УДК 517.968.74

Посвящается академику Сергею Константиновичу Годунову в связи с его 90-летием

ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1)]

В. Л. Васкевич[1,2]

[1] 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
[2] 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский государственный университет, Россия
e-mail: vask@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 02.12.2019 г.
Переработанный вариант 09.12.2019 г.
Принята к публикации 16.12.2019 г.

Рассматривается функциональное уравнение, в котором линейная комбинация функции от двух переменных и ее производной по времени приравнивается двукратному интегралу по пространственным переменным от некоторого квадратичного выражения от той же самой функции. Для получающегося в результате интегродифференциального уравнения с квадратичной нелинейностью исследуется задача Коши с непрерывными и ограниченными на положительной полуоси начальными данными. Доказывается сходимость классического метода последовательных приближений. Дается оценка качества приближения в зависимости от номера итерированного решения. Доказывается теорема существования решения задачи в сопутствующих функциональных пространствах, обосновывается единственность этого решения. Выводится априорная оценка для решений из сопутствующего задаче класса корректности. Находится гарантированный по времени отрезок существования решения. Библ. 7.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, квадратичная нелинейность, задача Коши, теорема существования, последовательные приближения, априорная оценка.

DOI: 10.31857/S0044466920040183

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В общем виде рассматриваемое в статье уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{du}{dt}(t,k) + a(t)u(t,k) = \iint\limits_{P(k)} W(k,k_1,k_2)u(t,k_1)u(t,k_2)dk_1dk_2. \tag{1.1}$$

Независимые переменные в уравнении (1.1), равно как и переменные интегрирования в его правой части, положительны: $t > 0$, $k > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Коэффициент $a(t)$ – это непрерывная на положительной полуоси функция, а область интегрирования $P(k)$ содержится в первом квадранте плоскости (k_1,k_2) и может быть неограниченной. Ядро $W(k,k_1,k_2)$ интегрального оператора в уравнении (1.1) предполагается заданным, а искомое решение уравнения – это функция $u(t,k)$.

Уравнения типа (1.1) возникают при квазимарковском приближении в теории турбулентности [1], а также при моделировании некоторых процессов в астрофизике и магнитной гидродинамике [2]–[4].

В частном случае, когда ядро интегрального оператора в уравнении представимо в виде $W(k,k_1,k_2) = b(k)\delta(k_1-k)\delta(k_2-k)$, где $\delta(k_1-k)$ и $\delta(k_2-k)$ обозначают сдвиги обобщенной дельта функции Дирака, а $b(k)$ представляет собой непрерывную функцию, интегродифференциальное уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{du}{dt}(t,k) + a(t)u(t,k) = b(k)u^2(t,k),$$

т.е. является при каждом фиксированном $k > 0$ скалярным дифференциальным уравнением Риккати [5]. Этот же термин условимся применять и к уравнению (1.1), называя его далее инте-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00422).

гродифференциальным уравнением типа Риккати. Отметим, что в научном сообществе существует устойчивый интерес также и к дифференциальным матричным уравнениям Риккати [5], [6].

Область интегрирования $P(k)$ во входящем в уравнение (1.1) двукратном интегральном операторе и ядро $W(k,k_1,k_2)$ этого интегрального оператора явно от времени не зависят.

Свойства множества решений уравнения (1.1) определяются, во-первых, ядром $W(k,k_1,k_2)$ соответствующего интегрального оператора и, во-вторых, условиями на поведение решения $u(t,k)$ при $k\to+0$ и $k\to+\infty$. В случае произвольного ядра $W(k,k_1,k_2)$ какие-либо общего вида аналитические представления для решений уравнения (1.1) до сих пор не известны и по этой причине задачи для этого и сходных с ним уравнений приходится решать приближенно. Результаты для интегродифференциальных уравнений типа (1.1), полученные при разного рода численном моделировании, изложены и проиллюстрированы в работах [2]–[4].

Предполагается, что ядро $W(k,k_1,k_2)$ интегрального оператора в уравнении – это непрерывная в первом октанте пространства (k,k_1,k_2) функция, для которой выполнено следующее условие:

$$\sup_{k\ge 0}\iint\limits_{P(k)}|W(k,k_1,k_2)|\,dk_1dk_2\le M<+\infty. \tag{1.2}$$

Здесь M – это заданная неотрицательная постоянная. Совокупность всевозможных непрерывных в первом октанте функций $W(k,k_1,k_2)$, удовлетворяющих оценке (1.2), обозначим как $\mathbb{K}(M)$. Этот класс не пуст: тождественно нулевая функция ему принадлежит. При $M=0$ уравнение (1.1) вырождается в линейное дифференциальное.

При $M>0$ в классе $\mathbb{K}(M)$ содержится достаточно много нетривиальных функций. Например, пусть при любом неотрицательном k функция $W_1(k,k_1,k_2)$ суммируема по (k_1,k_2) в первом квадранте и при этом существует такая конечная константа M_1, что равномерно по k выполняется оценка

$$\|W_1(k,k_1,k_2)\,|\,L_1(k_1>0,k_2>0)\|=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty|W_1(k,k_1,k_2)|\,dk_1dk_2\le M_1\qquad\forall k>0.$$

Тогда функция $W_1(k,k_1,k_2)$ принадлежит классу $\mathbb{K}(M)$, в котором в качестве M выбирается следующая постоянная:

$$M=\sup_{k\ge0}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty|W_1(k,k_1,k_2)|\,dk_1dk_2\le M_1<+\infty.$$

Добавим к уравнению начальные данные на положительной полуоси и рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered}\frac{du}{dt}(t,k)+a(t)u(t,k)=\iint\limits_{P(k)}W(k,k_1,k_2)u(t,k_1)u(t,k_2)\,dk_1dk_2,\\ u(t,k)\big|_{t=0}=\varphi(k),\qquad k\ge0.\end{gathered}\tag{1.3}$$

От функции $\varphi(k)$ потребуем непрерывности при $k>0$ и подчиненности следующей оценке:

$$|\varphi(k)|\le Ce^{-\gamma k}\qquad\forall k\ge0. \tag{1.4}$$

Показатель γ и постоянная C в правой части неравенства (1.4) предполагаются неотрицательными. В частности, в качестве начальных данных в (1.3) можно взять константу либо любую непрерывную и финитную на положительной полуоси функцию.

Ядро W исходного уравнения порождает квадратично нелинейный интегральный оператор, действие которого на непрерывную и ограниченную в первом квадранте плоскости (t,k) функцию $U(t,k)$ задается следующим соотношением:

$$W[U]=W[U](t,k)=\iint\limits_{P(k)}W(k,k_1,k_2)U(t,k_1)U(t,k_2)\,dk_1dk_2.$$

По коэффициенту $a(t)$ исходного уравнения определим положительную функцию

$$\mu(t) = \exp\left\{\int_0^t a(\tau)d\tau\right\}.$$

Функция $\mu(t)$ непрерывно дифференцируема, $\mu' = a(t)\mu$, и при этом $\mu(0) = 1$. Домножив на $\mu(t)$ обе части уравнения (1.1), запишем результат в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)u(t,k)] = \mu(t)W[u](t,k).$$

Введем сопутствующий задаче (1.3) функциональный класс $\mathbb{D}$, задавшись предварительно парой положительных чисел $H > 0$ и $B > 0$. По определению, $\mathbb{D}$ состоит из таких непрерывных в полуполосе $0 \le t \le H$, $k > 0$ функций $U(t,k)$, что произведение $\mu(t)U(t,k)$ отличается в ней от начальной функции $\varphi(k)$ лишь на величину, не превосходящую по модулю произведения $Be^{-\gamma k}$:

$$D(H,B,\gamma,\varphi) = \{U(t,k)|0 \le t \le H, k > 0 \Rightarrow |\mu(t)U(t,k) - \varphi(k)| \le Be^{-\gamma k}\}.$$

Отметим, что класс $\mathbb{D}$ не пуст: ему, например, принадлежит функция $\varphi(k)/\mu(t)$. В случае $\mu(t) = 1$ класс $\mathbb{D}$ введен в [7].

Всюду далее область интегрирования $P(k)$ представляет собой полуограниченную полосу в первом квадранте, задаваемую соотношениями

$$P(k) = \{(k_1,k_2)\,|\,k_2 \ge k_1 - k,\ k_2 \le k_1 + k,\ k_1 + k_2 \ge k\}. \tag{1.5}$$

При $k = 0$ множество $P(k)$ вырождается в луч $k_1 = k_2 \ge 0$. Объединение множеств $P(k)$ по всем неотрицательным k совпадает с первым квадрантом плоскости (k_1,k_2).

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Пусть непрерывная функция $a(t)$ в исходном уравнении неотрицательна, а положительный момент времени T_0 выбран таким образом, что*

$$\int_0^{T_0} \frac{1}{\mu(\tau)}d\tau \le \frac{B}{M(B+C)^2}, \quad B > 0.$$

Тогда существует непрерывная при $0 \le t \le T_0$ и $k \ge 0$ функция $u(t,k)$, имеющая по переменной t непрерывную производную и решающая задачу (1.3). *Функция $u(t,k)$ принадлежит классу $D(T_0,B,\gamma,\varphi)$ и других решений задачи* (1.3) *в этом классе нет.*

Доказательство теоремы поведем методом последовательных приближений.

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Зафиксируем параметры H, B и γ класса $D(H,B,\gamma,\varphi)$ и заметим, что на положительной полуоси $k > 0$ для любых функций $U(t,k)$ и $V(t,k)$ из $\mathbb{D}$ выполняется оценка

$$\mu(t)|U(t,k) - V(t,k)| \le |\mu(t)U(t,k) - \varphi(k)| + |\varphi(k) - \mu(t)V(t,k)| \le 2Be^{-\gamma k}, \quad 0 \le t \le H.$$

Таким образом, для любых функций $U(t,k)$ и $V(t,k)$ из $\mathbb{D}$ справедливы неравенства

$$\sup_{0\le t\le H} \mu(t)|U(t,k) - V(t,k)| \le 2Be^{-\gamma k}, \quad \mu(t)\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(t,\xi) - V(t,k)| \le 2B. \tag{2.1}$$

Взяв здесь $V(t,k)$ тождественно нулевой, получим для любой функции $U(t,k)$ из $\mathbb{D}$ следующие оценки:

$$\sup_{0\le t\le H} \mu(t)|U(t,k)| \le 2Be^{-\gamma k}, \quad \mu(t)\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(t,\xi)| \le 2B. \tag{2.2}$$

Сформулируем условия на ядро $W(k,k_1,k_2)$, при выполнении которых интеграл $W[U](t,k)$ абсолютно сходится на любой функции $U(t,k)$ из $\mathbb{D}$ и определяет при этом в первом квадранте плоскости (t,k) непрерывную функцию.

Теорема 2. *Для ядра $W(k,k_1,k_2)$ из класса $\mathbb{K}(M)$ квадратично нелинейный оператор $W[\cdot]$ определен и конечен на любой функции $U(t,k)$ из $\mathbb{D}(H,B,\gamma,\varphi)$, удовлетворяя при этом следующей оценке*:

$$\left|W[U](t,k)\right| \le Me^{-\gamma k}\left(\sup_{\xi\ge0} e^{\gamma\xi}\left|U(t,\xi)\right|\right)^2 \le \frac{4MB^2}{\mu^2(t)}e^{-\gamma k}, \quad 0\le t\le H, \quad k>0. \tag{2.3}$$

Для любой пары функций $U(t,k)$, $V(t,k)$ из $\mathbb{D}(H,B,\gamma,\varphi)$ при $0\le t\le H$ справедливо неравенство

$$\sup_{k\ge0} e^{\gamma k}\left|W[U](t,k)-W[V](t,k)\right| \le \frac{L}{\mu(t)}\sup_{\xi\ge0} e^{\gamma\xi}\left|U(t,\xi)-V(t,\xi)\right|, \tag{2.4}$$

где $L=4BM$.

Доказательство. Оценим функцию $W[U](t,k)$ по модулю сверху, внося его под знак интеграла в определении оператора $W[\cdot]$. В результате получим

$$\begin{gathered}\left|W[U](t,k)\right| \le \iint\limits_{P(k)} \left|W(k,k_1,k_2)\right|\left|U(t,k_1)\right|\left|U(t,k_2)\right|dk_1dk_2 = \iint\limits_{P(k)}\left|W(k,k_1,k_2)\right|e^{-\gamma(k_1+k_2)}(e^{\gamma k_1}\left|U(t,k_1)\right|)\times \\ \times(e^{\gamma k_2}\left|U(t,k_2)\right|)dk_1dk_2 \le \iint\limits_{P(k)} e^{-\gamma(k_1+k_2)}\left|W(k,k_1,k_2)\right|dk_1dk_2\left(\sup_{\xi\ge0}e^{\gamma\xi}\left|U(t,\xi)\right|\right)^2.\end{gathered} \tag{2.5}$$

По условию, в области интегрирования $P(k)$ справедливо неравенство $k_1+k_2\ge k$, а $\gamma\ge0$. Следовательно, справедлива оценка

$$\iint\limits_{P(k)} e^{-\gamma(k_1+k_2)}\left|W(k,k_1,k_2)\right|dk_1dk_2 \le e^{-\gamma k}\iint\limits_{P(k)}\left|W(k,k_1,k_2)\right|dk_1dk_2 \le Me^{-\gamma k}. \tag{2.6}$$

Подставляя этот результат в оценку (2.5), получаем

$$\left|W[U](t,k)\right| \le Me^{-\gamma k}\left(\sup_{\xi\ge0}e^{\gamma\xi}\left|U(t,\xi)\right|\right)^2.$$

Таким образом, первое из неравенств (2.3) доказано. Второе же из них следует из принадлежности функции $U(t,k)$ классу $\mathbb{D}$ и оценки (2.2).

Выведем оценку (2.4). Вычитая из $W[U](t,k)$ функцию $W[V](t,k)$, получаем

$$W[U](t,k)-W[V](t,k) = \iint\limits_{P(k)} W(k,k_1,k_2)[U(t,k_1)U(t,k_2)-V(t,k_1)V(t,k_2)]dk_1dk_2.$$

К выражению в квадратных скобках под интегралом добавим тривиальную комбинацию $U(t,k_1)V(t,k_2)-U(t,k_1)V(t,k_2)$ и, произведя перегруппировку слагаемых, получим следующее соотношение:

$$\begin{gathered}W[U](t,k)-W[V](t,k) = \iint\limits_{P(k)} W(k,k_1,k_2)[U(t,k_1)(U(t,k_2)-V(t,k_2))+ \\ +V(t,k_2)(U(t,k_1)-V(t,k_1))]dk_1dk_2 = \iint\limits_{P(k)} e^{-\gamma(k_1+k_2)}W(k,k_1,k_2)\times \\ \times[e^{\gamma k_1}U(t,k_1)e^{\gamma k_2}(U(t,k_2)-V(t,k_2))+e^{\gamma k_2}V(t,k_2)e^{\gamma k_1}(U(t,k_1)-V(t,k_1))]dk_1dk_2.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Оценим сверху разность функций в левой части равенства (2.7) по модулю, внеся его под знак интеграла в правой части и пользуясь затем неравенством треугольника:

$$\begin{gathered}\left|W[U](t,k)-W[V](t,k)\right| \le \sup_{\xi\ge0}e^{\gamma\xi}\left|U(t,\xi)-V(t,\xi)\right|\times \\ \times\iint\limits_{P(k)} e^{-\gamma(k_1+k_2)}\left|W(k,k_1,k_2)\right|(e^{\gamma k_1}\left|U(t,k_1)\right|+e^{\gamma k_2}\left|V(t,k_2)\right|)dk_1dk_2.\end{gathered} \tag{2.8}$$

По условию функции $U(t,k)$ и $V(t,k)$ принадлежат классу $\mathbb{D}$ и для каждой из них справедливы оценки (2.2). Следовательно,

$$\mu(t)\left|U(t,k_1)\right| \le 2Be^{-\gamma k_1}, \quad \mu(t)\left|V(t,k_2)\right| \le 2Be^{-\gamma k_2}.$$

Внося эти два неравенства под знак интеграла в правой части (2.8), продолжим соответствующую оценку следующим образом:

$$|W[U](t,k) - W[V](t,k)| \le \frac{4B}{\mu(t)} \sup_{\xi \ge 0} e^{\gamma\xi} |U(t,\xi) - V(t,\xi)| \iint_{P(k)} e^{-\gamma(k_1+k_2)} |W(k,k_1,k_2)| dk_1 dk_2.$$

Пользуясь оценкой (2.6) для ядра $W(k,k_1,k_2)$, имеем далее

$$|W[U](t,k) - W[V](t,k)| \le \frac{4BM}{\mu(t)} e^{-\gamma k} \sup_{\xi \ge 0} e^{\gamma\xi} |U(t,\xi) - V(t,\xi)|. \tag{2.9}$$

Введем обозначение $L = 4BM$ и воспользуемся (2.9). Тогда получим

$$\sup_{k \ge 0} e^{\gamma k} |W[U](t,k) - W[V](t,k)| \le \frac{L}{\mu(t)} \sup_{\xi \ge 0} e^{\gamma\xi} |U(t,\xi) - V(t,\xi)|.$$

Это и есть искомая оценка (2.4). Теорема 2 доказана.

Оценка (2.3) справедлива и для функции $U(t,k) = \varphi(k)$. Учтя это и пользуясь условием (1.4), получим

$$|W[\varphi](t,k)| \le M e^{-\gamma k} \left(\sup_{\xi \ge 0} e^{\gamma\xi} |\varphi(\xi)| \right)^2 \le MC^2 e^{-\gamma k} < +\infty.$$

Таким образом, оператор $W[\cdot]$ переводит функцию $\varphi(k)$ в экспоненциально убывающую по пространственной переменной функцию, которая не зависит от t. Если $\varphi(k)$ тождественно равна единице, то $\gamma = 0$, $C = 1$ и поэтому $|W[1](t,k)| \le M$, где M – определяющая класс $\mathbb{K}(M)$ постоянная.

Теорема 3. *Пусть $U(t,k)$ и $V(t,k)$ – решения одного и того же уравнения* (1.1), *принадлежащие классу $\mathbb{D}(H,B,\gamma,\varphi)$. Тогда справедлива априорная оценка*

$$\int_0^t \sup_{k \ge 0} e^{\gamma k} |U(\tau,k) - V(\tau,k)| d\tau \le \frac{e^{\int_0^t \frac{L}{\mu(\tau)} d\tau} - 1}{L} \sup_{k \ge 0} e^{\gamma k} |U(0,k) - V(0,k)|, \tag{2.10}$$

где $0 \le t \le H$ *и*

$$\mu(t) = \exp\left\{ \int_0^t a(\tau) d\tau \right\}.$$

Если к тому же $U(0,k) = V(0,k)$, то $U(t,k)$ и $V(t,k)$ совпадают друг с другом всюду в области $0 < t < H$, $k > 0$.

Доказательство. Для функций $U(t,k)$ и $V(t,k)$ из класса $\mathbb{D}(H,B,\gamma,\varphi)$ справедливы оценки (2.2), т.е.

$$\mu(t)|U(t,k)| \le 2Be^{-\gamma k}, \quad \mu(t)|V(t,k)| \le 2Be^{-\gamma k}, \quad 0 \le t \le H, \quad k \ge 0.$$

Подставляя $U(t,k)$ и $V(t,k)$ в исходное интегродифференциальное уравнение (1.1) и вычитая полученные равенства одно из другого, получаем

$$\frac{d}{dt}[U(t,k) - V(t,k)] + a(t)[U(t,k) - V(t,k)] = W[U](t,k) - W[V](t,k).$$

Домножив обе части полученного уравнения на

$$\mu(t) = \exp\left\{ \int_0^t a(\tau) d\tau \right\},$$

запишем результат в виде

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)[U(t,k) - V(t,k)]] = \mu(t)[W[U](t,k) - W[V](t,k)].$$

Интегрируя это уравнение и учитывая, что $\mu(0)=1$, получаем

$$\mu(t)[U(t,k)-V(t,k)]-[U(0,k)-V(0,k)]=\int\limits_0^t \mu(\tau)(W[U](\tau,k)-W[V](\tau,k))d\tau.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\mu(t)|U(t,k)-V(t,k)|\le \int\limits_0^t \mu(\tau)\left|W[U](\tau,k)-W[V](\tau,k)\right|d\tau+\left|U(0,k)-V(0,k)\right|.$$

Применяя к разности под интегралом оценку (2.4), получаем следующее неравенство:

$$\mu(t)|U(t,k)-V(t,k)|\le Le^{-\gamma k}\int\limits_0^t \sup_{\xi>0} e^{\gamma\xi}\left|U(\tau,\xi)-V(\tau,\xi)\right|d\tau+\left|U(0,k)-V(0,k)\right|. \tag{2.11}$$

Введем обозначение

$$M(t)\equiv\int\limits_0^t \sup\nolimits_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(\tau,\xi)-V(\tau,\xi)|d\tau,$$

тогда $M(0)=0$ и

$$M'(t)=\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(t,\xi)-V(t,\xi)|.$$

Оценка (2.11) принимает при этом следующий вид:

$$\mu(t)\left|U(t,k)-V(t,k)\right|\le Le^{-\gamma k}M(t)+\left|U(0,k)-V(0,k)\right|,$$

или, что равносильно следующему:

$$\mu(t)\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(t,\xi)-V(t,\xi)|\le LM(t)+\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(0,\xi)-V(0,\xi)|. \tag{2.12}$$

Второй сомножитель в левой части (2.12) представляет собой $M'(t)$. Учитывая это, получаем дифференциальное неравенство

$$\mu(t)M'(t)\le LM(t)+\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(0,\xi)-V(0,\xi)|.$$

Переписав это неравенство в эквивалентном виде:

$$M'(t)-\frac{L}{\mu(t)}M(t)\le\frac{1}{\mu(t)}\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(0,\xi)-V(0,\xi)|,$$

домножим обе его части на функцию $\exp\left\{-\int_0^t\frac{L}{\mu(\tau)}d\tau\right\}$. Тогда придем к соотношению

$$M'(t)e^{-\int_0^t\frac{L}{\mu(\tau)}d\tau}-\frac{L}{\mu(t)}e^{-\int_0^t\frac{L}{\mu(\tau)}d\tau}M(t)\le\frac{1}{\mu(t)}e^{-\int_0^t\frac{L}{\mu(\tau)}d\tau}\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(0,\xi)-V(0,\xi)|,$$

или, что равносильно следующему:

$$\left(M(t)e^{-\int_0^t\frac{L}{\mu(\tau)}d\tau}\right)'\le-\frac{1}{L}\left(e^{-\int_0^t\frac{L}{\mu(\tau)}d\tau}\right)'\sup_{\xi\ge 0} e^{\gamma\xi}|U(0,\xi)-V(0,\xi)|.$$

Интегрируя обе части этого дифференциального неравенства и домножая результат на $e^{\int_0^t\frac{L}{\mu(\tau)}d\tau}$, получаем искомую априорную оценку (2.10).

Если $U(0,k) = V(0,k)$ для всех $k \geq 0$, то из (2.10) получаем $M(t) \leq 0$. Но функция $M(t)$ неотрицательна по определению и поэтому обязана быть тождественно нулевой: $M(t) \equiv 0$, или в эквивалентном виде:

$$\sup_{k\geq 0} e^{\gamma k}|U(t,k) - V(t,k)| = 0, \quad 0 \leq t \leq H.$$

Это означает, что функции $U(t,k)$ и $V(t,k)$ тождественно совпадают.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Интегрируя интегродифференциальное уравнение, записанное в виде

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)u(t,k)] = \mu(t)W[u](t,k),$$

и учитывая начальные условия, приходим к следующему квадратично нелинейному интегральному уравнению:

$$\mu(t)u(t,k) = \varphi(k) + \int_0^t \mu(\tau)W[u](\tau,k)d\tau.$$

Зададим последовательные приближения к решению задачи (1.3) с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$u^{[0]}(t,k) = \frac{1}{\mu(t)}\varphi(k), \quad t \geq 0, \quad k \geq 0,$$

и далее поочередно для $j = 1, 2, \ldots$:

$$\mu(t)u^{[j]}(t,k) = \varphi(k) + \int_0^t \mu(\tau)\iint_{P(k)} W(k,k_1,k_2)u^{[j-1]}(\tau,k_1)u^{[j-1]}(\tau,k_2)dk_1dk_2d\tau,$$

или, что эквивалентно:

$$\mu(t)u^{[j]}(t,k) = \varphi(k) + \int_0^t \mu(\tau)W[u^{[j-1]}](\tau,k)d\tau.$$

Покажем, что приведенные рекуррентные соотношения корректно определяют все функции $u^{[j]}(t,k)$, $j = 1, 2, \ldots$, на некотором непустом интервале $0 < t < H_0$.

Теорема 4. *Если для некоторого положительного числа* $B > 0$ *при всех* t: $0 \leq t \leq H$ *справедлива оценка*

$$\left|\mu(t)u^{[j-1]}(t,k) - \varphi(k)\right| \leq Be^{-\gamma k}, \tag{3.1}$$

то при этих же t, $0 \leq t \leq H$, *выполняется неравенство*

$$\left|\mu(t)u^{[j]}(t,k) - \varphi(k)\right| \leq \left(\int_0^t \frac{R}{\mu(\tau)}d\tau\right)e^{-\gamma k}, \tag{3.2}$$

где постоянная R *конечна и задается соотношением*

$$R = M(B+C)^2. \tag{3.3}$$

Постоянные C *и* γ *здесь те же самые, что в оценке* (1.4).

Доказательство. Пользуясь определением функции $u^{[j]}(t,k)$, получаем

$$\left|\mu(t)u^{[j]}(t,k) - \varphi(k)\right| \leq \int_0^t \mu(\tau)\iint_{P(k)} \left|W(k,k_1,k_2)\right|\left|u^{[j-1]}(\tau,k_1)\right|\left|u^{[j-1]}(\tau,k_2)\right|d\tau dk_1dk_2. \tag{3.4}$$

Полагая $0 \leq t \leq H$ и пользуясь условиями (3.1) и (1.4), имеем далее

$$\mu(t)\left|u^{[j-1]}(t,k)\right| \leq \left|\mu(t)u^{[j-1]}(t,k) - \varphi(k)\right| + \left|\varphi(k)\right| \leq (B+C)e^{-\gamma k}.$$

Подставляя эти неравенства в (3.4), получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}\left|\mu(t)u^{[j]}(t,k)-\varphi(k)\right| &\le \int_0^t \frac{1}{\mu(\tau)}d\tau \iint_{P(k)} \left|W(k,k_1,k_2)\right|(B+C)^2 e^{-\gamma k_1}e^{-\gamma k_2}dk_1dk_2 = \\ &= (B+C)^2\int_0^t \frac{1}{\mu(\tau)}d\tau \iint_{P(k)} \left|W(k,k_1,k_2)\right| e^{-\gamma(k_1+k_2)}dk_1dk_2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

В области интегрирования $P(k)$ справедливо неравенство $\gamma(k_1+k_2)\ge \gamma k>0$, и поэтому для (k_1,k_2) из $P(k)$ имеем $e^{-\gamma(k_1+k_2)}\le e^{-\gamma k}$. Следовательно, неравенство (3.5) можно продолжить следующим образом:

$$\left|\mu(t)u^{[j]}(t,k)-\varphi(k)\right| \le (B+C)^2\left(\int_0^t \frac{1}{\mu(\tau)}d\tau\right)e^{-\gamma k}\iint_{P(k)}|W(k,k_1,k_2)|dk_1dk_2. \tag{3.6}$$

Подставив в (3.6) оценку (1.2) интеграла, получим окончательно

$$\left|\mu(t)u^{[j]}(t,k)-\varphi(k)\right| \le M(B+C)^2\left(\int_0^t \frac{1}{\mu(\tau)}d\tau\right)e^{-\gamma k}.$$

Это и есть искомая оценка (3.2). Теорема 4 доказана.

Для начального приближения $u^{[0]}(t,k)$ имеем равенство $\mu(t)u^{[0]}(t,k)=\varphi(k)$. Следовательно, в любой полосе $0\le t\le H$ оценка (3.1) для $j=1$ выполнена при всех $B>0$ и $\gamma\ge 0$ одновременно. Применяя теорему 4, получаем неравенство

$$\left|\mu(t)u^{[1]}(t,k)-\varphi(k)\right| \le \left(\int_0^t \frac{R}{\mu(\tau)}d\tau\right)e^{-\gamma k}.$$

Найдем момент времени $T_0>0$, обладающий тем свойством, что

$$\int_0^{T_0}\frac{1}{\mu(\tau)}d\tau \le \frac{B}{R} = \frac{B}{M(B+C)^2}. \tag{3.7}$$

Существование $T_0>0$ со свойством (3.7) сразу следует из монотонного возрастания первообразной $F(t)=\int_0^t \frac{1}{\mu(\tau)}d\tau$, принимающей на положительной полуоси все положительные значения от нуля до $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mu(\tau)}d\tau$.

Если интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mu(\tau)}d\tau$ равен $+\infty$, то параметр $T_0>0$ с определяющим свойством (3.7) не только существует, но и единственен. То же самое можно утверждать в случае, когда интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mu(\tau)}d\tau$ конечен и больше B/R. Наконец, в случае когда $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mu(\tau)}d\tau\le B/R$ в качестве параметра $T_0>0$ годится любой сколь угодно большой момент времени.

Теперь, взяв $H=T_0$ в условиях теоремы 4 и пользуясь положительностью функции $\mu(t)$, получим для всех t: $0\le t\le T_0$, следующую оценку для первого приближения:

$$\left|\mu(t)u^{[1]}(t,k)-\varphi(k)\right| \le \left(\int_0^{T_0} \frac{R}{\mu(\tau)}d\tau\right)e^{-\gamma k}\le Be^{-\gamma k}.$$

Предположив теперь справедливость оценки $\left|\mu(t)u^{[j]}(t,k)-\varphi(k)\right|\le Be^{-\gamma k}$ с некоторым номером $j\ge 1$ для всех t: $0\le t\le T_0$ получим на основании теоремы 4 оценку для следующего приближения с номером $j+1$:

$$\left|\mu(t)u^{[j+1]}(t,k)-\varphi(k)\right| \le \left(\int_0^{T_0} \frac{R}{\mu(\tau)}d\tau\right)e^{-\gamma k}\le Be^{-\gamma k}. \tag{3.8}$$

По индукции заключаем теперь, что при любом t: $0 \le t \le T_0$ все последовательные приближения $u^{[j]}(t,k)$ заведомо определены и каждое из них принадлежит классу $\mathbb{D}(T_0, B, \gamma, \varphi)$.

4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Исследуем сходимость построенных в предыдущем разделе последовательных приближений в предположении, что функция $a(t)$ в исходном уравнении неотрицательна. Тогда функция

$$\mu(t) = \exp\left\{\int_0^t a(\tau)d\tau\right\}$$

монотонно возрастает при $t \ge 0$ и ограничена здесь снизу:

$$\mu(t) \ge \mu(0) = 1 \quad \text{при} \quad t \ge 0.$$

Теорема 5. *Пусть момент времени T_0 выбран из определяющего соотношения* (3.7). *Тогда последовательные приближения $u^{[N]}(t,k)$ сходятся равномерно в полуполосе $0 \le t \le T_0$, $0 \le k < +\infty$ к непрерывной функции $u(t,k)$. Предельная функция $u(t,k)$ принадлежит классу $\mathbb{D}(T_0, B, \gamma, \varphi)$ и при этом имеют место оценки*

$$\mu(t)\sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}\left|u(t,k) - u^{[N]}(t,k)\right| \le B\sum_{j=N}^{+\infty}\frac{(Lt)^j}{j!}, \quad N = 0,1,2,\dots. \tag{4.1}$$

Здесь $L = 4BM$.

Доказательство. Прежде всего докажем индукцией по номеру итерации i справедливость следующей серии оценок:

$$\mu(t)\sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}\left|u^{[i+1]}(t,k) - u^{[i]}(t,k)\right| \le B\frac{(Lt)^i}{i!}, \quad i = 0,1,\dots. \tag{4.2}$$

Из (3.8) имеем

$$\mu(t)\left|u^{[1]}(t,k) - u^{[0]}(t,k)\right| \le Be^{-\gamma k}$$

и, следовательно,

$$\mu(t)\sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}\left|u^{[1]}(t,k) - u^{[0]}(t,k)\right| \le B,$$

т.е. при $i = 0$ (4.2) выполнено. Далее, предполагая, что

$$\mu(t)\sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}\left|u^{[i]}(t,k) - u^{[i-1]}(t,k)\right| \le B\frac{(Lt)^{i-1}}{(i-1)!}, \tag{4.3}$$

оценим сверху величину

$$\mu(t)\sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}\left|u^{[i+1]}(t,k) - u^{[i]}(t,k)\right|.$$

Пользуясь определением последовательных приближений, получаем

$$\mu(t)[u^{[i+1]}(t,k) - u^{[i]}(t,k)] = \int_0^t \mu(\tau)(W[u^{[i]}](\tau,k) - W[u^{[i-1]}](\tau,k))d\tau.$$

Домножая обе части последнего равенства на $e^{\gamma k}$ и оценивая результат по модулю, приходим к оценке

$$\mu(t)e^{\gamma k}\left|u^{[i+1]}(t,k) - u^{[i]}(t,k)\right| \le \int_0^t \mu(\tau)e^{\gamma k}\left|W[u^{[i]}](\tau,k) - W[u^{[i-1]}](\tau,k)\right|d\tau.$$

Для оценки модуля разности под интегралом в правой части воспользуемся неравенством (2.4) в применении к паре функций $u^{[i]}(t,k)$ и $u^{[i-1]}(t,k)$ из класса $\mathbb{D}(T_0, B, \gamma, \varphi)$. Тогда получим

$$\mu(t)e^{\gamma k}\left|u^{[i+1]}(t,k) - u^{[i]}(t,k)\right| \le L\int_0^t \frac{1}{\mu(\tau)}\mu(\tau)\sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}\left|u^{[i]}(\tau,k) - u^{[i-1]}(\tau,k)\right|d\tau.$$

Продолжим это неравенство, пользуясь при $0 \le t \le T_0$ сначала предположением индукции (4.3):

$$\mu(t)e^{\gamma k}\left|u^{[i+1]}(t,k) - u^{[i]}(t,k)\right| \le L\int_0^t \frac{1}{\mu(\tau)} B\frac{(L\tau)^{i-1}}{(i-1)!}d\tau,$$

а затем условием, что $\mu(t) \ge \mu(0) = 1$. В итоге получим

$$\mu(t)e^{\gamma k}\left|u^{[i+1]}(t,k) - u^{[i]}(t,k)\right| \le B\frac{(Lt)^i}{i!}.$$

Таким образом, обоснование серии оценок (4.2) полностью завершено.

Учитывая соотношения (4.2), имеем

$$\mu(t)e^{\gamma k}\sum_{i=0}^{\infty}\left|u^{[i+1]}(t,k) - u^{[i]}(t,k)\right| \le B\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(Lt)^i}{i!} = Be^{Lt}.$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}(u^{[i]}(t,k) - u^{[i-1]}(t,k)),$$

в котором $u^{[-1]}(t,k) \equiv 0$, сходится абсолютно и равномерно на множестве $0 \le t \le T_0$, $0 \le k < +\infty$ к некоторой непрерывной функции $u(t,k)$.

Частичная сумма

$$\sum_{i=0}^{N}(u^{[i]}(t,k) - u^{[i-1]}(t,k))$$

рассматриваемого ряда совпадает с последовательным приближением $u^{[N]}(t,k)$ и при этом в силу неравенств (4.2) справедливы оценки (4.1).

Отклонение предельной функции $u(t,k)$ от начального приближения можно грубо оценить, взяв $N = 0$ в (4.1). При этом получим

$$\sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}|\mu(t)u(t,k) - \varphi(k)| \le B\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(Lt)^j}{j!} = Be^{Lt}.$$

Отклонение предельной функции $u(t,k)$ от $\varphi(k)$ можно также оценить с помощью неравенства треугольника:

$$\left|\mu(t)u(t,k) - \varphi(k)\right| \le \mu(t)\left|u(t,k) - u^{[N]}(t,k)\right| + \left|\mu(t)u^{[N]}(t,k) - \varphi(k)\right|. \tag{4.4}$$

Последовательное приближение $u^{[N]}(t,k)$, как уже установлено, принадлежит классу $\mathbb{D}(T_0, B, \gamma, \varphi)$, т.е. справедлива оценка

$$\left|\mu(t)u^{[N]}(t,k) - \varphi(k)\right| \le Be^{-\gamma k}, \quad 0 \le t \le T_0.$$

Подставляя ее, а также неравенства (4.1) в (4.4), получаем

$$e^{\gamma k}|\mu(t)u(t,k) - \varphi(k)| \le B\sum_{j=N}^{+\infty}\frac{(Lt)^j}{j!} + B, \quad 0 \le t \le T_0.$$

Переходя здесь к пределу при $N \to \infty$, заключаем, что функция $u(t,k)$ также принадлежит классу $\mathbb{D}(T_0, B, \gamma, \varphi)$. Теорема 5 доказана.

Таким образом, параметр T_0, задаваемый равенством (3.7), представляет собой длину отрезка по времени, на котором предел $u(t,k)$ последовательных приближений заведомо существует и непрерывен.

Теорема 6. *Непрерывный предел $u(t,k)$ последовательных приближений имеет при* $0 \le t \le T_0$, $k \ge 0$ *первую непрерывную производную по переменной t и задает на рассматриваемой полуполосе решение задачи* (1.3). *Функция $u(t,k)$ удовлетворяет к тому же следующим оценкам*:

$$\sup_{0\le t\le T_0, k\ge 0} e^{\gamma k}|u(t,k)| \le \sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}|\varphi(k)| + B, \quad \sup_{0\le t\le T_0}|u(t,k)| \le (B+C)e^{-\gamma k}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Применив к функциям $u(t,k)$ и $u^{[N]}(t,k)$ из класса $D(T_0, B, \gamma, \varphi)$ сначала оценку (2.4), а затем условие, что $\mu(t) \ge \mu(0) = 1$ при $0 \le t \le T_0$, и в заключение воспользовавшись оценкой (4.1), получим

$$e^{\gamma k}\mu(t)|W[u](t,k) - W[u^{[N]}](t,k)| \le L\sup_{k\ge 0} e^{\gamma k}|u(t,k) - u^{[N]}(t,k)| \le BL\sum_{j=N}^{+\infty}\frac{(Lt)^j}{j!}. \tag{4.6}$$

Переходя в (4.6) к пределу при $N \to \infty$, заключаем, что при всех $k \ge 0$ последовательность $W[u^{[N]}](t,k)$ непрерывных по t функций равномерно по t из отрезка $[0, T_0]$ сходится к непрерывной же по времени функции $W[u](t,k)$. Следовательно, для $0 \le t \le T_0$ справедливы равенства

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^t \mu(\tau)W[u^{[N]}](\tau,k)d\tau = \int_0^t \mu(\tau)\lim_{N\to\infty} W[u^{[N]}](\tau,k)d\tau = \int_0^t \mu(\tau)W[u](\tau,k)d\tau.$$

Воспользуемся ими и перейдем к пределу при $N \to \infty$ в определении последовательных приближений, т.е. в равенстве

$$\mu(t)u^{[N]}(t,k) = \varphi(k) + \int_0^t \mu(\tau)W[u^{[N-1]}](\tau,k)dk_1dk_2d\tau.$$

В итоге получим следующее интегральное уравнение:

$$\mu(t)u(t,k) = \varphi(k) + \int_0^t \mu(\tau)W[u](\tau,k)dk_1dk_2d\tau.$$

Из этого предельного равенства сразу следует, что функция $u(t,k)$ имеет непрерывную первую производную по времени и является при этом решением исходного интегродифференциального уравнения. Теорема 6 доказана.

Отметим, что числовой параметр B в оценках (4.5) строго положителен, а в остальном произволен. Переход к пределу при $B \to 0$ в этих оценках бесполезен: длина T_0, определяющая интервал существования по времени решения задачи, при $B \to 0$ также стремится к нулю.

Собирая вместе теорему 5 и теорему 6, получаем теорему 1, сформулированную в разд. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мирабель А.П.* Квазимарковское приближение в теории турбулентности // Математическая физика. Энциклопедия / Под ред. Л.Д. Фаддева. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. С. 241–242.
2. *Galtier S.* Wave turbulence in astrophysics // Advances in Wave Turbulence. 2013. V. 83. P. 73–111.
3. *Galtier S., Buchlin E.* Nonlinear diffusion equations for anisotropic magnetohydrodynamic turbulence with cross-helicity // The Astrophysical J. 2010. V. 722. P. 1977–1983.
4. *Nazarenko S.* Wave Turbulence // Lecture Notes in Physics, No. 825. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.
5. *Reid W.T.* Riccati Differential Equations. N.Y., London: Academic Press, 1972.
6. *Годунов С.К.* Нормы решений матричных уравнений Лурье–Риккати как критерии качества стабилизируемости и детектируемости // Труды Ин-та математики СО РАН. Новосибирск. 1992. Т. 22. С. 3–21.
7. *Васкевич В.Л., Щербаков А.И.* Сходимость последовательных приближений в задаче Коши для интегродифференциального уравнения с квадратичной нелинейностью // Матем. труды. 2018. Т. 21. № 2. С. 136–149.