

УДК 532.5:533.6.011.5

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

## УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДИ<sup>1)</sup>

© 2020 г. Х. Ф. Валиев<sup>1</sup>, А. Н. Крайко<sup>1,2,\*</sup>, Н. И. Тилляева<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 111116 Москва, ул. Авиамоторная, 2, ЦИАМ, Россия

<sup>2</sup> 141700 Долгопрудный, М. о., Институтский пр., 9, МФТИ, Россия

\*e-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию 14.11.2019 г.

Переработанный вариант 14.11.2019 г.

Принята к публикации 16.12.2019 г.

Изучается устойчивость одномерных стационарных течений идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа в каналах переменной площади с горением в структурно устойчивой детонационной волне – нормальной оси канала поверхности разрыва. Как установлено ранее, в такой постановке стационарные течения с горением в детонационной волне Чепмена–Жуге всегда неустойчивы и остаются течения с горением в пересжатой детонационной волне. Изучение устойчивости таких течений сведено к численному решению начально-краевой задачи, описывающей развитие конечных возмущений потока между движущейся детонационной волной и минимальным (при внезапном сужении) или выходным сечениями сопла. Для ее решения модифицированной схемой Годунова повышенного порядка аппроксимации создан алгоритм расчета распада разрыва, допускающий переключения (с пересжатой детонационной волны на детонационную волну Чепмена–Жуге и обратно) явно выделяемых детонационных волн. Приведены примеры устойчивых и разрушающихся большими начальными возмущениями течений, с расчетом их динамики с переходами к детонационной волне Чепмена–Жуге и обратно. Библ. 32. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** пересжатая детонационная волна, канал переменной площади, численный анализ устойчивости, распад разрыва с переключением детонационной волны с пересжатой на Чепмена–Жуге и обратно.

**DOI:** 10.31857/S0044466920040171

### ВВЕДЕНИЕ

Согласно модели “Зельдовича–Неймана–Дёринга” (ЗНД-модели) [1]–[3] структура детонационной волны (ДВ) включает ударную волну (поверхность разрыва) и примыкающую к ней “зону реакций” конечной ширины. Действительная толщина ударной волны – несколько длин свободного пробега при многократно более протяженной зоне реакций. Химические реакции, скорость которых сильно зависит от температуры, начинаются из-за нагрева горючей смеси ударной волной и заканчиваются достижением продуктами сгорания термодинамического равновесия. Получающиеся в рамках ЗНД-модели детонационные адиабаты полностью определяются термодинамикой смеси в исходном (холодном, метастабильном) и в конечных равновесных состояниях, не завися от кинетики горения. На детонационных адиабатах особо интересны точки, которые отвечают ДВ, названным по именам их первооткрывателей [4], [5] ДВ Чепмена–Жуге (ДВ<sub>СЖ</sub>). Важная особенность ДВ<sub>СЖ</sub> – равная звуковой нормальной к ДВ компонента скорости газа за ней [6]–[8]. По этой причине ДВ<sub>СЖ</sub> оказывается “самоподдерживающейся”, ибо волны разрежения, идущие от “центра взрыва” (места инициирования ДВ начальным выделением энергии или ударной волной вблизи затупления обтекаемого сверхзвуковым потоком тела), не могут ее догнать и ослабить.

Экспериментально обнаруженные в середине XX века случаи развала ожидаемых в рамках ЗНД-модели стационарных структур ДВ вызвали поток исследований их “структурной” устой-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 17-01-00126 и 18-31-20059).

чивости. В работах этого направления реальная кинетика заменялась одной реакцией с некоторой “энергией активации” и последующим мгновенным или протяженным по времени тепловыделением. В таком приближении условие структурной устойчивости приводит к ограничениям на энергию активации. В настоящее время выяснение одномерной структурной устойчивости ДВ в любой смеси при известной кинетике горения возможно в процессе численного решения сравнительно простой нестационарной задачи о неравновесном одномерном течении идеально-го газа. Если решение такой задачи выходит на стационарную структуру, то ДВ в данной смеси структурно устойчиво. В противном случае ДВ структурно неустойчиво.

Наряду со структурной устойчивостью ДВ представляет интерес устойчивость стационарных течений в каналах переменной площади со структурно устойчивой и поэтому рассматриваемой как поверхность разрыва ДВ. Интерес к таким течениям — следствие их предполагаемого использования в качестве элемента проточных двигателей с горением в стационарных ДВ обычно — ДВ<sub>СД</sub> [9]–[12]. На первый взгляд, выбор в качестве стационарной именно ДВ<sub>СД</sub> представляется естественным, ведь она самоподдерживающаяся. Однако одно дело выход на ДВ<sub>СД</sub> первоначально пересжатой ДВ при удалении от источника инициирования, а совсем другое — прямая ДВ, стоящая в канале переменной площади  $F = F(x)$ . Как установлено в [13], все одномерные стационарные течения с ДВ<sub>СД</sub> неустойчивы. Остается выяснить, устойчивы ли подобные стационарные течения с пересжатой ДВ. Разработке способа ответа на этот вопрос посвящено данное исследование.

Ниже после краткого воспроизведения основных моментов выполненного в [13] доказательства неустойчивости одномерных стационарных течений с ДВ<sub>СД</sub> развит численный метод анализа устойчивости таких течений с горением в пересжатых ДВ и приведены полученные с его помощью результаты.

## 1. ФОРМУЛЫ И УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ С ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДИ

Пусть идеальный газ течет слева направо по каналу переменной площади  $F = F(x)$ , где  $x$  — расстояние, отсчитываемое от стационарного положения ДВ. Если  $t$  — время;  $\rho, p, e, h = e + p/\rho, a$  и  $u$  — плотность, давление, удельные внутренняя энергия и энтальпия газа, скорости звука и газа; горючая смесь до ДВ и продукты сгорания за ней — совершенные газы с разными до и за ДВ показателями адиабаты  $\gamma_2 \neq \gamma_1$  и аддитивными постоянными  $q_1 \neq 0$  и  $q_2 = 0$  в формулах для внутренней энергии; индекс 1 (2) метит параметры до (за) ДВ;  $F' = dF(x)/dx, D$  — скорость ДВ, то в одномерном приближении изучаемые нестационарные течения описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho F)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u F)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u F)}{\partial t} + \frac{\partial[(p + \rho u^2)F]}{\partial x} = p F', \\ \frac{\partial[\rho F(e + u^2/2)]}{\partial t} + \frac{\partial[\rho u F(h + u^2/2)]}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

уравнениями состояния и условиями на ДВ

$$\begin{aligned} \rho_1(u_1 - D) = \rho_2(u_2 - D), \quad p_1 + \rho_1(u_1 - D)(u_1 - u_2) = p_2, \\ 2h_1 + (u_1 - D)^2 = 2h_2 + (u_2 - D)^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В стационарном течении ДВ покоится ( $D = 0$ ), а обыкновенные дифференциальные уравнения, получающиеся из системы (1.1), интегрируются и дают конечные равенства (последнее — следствие второго)

$$\rho u F = G, \quad h + \frac{u^2}{2} = H, \quad s = s_{1,2}, \quad s_2 > s_1, \quad \Psi \equiv \frac{T_1}{T_0} = \frac{2 + (\gamma_1 - 1)M_0^2}{2 + (\gamma_1 - 1)M_1^2}. \quad (1.3)$$

Здесь индекс 0 метит параметры невозмущенного (на входе в канал) потока, текущего слева направо, расход  $G$ , полная энтальпия  $H$  и удельная энтропия  $s$  — константы,  $G$  и  $H$  на ДВ не изменяются в отличие от роста энтропии и “энтропийной функции”  $p/\rho^\gamma$ . Независимо от этого в силу интегралов (1.3) произведение  $\rho u$  (“плотность тока”) — функция числа Маха  $M = u/a$  с максимумом при  $M = 1$ . Поэтому согласно первому равенству (1.3) стационарная ДВ<sub>СД</sub>, за которой  $M_2 = 1$ , не может располагаться в сужающемся канале.

Для дальнейшего уравнения (1.1) запишем в характеристической форме

$$\begin{aligned} \rho a \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial p}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho u a^2 f = 0, \quad f = \frac{F'}{F}, \\ \rho a \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial p}{\partial t} - (u - a) \frac{\partial p}{\partial x} - \rho u a^2 f = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Первое и второе из этих уравнений определяют изменение инвариантов Римана (для изэнтропических течений) из-за переменности площади канала вдоль  $C^+$ - и  $C^-$ -характеристик, а третье – следствие сохранения энтропии на траекториях частиц ( $C^0$ -характеристиках).

Реализованное в разд. 3 и 4 статьи численное решение начально-краевой задачи, описывающей развитие исследуемых течений, сведено к численному интегрированию на подвижных разностных сетках законов сохранения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_-(t)}^{x_+(t)} \rho F dx = \rho(u - V)F|_+, \quad \frac{d}{dt} \int_{x_-(t)}^{x_+(t)} \rho u F dx = [p + \rho u(u - V)]F|_+ + \int_{F_-}^{F_+} p dF, \\ \frac{d}{dt} \int_{x_-(t)}^{x_+(t)} \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) F dx = \left[ pu + \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) (u - V) \right] F|_+, \end{aligned} \tag{1.5}$$

следствия которых – дифференциальные уравнения (1.1) и соотношения на ДВ (1.2). В (1.5)  $V_{\pm} = dx_{\pm}(t)/dt$  – скорости правой и левой границ рассматриваемого отрезка  $x_-(t) \leq x \leq x_+(t)$ .

На ДВ<sub>СJ</sub> выполняются соотношения ( $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении) [6], [13]

$$\begin{aligned} M_J^2 \equiv \frac{u_1^2}{a_1^2} = \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 - (\gamma_1 - 1)^2 \gamma_2^2}}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)}, \quad \chi = \gamma_1 \frac{\gamma_2^2 - 1}{\psi} q^\circ - \gamma_1 + \gamma_2^2, \quad q^\circ = \frac{q_1}{c_{p1} T_0}, \\ \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma_1 M_J^2}{\gamma_2 + 1}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{\gamma_2(1 + \gamma_1 M_J^2)}{\gamma_1(1 + \gamma_2) M_J}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma_1(\gamma_2 + 1) M_J^2}{\gamma_2(1 + \gamma_1 M_J^2)}, \\ u_2 = u_1 + a_1 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \sqrt{M_J^2}, \quad D = u_1 - a_1 \sqrt{M_J^2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

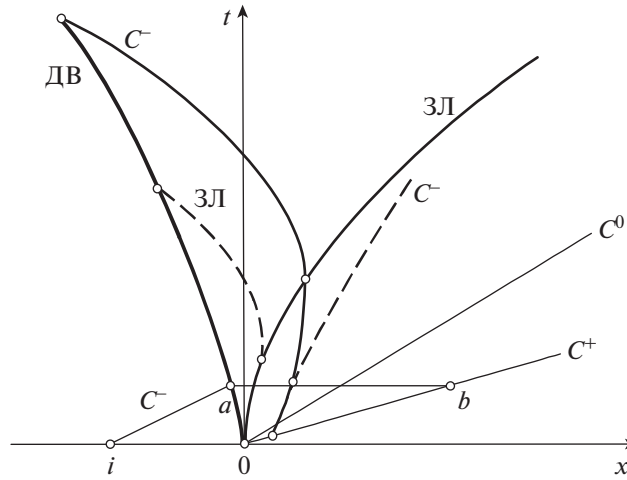
Здесь число Маха ДВ<sub>СJ</sub>  $M_J$  – отношение к  $a_1$  модуля скорости ДВ относительно газа перед ней, а  $D$  – ее скорость относительно неподвижных координат  $xuz$ .

## 2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ С ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ ЧЕПМЕНА–ЖУГЕ

При числе Маха полета  $M_0 > M_J$  поток в сужающемся-расширяющемся воздухозаборнике, оставаясь сверхзвуковым, сначала тормозится до  $M_m < M_J$  в минимальном сечении, а затем разгоняется. При этом число Маха  $M_1$  перед ДВ растет, а вместе с ним согласно последней формуле (1.3) растет величина  $1/\psi$ . Поэтому в силу (1.6)  $M_J$  также растет, но, как показано ниже, медленнее, чем  $M_1$  и в некотором сечении расширяющегося канала выполнится равенство  $M_J = M_1$ . В это сечение можно поставить ДВ<sub>СJ</sub>.

Сначала, как и в [13], исследуем устойчивость стационарного течения с ДВ<sub>СJ</sub>, приняв, что при смещении от стационарного положения ДВ<sub>СJ</sub> остается самоподдерживающейся. Тогда при всегда справедливой последней формуле (1.3) справедлива и первая формула (1.6) и их следствие  $M_J^2 = M_J^2(M_1^2)$ . Если  $X_{DW}(t)$  – координата ДВ, то, учтя, что  $M_J^2 = M_1^2$  при  $X_{DW} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} M^2 \approx M_1^2 + \frac{dM_1^2}{dx} X_{DW}, \quad M_J^2 \approx M_1^2 + \frac{dM_J^2}{dM_1^2} \frac{dM_1^2}{dx} X_{DW}, \\ \frac{dX_{DW}}{dt} = a(M - M_J) = a \frac{M^2 - M_J^2}{M + M_J} \approx \lambda X_{DW}, \quad \lambda = \frac{a_1}{2M_1} \left( 1 - \frac{dM_J^2}{dM_1^2} \right) \frac{dM_1^2}{dx}. \end{aligned}$$



Фиг. 1.  $xt$ -диаграмма течения за возмущенной ДВ Чепмена–Жуге.

При сверхзвуковом течении в расширяющемся канале число Маха – растущая функция  $x$ , и знак  $\lambda$  определяется знаком разности в скобке, т.е. величиной стоящей в ней производной. Проведем необходимые выкладки, найдем

$$\begin{aligned} \frac{dM_J^2}{dM_1^2} &= \frac{(\gamma_1 - 1)M_J^2}{2 + (\gamma_1 - 1)M_J^2} \left[ 1 + 2 \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1}{\gamma_2^2 - 1} \left( \frac{\Psi}{\gamma_1 q^\circ} \right) + \frac{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}{\gamma_2^2 - 1} \left( \frac{\Psi}{\gamma_1 q^\circ} \right)^2 \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{(\gamma - 1)M_J^2}{[2 + (\gamma - 1)M_J^2] \sqrt{1 + 2\Psi/[(\gamma + 1)q^\circ]}} < 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Второе выражение получено при  $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ .

Согласно (2.1) при одинаковых показателях адиабаты искомая производная меньше единицы,  $\lambda > 0$  и стационарное течение с ДВ<sub>СJ</sub> неустойчиво. При разных показателях адиабаты исследование усложняется, однако и в этом случае анализ выражения в квадратных скобках в (2.1) показывает, что при реальных значениях входящих в нее параметров ситуация не изменяется:  $0 < dM_J^2/dM_1^2 < 1$  и, как отмечалось выше,  $M_J$  изменяется медленнее, чем  $M_1$ .

Если сместившаяся от своего стационарного положения ДВ<sub>СJ</sub> станет пересжатой, то при невозмущенном набегающем потоке ее скорость станет больше скорости ДВ<sub>СJ</sub>. При смещении ДВ вправо это может изменить вывод о неустойчивости. При смещении же ее влево большая скорость пересжатой ДВ подтвердит правильность такого вывода, чего вполне достаточно. Правда, тут же возникает вопрос о возмущениях, приходящих на ДВ справа и важных в похожих задачах с ударной волной [14]–[20]. В связи этим в [13] анализ устойчивости был проведен еще и в близкой к [14]–[20] постановке.

Итак, пусть возмущенная ДВ<sub>СJ</sub> стала пересжатой с числом Маха  $M_2 < 1$ . Для варианта со сверхзвуковым потоком за стационарной ДВ<sub>СJ</sub> возможную эволюцию такого течения поясняет  $xt$ -диаграмма фиг. 1. На ней начальные возмущения приходят на ДВ только слева, и при  $t = 0$  поток возмущен лишь на малом отрезке  $i0$  оси  $x$  так, что ДВ, став пересжатой, начала двигаться влево. При  $t = t_a$  отрезок  $ia$   $S^-$ -характеристики придет на ДВ, и течение возмущено на отрезке  $ab$ , ограниченном справа  $S^+$ -характеристикой, вышедшей из точки  $x = t = 0$ . Она же ограничивает возмущенное течение справа. Левая граница возмущенного течения – ДВ.

При  $t > 0$  к пересжатой ДВ станет примыкать вначале небольшая дозвуковая область, ограниченная справа траекторией “звуковой линии” (ЗЛ), на которой  $u = a$ . Правее ЗЛ идущие против потока  $S^-$ -характеристики сносятся вправо. На ЗЛ они останавливаются, а после ее пересечения начинают движение влево вдогонку ДВ. Из сказанного и из фиг. 1 видно, что  $S^-$ -характеристики возмущенного течения – сильно искривленные кривые. Хотя все характеристики невозмущенных стационарных потоков до и за ДВ<sub>СJ</sub> также сильно искривлены, их форма определена стац-

онарным решением и известна заранее. В задачах, рассмотренных в [14]–[22], характеристики возмущенных и невозмущенных течений в линейном приближении совпадают, т.е. также известны.

В задаче с  $x$ -диаграммой фиг. 1 ситуация много сложнее: теперь возмущенное течение не близко ни к какому известному. Исключение – параметры около ДВ, близкие к параметрам за ДВ<sub>С1</sub>. Пометив их “звездочкой” и взяв за масштабы скорости, плотности и давления  $a_*$ ,  $\rho_*$  и  $\rho_* a_*^2$ , будем иметь

$$u = 1 + \delta u, \quad a = 1 + \delta a, \quad \rho = 1 + \delta \rho, \quad p = \frac{1}{\gamma_2} + \delta p, \quad h = \frac{1 + 2\delta a}{\gamma_2 - 1} \quad (2.2)$$

с  $(|\delta u|, |\delta a|, |\delta \rho|, |\delta p|) \ll 1$ . В дополнение за масштабы площади, длины и времени возьмем  $F(0)$ ,  $l = 1/f(0)$  и  $l/a_*$  с  $f$  из (1.4). Если затем ввести инварианты Римана (правый  $\delta R$  и левый  $\delta L$ ) и энтропийный ( $\delta S$ ) формулами

$$2\delta R = \delta u + \delta p, \quad 2\delta L = \delta u - \delta p, \quad \delta S = \delta p - \delta \rho,$$

то после подстановки представлений (2.2) в уравнения (1.4) и их линеаризации характеристические уравнения в таком (“околозвуковом”) приближении примут вид

$$\begin{aligned} C^+ : \quad \frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{d\delta R}{dt} &= \frac{(\gamma_2 - 1)\delta L - (\gamma_2 + 1)\delta R - 1}{4} f; \\ C^- : \quad \frac{dx}{dt} &= \frac{(3 - \gamma_2)\delta R + (\gamma_2 + 1)\delta L - \delta S}{2}, \quad \frac{d\delta L}{dt} = \frac{(\gamma_2 + 1)\delta R - (\gamma_2 - 1)\delta L + 1}{2} f; \\ C^0 : \quad \frac{dx}{dt} &= 1, \quad \frac{d\delta S}{dt} = 0. \end{aligned}$$

В околозвуковом приближении нестационарные возмущения параметров потока выражаются через введенные инварианты равенствами

$$\delta u = \delta R + \delta L, \quad \delta p = \delta R - \delta L, \quad \delta \rho = \delta R - \delta L - \delta S, \quad \delta a = \frac{(\gamma_2 - 1)(\delta R - \delta L) + \delta S}{2}. \quad (2.3)$$

Для параметров за ДВ, пока ее отход от стационарного положения, т.е. ее координата еще мала:  $|X_{DW}(t)| \ll 1$ , справедливы представления (2.2) и равенства (2.3). При этом для  $t > t_a$  сверхзвуковой стационарный поток перед ДВ невозмущен. Поэтому отличие  $\delta\phi_1$  любого параметра  $\phi$  от его стационарного значения дается формулой:  $\delta\phi_1(t) = \phi'_1(0)X_{DW}(t)$ , в которой “штрих” означает дифференцирование по  $x$  параметра стационарного течения. Если, учтя сказанное и то, что на стационарной ДВ<sub>С1</sub> (при нулевой ее скорости  $D = 0$ ) условия (1.2) выполняются, провести их линеаризацию, то в получившихся уравнениях не будет первой степени  $\delta L_2$ . Сохранив же  $(\delta L_2)^2$ , придем к равенствам ( $\delta D = dX_{DW}/dt$  – скорость ДВ)

$$\begin{aligned} \delta D &= \frac{4(\gamma_2 + 1 - \gamma_2 u_1)X_{DW} - (5 - \gamma_2^2)(\delta L_2)^2}{4(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} < 0, \\ \delta R_2 &= \frac{4[(\gamma_2 - 1)u_1 - \gamma_2]u_1 X_{DW} + (5 - \gamma_2^2)(\delta L_2)^2}{8[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} > 0, \\ \delta S_2 &= \frac{(\gamma_2 - 1)(u_1 - 1)u_1 X_{DW} - (\delta L_2)^2}{\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1} < 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При  $t = t_a$  неравенства в формулах (2.4) – следствие того, что, во-первых, в этот момент  $X_{DW} < 0$  в силу выбора начальных возмущений, во-вторых, всегда  $\rho_1 < \rho_2 = 1$  и  $u_1 > u_2 = 1$ , и, в-третьих,  $u_1 < (\gamma_2 + 1)/(\gamma_2 - 1)$  в силу соотношений на ДВ и выбранных масштабов скорости и плотности. Итак, при  $t = t_a$  имеем

$$\frac{dX_{DW}}{dt} = \delta D = \frac{4(\gamma_2 + 1 - \gamma_2 u_1)X_{DW} - (5 - \gamma_2^2)(\delta L_2)^2}{4(1 - \rho_1)[\gamma_2 + 1 - (\gamma_2 - 1)u_1]} < 0. \quad (2.5)$$

Следовательно, отрицательная координата  $X_{Dw}(t)$  движущейся влево ДВ будет продолжать уменьшаться, увеличивая модуль ее также отрицательной скорости  $\delta D$ . Через  $(\delta L_2)^2$  независимо от знака  $\delta L_2(t)$  разгону ДВ и ее удалению от стационарного положения  $X_{Dw} = 0$  будут способствовать любые приходящие на нее справа отраженные акустические волны. Сказанное доказывает неустойчивость стационарного течения с ДВ<sub>СД</sub>, к которой в стационарном решении примыкал бы справа разгоняющийся сверхзвуковой поток. Уравнения (2.4) и (2.5) и неравенства в них в согласии со способом их получения справедливы и при тормозящемся дозвуковым стационарным потоке за ДВ<sub>СД</sub>. Поэтому, поступая, как в предыдущем варианте, придем к выводу о неустойчивости течения и с дозвуковым потоком за стационарной ДВ<sub>СД</sub>.

Согласно выполненным далее расчетам, смещенная от своего стационарного положения ДВ может оставаться ДВ<sub>СД</sub>, а пересжатая ДВ может вновь стать ДВ<sub>СД</sub> (при такой эволюции течения части траектории ЗЛ и одной из  $C^-$ -характеристик даны на фиг. 1 штрихами). В этих случаях неустойчивость исследуемого течения – следствие полученного выше неравенства  $dM_1^2/dM_1^2 < 1$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭВОЛЮЦИИ И АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПЕРЕСЖАТОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ

Стационарные течения, устойчивость которых будет исследоваться далее, проще строить, решая обратную задачу с заданными  $\gamma_1, \gamma_2, q^\circ = q_1/(c_{p1} T_0), \psi > 1$  и  $M_2^2 < 1$ , а  $M_1^2$ , определяемым уравнениями (1.2) с  $D = 0$ . В такой постановке для  $M_1^2$  получаются квадратное уравнение и его корень:

$$A\gamma_1^2 M_1^4 - 2B\gamma_1 M_1^2 + C = 0, \quad M_1^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A\gamma_1}, \quad A = (\gamma_1 - 1)(1 + 2\gamma_2 M_2^2 - \gamma_2),$$

$$B = (\gamma_2 - 1) \left[ \gamma_1 + \gamma_2^2 M_2^4 + \gamma_1(1 + \gamma_2 M_2^2)^2 \frac{q^\circ}{\psi} \right] - 2(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_2 M_2^2,$$

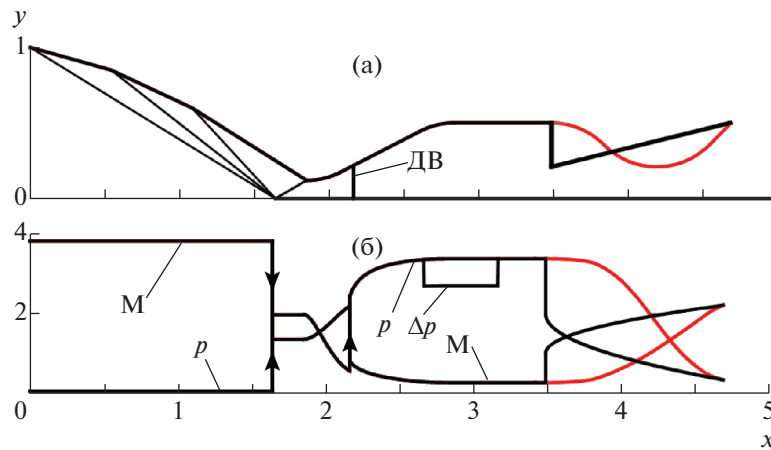
$$C = (\gamma_1 - 1)\gamma_2^2 [2 + (\gamma_2 - 1)M_2^2] M_2^2.$$

По заданному  $\psi$  и найденному  $M_1^2$  последняя формула (1.3) определяет  $M_0^2$ . Задание  $M_2$  определяет и отношение площади минимального сечения сопла  $F_m$  к площади сечения  $F = F_{Dw}$  стационарного положения ДВ

$$\frac{F_m}{F_{Dw}} = \frac{M_2(1 + \gamma_2)^{(\gamma_2+1)/[2(\gamma_2-1)I]}}{[2 + (\gamma_2 - 1)M_2^2]^{(\gamma_2+1)/[2(\gamma_2-1)I]}}.$$

Исследуемые ниже каналы начинаются сужающимися-расширяющимися воздухозаборниками со сверхзвуковыми числами Маха на входе ( $M_0$ ), в минимальном сечении ( $M_m < M_0$ ) и перед пересжатой ДВ ( $M_1 > M_m$ ). Стационарная ДВ стоит в некотором сечении расширяющегося участка, плавно переходящего в цилиндрический и в сопло Лаваля. Контур сопел либо гладкие с нулевым наклоном в минимальном сечении, либо негладкие (с внезапным сужением и положительным начальным наклоном расширяющегося участка). В гладких соплах равенство  $M_m = 1$  в минимальном сечении  $x = X_m$  нарушают любые нестационарные возмущения, а в негладких – только достаточно интенсивные. Напомним, что при одинаковых полных длинах и расходах газа гладкие сопла заметно уступают по тяге соплам с внезапным сужением [8], [23]–[25].

Для негладких сопел сечение внезапного сужения  $x = X_m$  рассматривается в одномерном приближении как “стационарный разрыв” с выполнением законов сохранения (1.3), включая сохранение энтропии, и фиксированным отношением  $f < 1$  площади минимального сечения к площади цилиндрического канала. Для сохраняющихся (при небольших возмущениях потока) сверхкритического перепада давления  $p_{m-}/p_0$  и  $M_m = 1$  в минимальном сечении число Маха  $M_{m-}$  потока в цилиндрическом канале перед внезапным сужением – функция  $f$  и  $\gamma_2$ . Получающиеся в резуль-



**Фиг. 2.** Плоские каналы с косыми скачками и пересечкой ДВ (а) и распределения на оси  $x$  давления (с наложенным на него начальным возмущением  $\Delta p = -0.2p$ ) и числа Маха (б).

тате уравнения, определяющие сначала  $\lambda_{m-}$  (отношение скорости газа к критической скорости), а затем  $M_{m-}$ , имеют вид

$$\frac{2f^{\gamma_2-1}}{\gamma_2+1} + \frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1} \lambda_{m-}^{\gamma_2+1} = \lambda_{m-}^{\gamma_2-1}, \quad M_{m-} = \frac{\sqrt{2}\lambda_{m-}}{\sqrt{\gamma_2+1 - (\gamma_2-1)\lambda_{m-}^2}}. \quad (3.1)$$

В интервале  $0 < \lambda_{m-} < 1$  решение первого уравнения (3.1) единственно. Определенное по нему число Маха  $M_{m-}(f, \gamma_2) < 1$ .

Два типичных различающихся только соплами плоских канала и распределения на оси  $x$  давления с наложенным на него начальным возмущением  $\Delta p = -0.2p$  и числа Маха представлены на фиг. 2 для  $\gamma_1 = 1.4$ ,  $\gamma_2 = 1.2$ ,  $\psi = 2$ ,  $q^\circ = 4$ ,  $M_2 = 0.8$ ,  $M_1 = 2.18$ ,  $M_0 = 3.81$ . Косые скачки рассчитывались в изэнтропическом приближении (см. [26]), что в данном случае непринципиально.

Анализ устойчивости построенных стационарных течений развивает подходы, примененные в [14]–[20] для течений с замыкающим скачком уплотнения. Отличие – в инструменте исследования – численном решении начально-краевой задачи, определяющей развитие начальных возмущений на участке канала между подвижной левой границей (ДВ) и неподвижной правой – сечением умеренно сверхзвукового потока для гладких сопел и  $x = X_m$  для сопел с внезапным сужением.

Ранее численный расчет как инструмент изучения устойчивости течений с пересечкой ДВ, стабилизированной в расширяющемся канале, применялся в одномерном приближении с ДВ – поверхностью разрыва в [27]. В [28] при близкой к плоской ДВ рассчитались двумерные течения с детальной кинетикой горения водородно-воздушной смеси и размазанной ДВ. В [27], [28] расчеты велись по разностной схеме Годунова первого порядка аппроксимации [29]. Как и предшественники, авторы данной работы также воспользовались схемой Годунова, но повышенного на гладких решениях порядка аппроксимации [30]–[32]. Явное выделение ДВ – единственного в решаемых задачах сильного разрыва – позволяет рассчитывать на заметный эффект повышения порядка разностной схемы.

Расчет ведется на равномерной на каждом временном слое разностной сетке из  $N = 2^k$  ячеек. Границы ячеек нумеруются числами  $n = 0, \dots, N$  так, что  $n = 0$  совпадает с ДВ, а  $n = N$  – с неподвижной правой границей. Значения  $p$ ,  $u$ ,  $e$  с верхним индексом  $n + 1/2$  (по терминологии [29]: “малые параметры”) в средних точках ячеек слоев  $t = t_n + \nu t$  с  $\nu = 1/2$  для “полуслоя” и с  $\nu = 1$  для

нового слоя через  $\rho, u, e$  с нижним индексом  $n + 1/2$  известного слоя  $t = t_n$  определяют следствия законов сохранения (1.5) – уравнения

$$\begin{aligned} \rho^{n+1/2} &= \frac{(\rho F)_{n+1/2} \Delta_n}{F^{n+1/2} \Delta^n} + \frac{\nu \tau}{F^{n+1/2} \Delta^n} \{ [R(U - V)F]_n - [R(U - V)F]_{n+1} \}, \\ u^{n+1/2} &= \frac{(\rho u F)_{n+1/2} \Delta_n}{(\rho F)^{n+1/2} \Delta^n} + \frac{\nu \tau}{(\rho F)^{n+1/2} \Delta^n} \times \\ &\times \left\{ [P + RU(U - V)]_n F_n - [P + RU(U - V)]_{n+1} F_{n+1} + \frac{(P_{n+1} + P_n)(F_{n+1} - F_n)}{2} \right\}, \\ e^{n+1/2} &= \frac{(\rho F)_{n+1/2} \Delta_n}{(\rho F)^{n+1/2} \Delta^n} \left( e + \frac{u^2}{2} \right)_{n+1/2} - \frac{(u^{n+1/2})^2}{2} + \frac{\nu \tau}{(\rho F)^{n+1/2} \Delta^n} \times \\ &\times \left\{ \left[ PU + R \left( E + \frac{U^2}{2} \right) (U - V) \right]_n F_n - \left[ PU + R \left( E + \frac{U^2}{2} \right) (U - V) \right]_{n+1} F_{n+1} \right\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь  $\Delta_n$  и  $\Delta^n = \Delta_n - \nu \tau D/N$  – независимые от  $n$  размеры ячеек по  $x$  слоя  $t = t_n$  и полуслоя или нового слоя ( $D$  – скорость ДВ);  $F_{n+1/2}, F^{n+1/2}, F_n, \dots$  – значения  $F$  в средних и граничных точках ячейки;  $R, U, P, E$  – значения  $\rho, u, p, e$  на границе ячейки, движущейся со скоростью  $V_n = (N - n)D/N$ , – “большие величины”, определяемые, как и скорость ДВ  $D$ , из решения задачи о распаде разрыва.

Как в [31], уравнения (3.2) сначала определяют малые величины в ячейках полуслоя. Этому предшествует нахождение предраспадных параметров на границах ячеек слоя  $t = t_n$  (экстраполяцией для  $n = 0$  и  $N$  и интерполяцией согласно [30] для  $1 \leq n \leq N - 1$ ). По ним расчетом распада разрыва находятся большие величины в правых частях уравнений (3.2) и в каждой ячейке последовательно определяются  $\rho^{n+1/2}, u^{n+1/2}, e^{n+1/2}$  и  $p^{n+1/2} = (\gamma_2 - 1)(\rho e)^{n+1/2}$ . Отличие проводимого затем счета нового слоя состоит в том, что большие величины, площади  $F_n$  и  $F_{n+1}$  и скорость ДВ  $D$ , а по ней скорости границ  $V_n$  и  $V_{n+1}$  находятся на полуслое.

Явно выделяемая ДВ может оставаться пересжатой, а может стать ДВ<sub>СЛ</sub>. Этим возможностям отвечают разные задачи о распаде, начиная с предраспадных параметров и  $xt$ -диаграмм. При распаде с пересжатой ДВ (фиг. 3а) левые (с индексом I вместо 1) предраспадные “малые” параметры при  $x_0 = X_{Dw0}$  берутся из стационарного решения, а правые также “малые” (с индексом II) линейно экстраполируются на  $x = X_{Dw0}$  по двум ячейкам слоя  $t = t_n$  или  $t = t^{n+1/2}$ . Как в [29, § 13], для пересжатой ДВ из законов сохранения (1.2) получаются соотношения

$$U = u_1 - \frac{P - p_1}{j}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{p_1 - P}{j^2}, \quad A_1^2 = \frac{\gamma_2 P}{R_1}, \quad D = u_1 - \frac{j}{\rho_1}, \quad M_2^2 = \frac{j^2}{\gamma_2 P R_1}, \tag{3.3}$$

$$j = \sqrt{\frac{(\gamma_1 - 1)(P - p_1)\rho_1[(\gamma_2 + 1)P + (\gamma_2 - 1)p_1]}{2[(\gamma_1 - 1)(P - p_1) + (\gamma_1 - \gamma_2)p_1 - (\gamma_2 - 1)\rho_1 a^0 / M_0^2]}}, \tag{3.4}$$

в которых  $P$  и  $U$  – давление и скорость, непрерывные на слабом контактном разрыве (КР), а  $R_1$  и  $A_1$  суть  $\rho$  и  $a$  слева от КР. При изучении устойчивости на всегда слабой “правой” волне (ПВ, неважно, ударной или волне разрежения) с погрешностью порядка  $(1 - p_{II}/P)^3$  верны равенства ( $R_{II}$  и  $A_{II}$  суть  $\rho$  и  $a$  справа от КР)

$$U = u_{II} + 2 \frac{P - p_{II}}{B_{II}}, \quad R_{II} = \rho_{II} + 2 \frac{P - p_{II}}{C_{II}}, \quad B = \rho a + RA, \quad C = a^2 + A^2, \quad A_{II}^2 = \frac{\gamma_2 P}{R_{II}}. \tag{3.5}$$

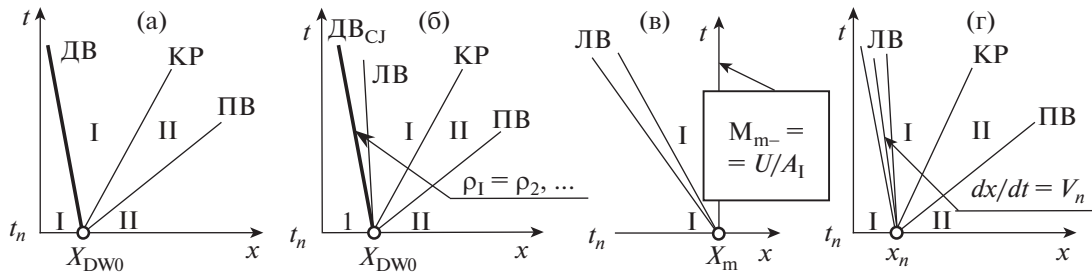
Подстановка  $A_{II}^2$  во второе из этих уравнений дает квадратное уравнение для  $R_{II}$ , решив которое и взяв положительный корень, получим

$$R_{II} = \frac{(2 - \gamma_2)(P - p_{II}) + \sqrt{(2 - \gamma_2)^2 (p_{II} - P)^2 + 4\gamma_2^2 p_{II} P}}{2\gamma_2 p_{II}} \rho_{II}. \tag{3.6}$$

Разрешив относительно  $P$  первые уравнения (3.3) и (3.5), придем к формуле

$$P = \frac{B_{II} p_1 + 2j p_{II} + j B_{II} (u_1 - u_{II})}{2j + B_{II}}. \tag{3.7}$$





Фиг. 3.  $xt$ -диаграммы распада разрыва: с пересжатой ДВ (а), с ДВ<sub>CJ</sub> (б), у сечения внезапного сужения (в), на границе ячейки с  $1 \leq n \leq N - 1$  (г); КР – контактный разрыв, ЛВ и ПВ – левая и правая волны.

Уравнение (3.7) с  $j$  из (3.4) и  $B_{II}$  из (3.6) решается итерациями с  $P^{(0)} = p_{II}$ . По завершении итераций формулы (3.3) дают  $U, R_I, A_1$  и скорость ДВ  $D$ . Координата ДВ  $X_{DW}$  находится интегрированием с шагом  $\nu t$  уравнения  $dX_{DW}/dt = D$  от  $t = t_n$  и  $X_{DW} = X_{DW0}$  со скоростью  $D$ , найденной для полуслоя при  $t = t_n$ , а для нового слоя – на полуслое. Прежде чем сделать новый временной шаг, по последней формуле (3.3), вычисляется число Маха  $M_2$  и новый шаг делается, если найденное  $M_2 \leq 1$ . В противном случае реализуется переход к ДВ<sub>CJ</sub> (фиг. 3б). При неизменных  $p_1, \dots$  параметры за ДВ<sub>CJ</sub> (с индексом I вместо 2) находятся по формулам (1.6), а для примыкающей к ней слабой (согласно расчетам – на достаточно мелких сетках) “левой” волны разрежения (ЛВ) верны столь же точные, как равенства (3.5), соотношения

$$U = u_1 - 2 \frac{P - p_1}{B_1}, \quad R_1 = \rho_1 + 2 \frac{P - p_1}{C_1}, \quad A_1^2 = \frac{\gamma_2 P}{R_1}. \tag{3.8}$$

Отсюда аналогично уравнению (3.6) для  $R^{II}$  получается уравнение

$$R_1 = \frac{(2 - \gamma_2)(P - p_1) + \sqrt{(2 - \gamma_2)^2 (p_1 - P)^2 + 4\gamma_2^2 p_1 P}}{2\gamma_2 p_1} \rho_1, \tag{3.9}$$

а для по-прежнему слабой “правой волны” верны равенства (3.5). Разрешив первые уравнения (3.5) и (3.8) относительно  $P$ , придем к формуле

$$P = \frac{B_{II} p_1 + B_I p_{II} + B_I B_{II} (u_1 - u_{II})/2}{B_I + B_{II}}. \tag{3.10}$$

С привлечением уравнений (3.6) и (3.9) для  $R_{II}$  и  $R_I$  и формул для  $A_1$  и  $A_{II}$  итерациями находятся  $P, R_I, R_{II}, A_1$  и  $A_{II}$ , а затем  $U$ . Из них далее нужно только  $P$ , но не для вычисления правых частей уравнений (3.2) с  $n = 0$  и координаты ДВ  $X_{DW}$ . Для этого хватает параметров с индексом 2 (заменным на I), определенных формулами (1.6) до решения задачи о распаде разрыва. Давление  $P$  определяет, сохраняется ли ДВ<sub>CJ</sub> или следует вернуться к пересжатой ДВ: первое – при  $P \leq p_1 = p_2$ , второе – при  $P > p_1 = p_2$ .

Для канала с гладким соплом в качестве неподвижной правой границы берется сечение на таком удалении от минимального сечения сопла, что возмущенный поток в нем при  $t > 0$  сверхзвуковой. Большие величины в этом сечении находятся экстраполяцией по известным параметрам при  $t = t_n$  или  $t = t_n^{n+1/2}$ . Для каналов с внезапным сужением правая граница – сечение  $x = X_m$ . Предраспадные  $u_1, p_1$  и  $\rho_1$  также экстраполируются в сечение  $x = X_m$  по параметрам слоя  $t = t_n$  или полуслоя. При  $t > 0$  в этом сечении известен определенный формулами (3.1) квадрат числа Маха  $M_{m-}$ , причем  $M_{m-}^2 = U^2/A_1^2 = U^2 R_1/(\gamma_2 P)$ . В слабой левой волне (ЛВ на фиг. 3в) выполняются равенства (3.8). Подстановка  $U$  и  $R_1$  из (3.8) в уравнение  $M_{m-}^2 = U^2 R_1/(\gamma_2 P)$  дает кубическое уравнение для  $P$  и его следствие

$$P = p_1 + \frac{\gamma_2^2 (M_1^2 - M_{m-}^2) p_1^2 + (1 - 2M_1)(P - p_1)^2}{\rho_1 a_1^2 (\gamma_2 M_{m-}^2 - 2u_1^2/C_1 + 4\rho_1 u_1/B_1)}, \quad M_1 = \frac{u_1}{a_1}.$$

Правильное (близкое к  $p_1$ ) значение  $P$  находится итерациями с привлечением решения (3.9) для  $R_I$ .

Описанный нелинейный подход справедлив и при определении больших величин на внутренних границах (фиг. 3г,  $1 \leq n \leq N - 1$ ). Для них итерациями решается уравнение (3.10) с решениями (3.6) и (3.9) для  $R_{II}$  и  $R_I$ . По завершении итераций одинаковые значения  $U$  дают формулы из (3.5) и (3.8).

Если ЛВ – слабая ударная волна, то ее скорость [8]:  $D_1 = (u_1 - a_1 + U - A_1)/2$  и большие величины для уравнений (3.2) выбираются так:

$$V < D_1: \quad U = u_1, \quad P = p_1, \quad R = \rho_1; \quad V > D_1: \quad U = U, \quad P = P, \quad R = R_1.$$

Если же ЛВ – волна разрежения, то возможны три варианта:

$$V < u_1 - a_1: \quad U = u_1, \quad P = p_1, \quad R = \rho_1; \quad V > U - A_1: \quad U = U, \quad P = P, \quad R = R_1;$$

$$A = \frac{2a_1 + (\gamma_2 - 1)(u_1 - V)}{\gamma_2 + 1}, \quad R = \rho_1 \left( \frac{A}{a_1} \right)^{2/(\gamma_2 - 1)}, \quad P = p_1 \left( \frac{R}{\rho_1} \right)^{\gamma_2}, \quad U = A + V.$$

Третий вариант реализуется при  $u_1 - a_1 < V < U - A_1$  (фиг. 3г, граница внутри ЛВ разрежения). Здесь найденные из распада разрыва большие величины заменяются на  $A$ , ..., последовательно вычисляемые по приведенным формулам.

Как показали расчеты, описанная разностная схема, использующая идеи схем [30]–[32], устойчива при  $\tau \leq \Delta/(u + a - V)_{\max}$  с максимумом по ячейкам слоя  $t = t_n$ .

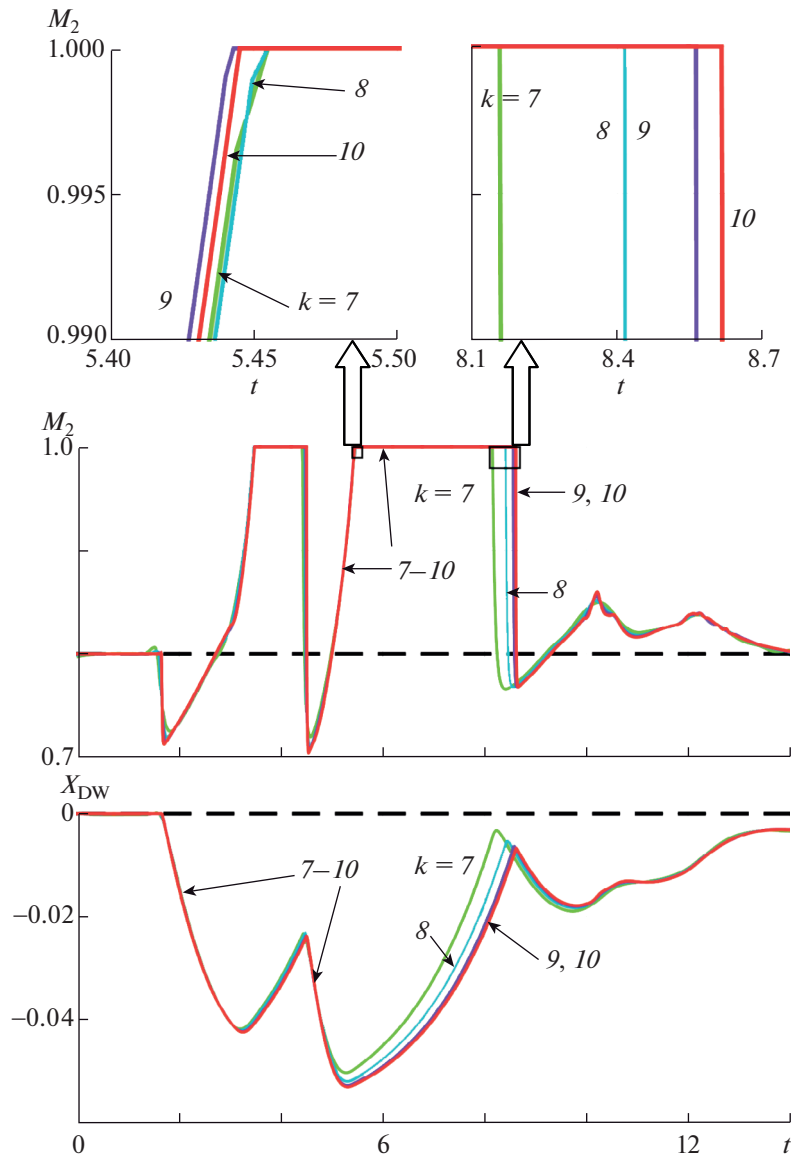
#### 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Приводимые далее примеры рассчитаны по программе, составленной в рамках описанных выше математической модели и разностной схемы для двигателеподобных каналов типа изображенных на фиг. 2а. В выполненных расчетах задавались постоянные одинаковые относительные начальные возмущения  $\delta\phi = \Delta\phi/\phi$  скорости, плотности и давления на отрезке, показанном на фиг. 2б. Заданные так начальные возмущения порождают три волны: две акустические, бегущие влево (“ $L$ -волна”) и вправо (“ $R$ -волна”), и сносимую потоком энтропийную – “ $S$ -волну”. На ДВ первой приходит начальная  $L$ -волна, а затем  $L$ -волны – отражения  $R$ - и  $S$ -волн от сужения сопла. При  $|\delta\phi| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – достаточно малая величина, для таких начальных возмущений исследуемые течения возвращались к своим стационарным состояниям. Как и следовало ожидать, величина  $\varepsilon$  убывает с приближением  $M_2$  к единице и при одинаковых степенях поджатия  $f$  с переходом от гладкого сопла к соплу с внезапным сужением. Неочевидным оказалось уменьшение  $\varepsilon$  при переходе от отрицательных  $\delta\phi$  к положительным и рост  $\varepsilon$  с увеличением  $q^0$  при фиксированных остальных параметрах обратной задачи, определяющих стационарное течение.

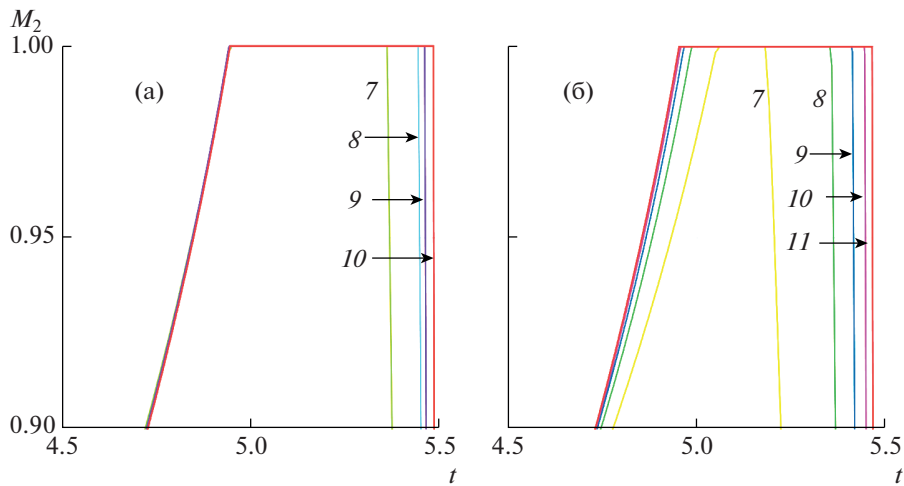
Иллюстрации сказанного предположим фиг. 4, показывающую зависимость результатов расчета от количества ячеек  $N = 2^k$  для канала фиг. 2 с внезапным сужением при  $\delta\phi = 0.16$ . Несмотря на отнюдь не малое возмущение, расчеты на сетках с  $k = 7-11$  до  $t = 20$  (время отнесено к  $y_0/u_0$  с размерными высотой входа в канал  $y_0$  и скоростью  $u_0$ ) продемонстрировали возврат к стационарному течению при двукратном переходе пересжатой ДВ к ДВ<sub>СД</sub> и обратно. Два фрагмента верхней фигуры с растянутыми осями демонстрируют линейную сходимость на грубых сетках ( $k = 7$  и  $8$ ), переходящую в квадратичную с измельчением сетки. В исходных масштабах кривые для  $k = 10$  и  $11$  неразличимы.

Непосредственное сравнение результатов, полученных при расчете с применением развитой разностной схемы и схемы первого порядка аппроксимации на непрерывных решениях для одного из фрагментов фиг. 4, представлено на фиг. 5. Схема первого порядка получается из описанной разностной схемы исключением счета полуслоя и использованием в качестве предраспадных параметров малых величин с полуцелыми нижними индексами. Поэтому счет по ней идет в два раза быстрее. Однако, согласно фиг. 5, результаты одинакового качества получаются по этой схеме при увеличении числа ячеек в  $2^2$  раза и уменьшении шага интегрирования  $\tau$  в те же  $2^2$  раза. В итоге – рост времени счета в  $2^3$  раз, а при решении двумерных и пространственных задач в  $2^5$  и в  $2^7$  раз.

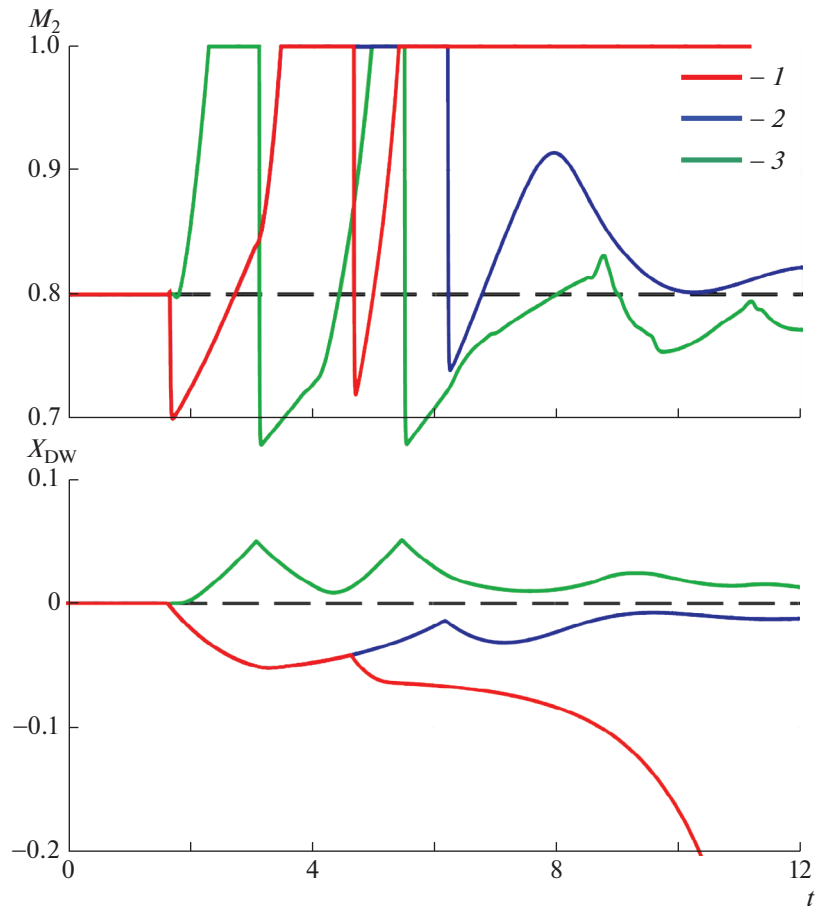
Переход к ДВ<sub>СД</sub> происходит под воздействием пришедших сзади на пересжатую ДВ  $L$ -волн разрежения. При этом, как показали расчеты, формируется примыкающая к ДВ<sub>СД</sub> интенсивная волна разрежения. Для правильного описания этого процесса расчетная сетка в окрестности ДВ<sub>СД</sub> должна быть достаточно мелкой.



**Фиг. 4.** Рассчитанные на разных сетках зависимости  $M_2$  и  $X_{DW}$  от  $t$  для течения в канале фиг. 2 с внезапным сужением при начальном возмущении  $\delta\phi = 0.16$ . Общее число ячеек  $N = 2^k$  с  $k = 7, \dots, 10$ .



**Фиг. 5.** Сравнение результатов расчета по схемам второго (а) и первого (б) порядка.



**Фиг. 6.** Изменение  $M_2$  и  $X_{DW}$  для разных каналов и начальных возмущений: канал с внезапным сужением (1 и 3), канал с гладким соплом (2),  $\delta\varphi \equiv \Delta\varphi/\varphi = 0.2$  (1 и 2),  $\delta\varphi = -0.2$  (3).

Три примера расчета на сетках с  $k = 10$  ( $N = 1024$ ) для двух каналов фиг. 2 и стационарных течений в них демонстрирует фиг. 6. На ней для  $|\delta\varphi| = 0.2$  приведены зависимости от  $t$  числа Маха  $M_2$  и координаты ДВ  $X_{DW}$ . При  $\delta\varphi = 0.2$  для сопла с внезапным сужением второй переход к ДВ<sub>СJ</sub> закончился разрушением стационарного течения. Для гладкого сопла этого не происходит из-за меньшего отражения приходящих к нему акустических и энтропийных волн. Согласно фиг. 4 при  $\delta\varphi \leq 0.16$  возмущения затухают и для канала с внезапным сужением. Затухают возмущения и при больших отрицательных возмущениях (фиг. 6,  $\delta\varphi = -0.2$ ).

В четырех случаях, показанных на фиг. 4 и 6, реализуется двукратный или однократный переход к ДВ<sub>СJ</sub>. В трех из них при равном числе обратных переходов восстанавливалось исходное стационарное течение с пересжатой ДВ, причем на фиг. 4 и в случае 2 на фиг. 6 — после смещения ДВ против потока. Обратный переход осуществляют волны сжатия, интенсивность которых достаточна для ликвидации волн разрежения, сопровождающих ДВ<sub>СJ</sub>. В случае 1 на фиг. 6 обратного перехода не произошло и ДВ, сместившись против потока, став ДВ<sub>СJ</sub> и оставаясь таковой (в реальности до попадания в плохо перемешанную горючую смесь), продолжает движение в том же направлении.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отличие развитого подхода от также “численных” подходов предшественников [27], [28] в счете по более аккуратной разностной схеме, в упрощениях, обусловленных слабостью всех, кроме ДВ, волн в задачах о распаде разрыва, в нацеленности на двигателеподобные конфигурации (в частности, с внезапно сужающейся дозвуковой частью сопла Лаваля) и в интересных примерах с переходами к ДВ<sub>СJ</sub> и обратно. Вместе с оправданным для рассматриваемых задач исполь-

зованием простых (“классических”) моделей термодинамики и газовой динамики одномерных течений с ДВ – поверхностью разрыва это позволило создать достаточно аккуратный, быстрый и адекватный инструмент решения задач, интересных для теории и приложений.

Для устойчивых к малым возмущениям стационарных течений с пересжатой ДВ в канале с сильно отражающим нестационарные возмущения внезапным сужением сравнительно большие возмущения приводят к переходу пересжатой ДВ на режим ДВ<sub>СД</sub>. При сдвиге ДВ по потоку в таких случаях наблюдаются обратный переход и возврат к исходному стационарному течению. Обратного перехода может не произойти, если возникшие из-за больших возмущений ДВ<sub>СД</sub> и прилегающая к ней достаточно интенсивная волна разрежения сдвинулись против потока. В таких случаях движение ДВ<sub>СД</sub> в том же направлении будет продолжаться до ее попадания в плохо перемешанную горючую смесь.

Авторы благодарны А.Н. Кудрявцеву за полезные замечания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б. К теории распространения детонационных волн в газообразных системах // Ж. экспериментальной и теор. физ. 1940. Т. 10. Вып. 5. С. 542–569.
2. von Neumann J. Progress report on theory of detonation waves // Office of Scientific Research and Development (OSRD). 1942. Rep. № 549.
3. Döring W. Über der Detonation-vorgang in Gasen // Ann. Physik. 1943. Bd. 43. S. 421–436.
4. Chapman D.L. On the rate of explosions in gases // Phil. Mag. 1899. V. 47. 5<sup>th</sup> series. № 284. P. 90–104.
5. Jouguet E. Sur la propagation des reactions chimiques dans les gaz // J. Maths. Pures Appl. 6<sup>e</sup> serie. 1905. T. 1. V. 60. Fasc. 4. P. 347–425; 1906. T. 2. V. 61. Fasc. 1. P. 1–86.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Издание третье, переработанное. М.: Наука, 1986. 733 с.
7. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
8. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус пресс, 2010. 440 с.
9. Зельдович Я.Б. К вопросу об энергетическом использовании детонационного горения // Ж. техн. физ. 1940. Т. 10. Вып. 17. С. 1453–1461 = Zeldovich Ya.B. To the question of energy use of detonation combustion // J. of Propulsion and Power. 2006. V. 22. № 3. P. 588–592.
10. Александров В.Г., Крайко А.Н., Реент К.С. Определение характеристик сверхзвукового пульсирующего детонационного прямого двигателя (СПДПД) // Аэромехан. и газ. динамика. 2001. № 2. С. 3–15.
11. Крайко А.Н. Теоретическое и экспериментальное обоснование концепции пульсирующего двигателя с детонационной волной, движущейся против сверхзвукового потока // Импульсные детонационные двигатели. М.: Торус пресс, 2006. 592 с. С. 569–590.
12. Kraiko A.N., Egoryan A.D. Comparison of thermodynamic efficiency and thrust characteristics of air-breathing jet engines with subsonic combustion and burning in stationary and nonstationary detonation waves // AIP Conf. Proc. Vol. 2027: Proc. of the 19th Intern. Conf. on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2018) / Ed. by V. Fomin. AIP. 2018. Pp. 020006-1–020006-5.
13. Крайко А.Н. Неустойчивость стационарных течений в каналах переменной площади поперечного сечения с детонационной волной Чепмена–Жуге // Прикл. матем. и механ. 2019. Т. 83. Вып. 3. С. 354–369.
14. Черный Г.Г. Неустановившиеся движения газа в каналах с проницаемыми стенками. Об устойчивости скачка уплотнения в каналах // Труды ЦИАМ. 1953. № 244. 12 с. = Черный Г.Г. Неустановившиеся движения газа в каналах. Устойчивость замыкающего скачка // Газовая динамика. Избранное. Издание второе исправленное. В 2-х т. Т. 1. Ред.-составитель: А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2005. 720 с. С. 590–609.
15. Бабицкий А.Б. Отражение малых возмущений от поверхности скачка и устойчивость скачка в канале переменного сечения при  $T_{01} \neq T_{02}$  // Королев: ЦНИИМаш, 1963. 19 с.
16. Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале // Прикл. матем. и механ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 473–484.
17. Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн // Прикл. матем. и механ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 469–478.
18. Крайко А.Н., Широносков В.А. Исследование устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при околосзвуковой скорости потока // Прикл. матем. и механ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 579–586.

19. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И. и др.* Анализ устойчивости одномерного течения в канале при произвольном изменении параметров стационарного потока между сечением замыкающего скачка и выходом из канала // Прикл. матем. и механ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 637–645.
20. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Тилляева Н.И. и др.* Исследование устойчивости течения идеального газа в каналах с замыкающим скачком уплотнения // Труды ЦИАМ. 1982. № 1020. С. 6–21.
21. *Галин Г.Я., Куликовский А.Г.* Об устойчивости течений, возникающих при распадении произвольного разрыва // Прикл. матем. и механ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 95–102.
22. *Галин Г.Я., Куликовский А.Г.* Об устойчивости одномерных течений газа в расширяющихся областях // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1981. № 2. С. 112–119.
23. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Щербаков С.А.* Сравнение интегральных характеристик и формы профилированных контуров сопел Лавала с “плавным” и с “внезапным” сужениями // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1986. № 4. С. 129–137.
24. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Щербаков С.А.* Метод расчета течений идеального газа в плоских и осесимметричных соплах с изломами контура // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 11. С. 1679–1694.
25. *Крайко А.Н., Мышенков Е.В., Пьянков К.С. и др.* Влияние неидеальности газа на характеристики сопел Лавала с внезапным сужением // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2002. № 5. С. 191–204.
26. *Григоренко В.Л., Крайко А.Н.* Об использовании потенциального приближения для расчета течений со скачками уплотнения // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1986. № 2. С. 121–129.
27. *Левин В.А., Мануйлович И.С., Марков В.В.* Возбуждение и срыв детонации в газах // Инженерно-физ. ж. 2010. Т. 83. № 6. С. 1174–1201.
28. *Журавская Т.А., Левин В.А.* Устойчивость течения газовой смеси со стабилизированной детонационной волной в плоском канале с сужением // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2016. № 4. С. 120–129.
29. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
30. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
31. *Родионов А.В.* Повышение порядка аппроксимации схемы С.К. Годунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 12. С. 1853–1860.
32. *Тилляева Н.И.* Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Уч. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26.