (оценка Крейна) [14]. Критерий

[1)] Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1613.

Ляпунова и оценка Крейна были взяты С.К. Годуновым за основу при разработке алгоритмов с гарантированной точностью для численного исследования устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [15]. Эти исследования были развиты в работах его учеников.

Однако для уравнений с запаздыванием далеко не каждый функционал Ляпунова–Красовского, с помощью которого можно указать условия экспоненциальной устойчивости, позволяет получать оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений на бесконечности. В последние годы исследования в этом направлении активно развиваются. Очень много работ посвящено уравнениям с постоянными коэффициентами, включая уравнения нейтрального типа. В неавтономном случае число таких работ существенно меньше, особенно в случае, когда матрица $C(t)$ не является постоянной.

Данная работа продолжает наши исследования экспоненциальной устойчивости решений неавтономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, работы [16]–[26]). В статьях [16], [17] рассматривались системы с $C(t) \equiv 0$, в [18]–[21], [24] – системы, когда $C(t) \equiv C$ – постоянная матрица, в [22], [23], [25], [26] – системы, когда $C(t)$ есть T-периодическая матрица. Были указаны условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получены оценки экспоненциального убывания решений на бесконечности. При получении этих результатов авторы перечисленных статей использовали введенные ими функционалы Ляпунова–Красовского.

Выбор подходящего функционала Ляпунова–Красовского позволяет для более широкого класса систем устанавливать экспоненциальную устойчивость и получать более точные оценки скорости убывания решений на бесконечности. В работе [26] был введен достаточно общий функционал Ляпунова–Красовского, который содержит все функционалы, предложенные и использованные в работах [16]–[25]. С использованием этого функционала были указаны условия экспоненциальной устойчивости и получены оценки экспоненциального убывания решений линейных систем следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau). \tag{1.3}$$

В данной работе, используя этот функционал, мы проводим исследования экспоненциальной устойчивости решений систем вида (1.1). В разд. 2 мы вводим необходимые обозначения и формулируем основные результаты, их доказательство проводится в разд. 3. Отметим, что из полученных результатов будут вытекать условия робастной устойчивости для систем вида (1.3).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Определим матрицы размера $2n \times 2n$

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_2^*(t) & H_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}(t,s) = \begin{pmatrix} K_1(t,s) & K_2(t,s) \\ K_2^*(t,s) & K_3(t,s) \end{pmatrix}$$

такие, что

$$\mathcal{H}(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap C^1([lT,(l+1)T]), \quad l = 0,1,\ldots, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^*(t), \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t+T), \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

$$\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq h(t)\|u\|^2, \quad u,v \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

где $h(t) > 0$ – непрерывная T-периодическая функция,

$$\mathcal{K}(t,s) \in C^1([0,\infty)\times[0,\tau]), \tag{2.4}$$

$$\mathcal{K}(t,s) = \mathcal{K}^*(t,s), \quad \mathcal{K}(t,s) = \mathcal{K}(t+T,s), \quad \mathcal{K}(t,s) \geq 0, \quad t \geq 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{2.5}$$

Здесь и далее матричное неравенство $S > 0$ (или $S < 0$) означает, что S – положительно (или отрицательно) определенная эрмитова матрица. Для матриц мы используем спектральную норму.

Определим матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

с элементами

$$\begin{gathered} Q_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H_1(t) - H_1(t)A(t) - A^*(t)H_1(t) - K_1(t,0) - K_2(t,0)A(t) - \\ - A^*(t)K_2^*(t,0) - A^*(t)K_3(t,0)A(t), \\ Q_{12}(t) = -\frac{d}{dt}H_2(t) - H_1(t)B(t) - A^*(t)H_2(t) - K_2(t,0)B(t) - A^*(t)K_3(t,0)B(t), \\ Q_{13}(t) = -H_1(t)C(t) - H_2(t) - K_2(t,0)C(t) - A^*(t)K_3(t,0)C(t), \\ Q_{22}(t) = -\frac{d}{dt}H_3(t) - H_2^*(t)B(t) - B^*(t)H_2(t) + K_1(t,\tau) - B^*(t)K_3(t,0)B(t), \\ Q_{23}(t) = -H_2^*(t)C(t) - H_3(t) + K_2(t,\tau) - B^*(t)K_3(t,0)C(t), \\ Q_{33}(t) = K_3(t,\tau) - C^*(t)K_3(t,0)C(t). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Введем функции

$$\begin{gathered} \beta_1(t) = 2\|H_1(t)\| + 2\|K_2(t,0)\| + (2\|A(t)\| + q_1)\|K_3(t,0)\|, \\ \beta_2(t) = 2\|H_2(t)\| + (2\|B(t)\| + q_2)\|K_3(t,0)\|, \\ \beta_3(t) = (2\|C(t)\| + q_3)\|K_3(t,0)\|, \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} \alpha_1(t) = q_1\beta_1(t) + \frac{q_1\beta_2(t) + q_2\beta_1(t)}{2} + \frac{q_1\beta_3(t) + q_3\beta_1(t)}{2}, \\ \alpha_2(t) = q_2\beta_2(t) + \frac{q_2\beta_1(t) + q_1\beta_2(t)}{2} + \frac{q_2\beta_3(t) + q_3\beta_2(t)}{2}, \\ \alpha_3(t) = q_3\beta_3(t) + \frac{q_3\beta_1(t) + q_1\beta_3(t)}{2} + \frac{q_3\beta_2(t) + q_2\beta_3(t)}{2} \end{gathered} \tag{2.9}$$

и матрицу

$$Q^\alpha(t) = Q(t) - \begin{pmatrix} \alpha_1(t)I & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(t)I & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3(t)I \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где I — единичная матрица.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1)

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) + F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \quad t > 0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{gathered} \tag{2.11}$$

где $\varphi(t) \in C^1[-\tau, 0]$ — заданная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1) и оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений начальной задачи (2.11) при $t \to \infty$.

Теорема 1. *Предположим, что существуют матрицы* $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, *удовлетворяющие условиям* (2.1)–(2.5) *такие, что для матрицы* $Q^\alpha(t)$ *в* (2.10) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle, \quad u, v, w \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2.12}$$

где $p(t)$ *есть* T*-периодическая функция,* $p(t) \in C([lT,(l+1)T])$, $l = 0,1,\ldots$. *Если существует* T*-периодическая функция* $k(t)$ *такая, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,s) + \frac{\partial}{\partial s}K(t,s) + k(t)K(t,s) \le 0, \quad t \ge 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{2.13}$$

и

$$\int_0^T \gamma(\xi)d\xi > 0, \quad \textit{где} \quad \gamma(\xi) = \min\{p(\xi), k(\xi)\}, \tag{2.14}$$

тогда нулевое решение системы (1.1) *экспоненциально устойчиво. Более того, для решения задачи* (2.11) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{2.15}$$

где

$$V(0,\varphi) = \left\langle \mathcal{H}(0)\begin{pmatrix}\varphi(0)\\ \varphi(-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi(0)\\ \varphi(-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle + \int_{-\tau}^0 \left\langle \mathcal{K}(0,-s)\begin{pmatrix}\varphi(s)\\ \frac{d}{ds}\varphi(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi(s)\\ \frac{d}{ds}\varphi(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds, \tag{2.16}$$

функция $h(t)$ *определена в* (2.3).

Нетрудно убедиться, что неравенство (2.15) при условии (2.14) гарантирует экспоненциальное убывание решений задачи (2.11) при $t \to \infty$. Действительно, из (2.15) вытекает оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} + \gamma_2 T\right), \tag{2.17}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma(\xi)d\xi, \quad \gamma_2 = \max_{\xi \in [0,T]}|\gamma(\xi)|.$$

Замечание 1. Неравенство (2.17) позволяет оценить скорость экспоненциального убывания решений системы (1.1) на бесконечности, при этом мы не используем спектральную информацию (спектр оператора монодромии или корни квазимногочленов в случае постоянных коэффициентов).

Замечание 2. Из полученных результатов вытекает утверждение о робастной устойчивости для систем вида (1.3). Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) + \Delta A(t)y(t) + \Delta B(t)y(t-\tau) + \Delta C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \tag{2.18}$$

где $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ и $\Delta C(t)$ – произвольные матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами такие, что

$$\|\Delta A(t)\| \le q_1, \quad \|\Delta B(t)\| \le q_2, \quad \|\Delta C(t)\| \le q_3, \quad t \ge 0.$$

Очевидно, в этом случае вектор-функция

$$F(t,u,v,w) = \Delta A(t)u + \Delta B(t)v + \Delta C(t)w$$

удовлетворяет неравенству (1.2). Тогда теорема 1 дает условия робастной устойчивости для (1.3) и оценки экспоненциального убывания решений возмущенной системы (2.18) при $t \to \infty$.

Скорость убывания в (2.15) зависит от функции $p(t)$. Поэтому естественно возникает вопрос о нахождении этой функции. Ниже при чуть более ограничительных условиях по сравнению с теоремой 1 мы укажем такую функцию в явном виде. Этот факт может быть полезен при исследовании конкретных задач.

Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.5) такие, что матрица $Q^{\alpha}(t)$ в (2.10) положительно определена при $t \ge 0$. Перепишем матрицу $Q^{\alpha}(t)$ в виде

$$Q^{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^*(t) & Q_3(t) \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) - \alpha_1(t)I & Q_{12}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) - \alpha_2(t)I \end{pmatrix},$$

$$Q_2(t) = \begin{pmatrix} Q_{13}(t) \\ Q_{23}(t) \end{pmatrix}, \quad Q_3(t) = Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I,$$

$Q_{ij}(t)$, $\alpha_j(t)$ определены в (2.7), (2.9) соответственно. Очевидно,

$$Q^{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} I & Q_2(t)Q_3^{-1}(t) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & Q_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_3^{-1}Q_2^*(t) & I \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

где

$$P(t) = Q_1(t) - Q_2(t)Q_3^{-1}(t)Q_2^*(t). \tag{2.20}$$

Если $Q^{\alpha}(t)$ положительно определена, то матрица $P(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p_{\min}(t)$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Предположим, что существуют матрицы* $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, *удовлетворяющие условиям* (2.1)–(2.5) *такие, что матрица* $Q^{\alpha}(t)$ *в* (2.10) *положительно определена при* $t \ge 0$. *Если существует* T*-периодическая функция* $k(t)$ *такая, что выполнены* (2.13) *и* (2.14) *при* $p(t) = \dfrac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}$, *тогда для решения задачи* (2.11) *имеет место оценка* (2.15).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1. Очевидно, экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1.1) вытекает из оценки (2.17), которая следует из неравенства (2.15), как показано выше. Поэтому достаточно доказать (2.15).

Пусть $y(t)$ – решение начальной задачи (2.11). Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова–Красовского

$$V(t,y) = \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \left\langle \mathcal{K}(t,t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds. \tag{3.1}$$

Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle +$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \mathcal{K}(t,\tau)\begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle +$$
$$+\int_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

Обозначим

$$z(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau).$$

Учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (1.1), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle +$$
$$+\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(t) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle +$$
$$+\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle +$$
$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} 0 \\ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \end{pmatrix} \right\rangle +$$
$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} 0 \\ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \end{pmatrix} \right\rangle -$$
$$-\left\langle \mathcal{K}(t,\tau)\begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

Используя матрицу $Q(t)$, определенную в (2.6), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + W(t) + \int_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds, \quad (3.2)$$

где

$$W(t) = \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle +$$
$$+\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle +$$
$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} 0 \\ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle +$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \end{pmatrix} \right\rangle +$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} 0 \\ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

В силу определения матриц $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$ имеем

$$W(t) = \left\langle H_1(t)y(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle + \left\langle H_1(t)F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), y(t)\right\rangle +$$
$$+\left\langle H_2(t)y(t-\tau), F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle + \left\langle H_2^*(t)F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), y(t-\tau)\right\rangle +$$
$$+\left\langle K_2^*(t,0)y(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle + \left\langle K_2(t,0)F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), y(t)\right\rangle +$$
$$+\left\langle K_3(t,0)z(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle + \left\langle K_3(t,0)F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), z(t)\right\rangle +$$
$$+\left\langle K_3(t,0)F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle.$$

Очевидно,

$$W(t) \le \Bigg(2(\|H_1(t)\| + \|K_2(t,0)\|)\|y(t)\| + 2\|H_2(t)\|\|y(t-\tau)\| + 2\|K_3(t,0)\|\|z(t)\| +$$
$$+\|K_3(t,0)\|\left\|F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\|\Bigg)\left\|F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\|.$$

В силу условия (1.2) имеем

$$W(t) \le \left(\beta_1(t)\|y(t)\| + \beta_2(t)\|y(t-\tau)\| + \beta_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\times$$
$$\times\left(q_1\|y(t)\| + q_2\|y(t-\tau)\| + q_3\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right),$$

где функции $\beta_j(t)$, $j = 1,2,3$, определены в (2.8). Очевидно, справедлива оценка

$$W(t) \le \alpha_1(t)\|y(t)\|^2 + \alpha_2(t)\|y(t-\tau)\|^2 + \alpha_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^2, \tag{3.3}$$

где функции $\alpha_j(t)$, $j = 1,2,3$, определены в (2.9). Из (3.2) в силу (3.3) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds, \tag{3.4}$$

где матрица $Q^\alpha(t)$ определена в (2.10). Используя (2.12), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

В силу (2.13) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle - k(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.1) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (2.14). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (2.16). Используя (2.3), с учетом определения функционала (3.1) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h(t)}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \le \frac{V(t,y)}{h(t)} \le \frac{V(0,\varphi)}{h(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда получаем неравенство (2.15).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, рассмотрим на решении задачи (2.11) функционал (3.1). После дифференцирования и проведения рассуждений как при доказательстве теоремы 1 имеем оценку (3.4). В силу представления (2.19):

$$\left\langle Q^{\alpha}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \ge \left\langle P(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где $P(t)$ – положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (2.20). Тогда верно

$$\left\langle P(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \ge p_{\min}(t)\left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ – минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Поскольку

$$\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \le \|\mathcal{H}(t)\|\left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle,$$

то

$$\left\langle Q^{\alpha}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \ge \frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Используя (2.13), из (3.4) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle - k(t)\int_{t-\tau}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.1) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}, k(t)\right\}.$$

Отсюда, как при доказательстве теоремы 1, имеем неравенство (2.15).

Теорема 2 доказана.

Автор выражает благодарность Г.В. Демиденко за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наук. думка, 1989.
4. Избранные труды Н.В. Азбелева. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.
5. *Долгий Ю.Ф.* Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1996.
6. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997.
7. *Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Mathematics and its Applications, vol. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
8. *Michiels W., Niculescu S.I.* Stability, control, and computation for time-delay systems. An eigenvalue-based approach, Advances in Design and Control, vol. 27. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.
9. *Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.* Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012.
10. *Kharitonov V.L.* Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices, Control Engineering. New York: Birkhäuser, Springer, 2013.
11. *Gil' M.I.* Stability of neutral functional differential equations, Atlantis Studies in Differential Equations, vol. 3. Paris: Atlantis Press, 2014.
12. *Андреев А.С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автомат. и телемехан. 2009. № 9. С. 4—55.
13. *Fridman E.* Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European J. Control. 2014. V. 20. P. 271—283.
14. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
15. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научн. книга, 1997.
16. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48. № 5. С. 1025—1040.
17. *Матвеева И.И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16. № 3. С. 122—132.
18. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059—1077.
19. *Demidenko G.V., Matveeva I.I.* Estimates for solutions to a class of nonlinear time-delay systems of neutral type // Electron. J. Diff. Equ. 2015. V. 2015. № 34. P. 1—14.
20. *Demidenko G.V., Matveeva I.I.* Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2015. V. 2015. № 83. P. 1—22.
21. *Demidenko G.V., Matveeva I.I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type // Electron. J. Diff. Equ. 2016. V. 2016. № 19. P. 1—20.
22. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 344—352.
23. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 6. С. 730—740.
24. *Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60. № 5. С. 1063—1079.
25. *Матвеева И.И.* Об экспоненциальной устойчивости решений линейных периодических систем нейтрального типа с переменным запаздыванием // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 748—756.
26. *Матвеева И.И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22. № 3. С. 96—103.