ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 5, с. 828–836

УДК 517.927.6

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2020 г. К. Р. Айда-заде

AZ1141 Баку, ул. Вахабзаде, 9, Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Азербайджан

e-mail: kamil_aydazade@rambler.ru

Поступила в редакцию 14.06.2019 г.
Переработанный вариант 14.06.2019 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Исследуется численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными нелинейными условиями, зависящими от значений искомых функций в промежуточных точках. Приводятся условия существования решения задачи. Для численного решения предложен подход, приводящий решение рассматриваемой задачи к решению двух вспомогательных линейных систем дифференциальных уравнений с линейными условиями и одной нелинейной алгебраической системе размерности, зависящей только от числа точек, значения искомой функции в которых участвуют в заданных в задаче условиях. Предложенный подход проиллюстрирован на двух задачах, в одной из которых вспомогательные задачи решаются аналитически, в другой – с использованием численных методов. Библ. 16. Табл. 1.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, нелокальные нелинейные условия, фундаментальная матрица решений, формула Коши, алгебраическое уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466920030035

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется решение системы линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Заданные к ней условия характеризуются следующими особенностями: 1) нелинейностью, 2) зависимостью от значений искомой функции в различных заданных промежуточных точках.

Исследования систем линейных дифференциальных уравнений с различными видами дополнительных линейных условий (двухточечными, многоточечными, интегральными) были начаты в начале XX века в работах [1]–[3], а различные аспекты этих исследований продолжены в работах [4]–[8]. А.А. Абрамовым [4] для численного решения линейных двухточечных краевых задач был предложен метод прогонки краевых условий, которой был развит многими исследователями на другие виды и случаи линейных краевых условий. В дальнейшем эти методы нашли широкое применение в решении начально-краевых задач относительно различных типов дифференциальных уравнений с частными производными [9].

В данной работе дополнительные условия к системе линейных обыкновенных неавтономных дифференциальных уравнений определяются нелинейными функциями от значений искомой функции в точках отрезка, в котором задана система уравнений. Такие условия в литературе принято называть неразделенными многоточечными условиями.

Подобные и более сложные задачи в качестве вспомогательных возникают при решении многих практических проблем, в частности, в задачах оптимального управления, в которых краевые условия определяются из решения оптимизационных задач [10]. К рассматриваемым задачам приводит так же использование линеаризации исходных нелинейных дифференциальных уравнений с нелинейными нелокальными условиями.

Для решения нелинейных краевых задач общего вида в [11] были предложены методы линеаризации (квазилинеаризации), применение которых приводит к итерационным методам последовательных приближений.

В работе предлагается подход к решению рассматриваемого класса задач, основанный на использовании параметрического представления их решения. В этом представлении участвуют решения двух вспомогательных линейных задач относительно исходной системы дифференциальных уравнений. Параметрами являются значения нелинейной функции. После решения вспомогательных задач, используя представление решения исходной задачи, получается система нелинейных алгебраических уравнений только относительно значений искомого решения в заданных промежуточных точках. Далее любое из решений алгебраической системы можно использовать в качестве начальных условий в задаче Коши относительно исходной системы линейных дифференциальных уравнений.

В статье предлагаемый подход проиллюстрирован на примере решения двух задач: одна решена аналитически, другая — с применением численных расчетов.

Важно отметить, что предложенный подход к численному решению линейных систем дифференциальных уравнений с нелинейными нелокальными условиями хорошо распараллеливается на алгоритмическом уровне.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ АНАЛИЗ

Рассматривается система линейных дифференциальных неавтономных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t), \quad t \in [\underline{t}, \overline{t}], \tag{1.1}$$

решение которой должно удовлетворять в общем случае нелинейным условиям вида

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i x(t_i) + E_{n,m} \cdot G(x(t_1), \ldots, x(t_l)) = \gamma. \tag{1.2}$$

Здесь $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция; заданными являются следующие: $A(t)$ — матричная функция размера $n \times n$; $B(t)$ есть n-мерная вектор-функция; α_i, $i = 1, \ldots, l$, есть n-мерные квадратные матрицы; $t_1, \ldots, t_l$ — точки из отрезка $[\underline{t}, \overline{t}]$, $E_{n,m}$ — матрица размера $n \times m$, $m \le n$, с нулевыми элементами $e_{ij} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $i \ne j$, кроме $e_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, m$; $G(\overline{x})$ есть m-мерная вектор-функция в общем случае от $n \times l$ аргументов $\overline{x} \in R^{nl}$:

$$\overline{x} = \left(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^l\right), \quad \overline{x}^i = (x_1(t_i), \ldots, x_n(t_i)), \quad i = 1, \ldots, l;$$

γ — заданный n-мерный числовой вектор.

Для простоты, не умаляя общности, будем считать, что имеет место

$$t_i < t_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, l-1, \quad \underline{t} = t_1, \quad \overline{t} = t_l.$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$A(t) \ne \text{const}, \quad t \in [t_1, t_l], \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{rang} A(t) = n, \quad t \in [t_1, t_l], \\ \operatorname{rang}[\alpha^1, \ldots, \alpha^l] = n, \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\operatorname{rang}\left[\alpha^1 + \frac{\partial G(\overline{x})}{\partial \overline{x}^1}, \ldots, \alpha^l + \frac{\partial G(\overline{x})}{\partial \overline{x}^l}\right] = n, \quad \overline{x} \in R^{nl}. \tag{1.5}$$

Замечание 1. Условие (1.4) не принципиально, так как в случае его невыполнения за счет изменения значений элементов матриц α^i, $i = 1, \ldots, l$, одновременно с учетом этих изменений у компонент нелинейной вектор-функции $\overline{G}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_l)$ можно добиться выполнения условия (1.4).

Этот случай будет продемонстрирован на приводимых в конце статьи иллюстративных задачах. Важным условием, от которого зависит существование решения задачи (1.1), (1.2), является условие (1.5), проверка выполнимости которого в реальных задачах, как правило, представляет большую сложность или невозможна в принципе.

Условие (1.3) для неавтономности системы дифференциальных уравнений (1.1) в рамках данной статьи важно. Для автономной системы (1.1) с использованием ее фундаментальной матрицы решений, построение которой требует лишь одноразового решения матричной $n \times n$ задачи Коши, задача приводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. Построение же фундаментальной матрицы решений для линейных неавтономных систем дифференциальных уравнений в общем случае требует больших объемов вычислительной работы и оперативной памяти компьютера.

Рассматриваемая задача заключается в нахождении n-мерной вектор-функции $x(t)$, являющейся решением системы n дифференциальных уравнений (1.1) и удовлетворяющей в общем случае n нелинейным многоточечным (нелокальным) условиям (1.2).

Пусть $\Phi(t,\tau)$ есть фундаментальная матрица решений системы (1.1), т.е. для $\tau \in [\underline{t}, \overline{t}]$ имеем

$$\dot{\Phi}_t(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau), \quad t \in [\tau, \overline{t}], \tag{1.6}$$

$$\Phi(\tau,\tau) = E_{n,n}. \tag{1.7}$$

Здесь $E_{n,n}$ есть n-мерная квадратная единичная матрица. Тогда решение системы (1.1) представляется формулой Коши:

$$x(t) = \Phi(t,t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)d\tau, \tag{1.8}$$

где $z = x(t_1) \in R^n$ – неизвестный вектор состояния в момент времени t_1, который должен удовлетворять условию (1.2).

Учитывая, что из (1.8) следует

$$\overline{x}_i = \Phi(t_i,t_1)z + \int_{t_1}^{t_i} \Phi(t_i,\tau)B(\tau)d\tau, \tag{1.9}$$

из условий (1.2) получим систему n нелинейных уравнений относительно n-мерного вектора z:

$$\begin{gathered}\left[\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\Phi(t_i,t)\right]z + G\left(z, \Phi(t_2,t_1)z + \int_{t_1}^{t_2}\Phi(t,\tau)B(\tau)d\tau, \ldots, \Phi(t_l,t_1)z + \int_{t_1}^{t_l}\Phi(t,\tau)B(\tau)d\tau\right) = \\ = \gamma - \sum_{i=2}^{l}\alpha_i\int_{t_1}^{t_i}\Phi(t,\tau)B(\tau)d\tau.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Конструктивных общих условий существования и единственности решения для систем нелинейных алгебраических уравнений не имеется. Известные теоремы о необходимых условиях существования решения имеют локальный характер. Основным в этих условиях является требование всюду равенства n ранга матрицы Якоби нелинейной системы. Якобиан системы условий (1.2) с учетом (1.10) имеет вид

$$\frac{\partial G(\overline{x})}{\partial Z} = \sum_{j=1}^{l}\left[\alpha_i + \frac{\partial G(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}\right]\Phi(t_j,t_1).$$

Вычисление ранга этой матрицы для всех z практически невозможно, так как, во-первых, матрица $\dfrac{\partial G(\overline{x})}{\partial \overline{x}^j}$ зависит от текущей точки z, во-вторых, определение фундаментальной матрицы решений, в общем случае, возможно, как правило, лишь численными методами, которые требуют большого объема вычислений и памяти компьютера.

Отметим, что решение задачи (1.1), (1.2) существенно упрощается для автономных систем (1.1), т.е. когда $A(t) = \mathrm{const}$. В этом случае для фундаментальной матрицы имеет место

$$\Phi(t,\tau) = \Phi(t,t_1), \quad t,\tau \in [t_1,t_l],$$

а для ее нахождения достаточно один раз решить задачу Коши (1.6), (1.7) относительно матричной функции $\Phi(t,t_1)$. Далее, подставляя формулу (1.9) в условия (1.2), получаем нелинейную систему n уравнений относительно z, для решения которой необходимо использовать численные методы.

Представляют интерес встречающиеся на практике задачи, у которых в условиях (1.2) нелинейно участвует лишь малая часть значений аргументов искомой вектор-функции в промежуточных точках или же некоторые из компонент аргументов вектор-функции, т.е. $m \ll n$. В этом случае в предлагаемом в статье подходе соответственно уменьшаются размеры вспомогательных задач, а система нелинейных алгебраических уравнений решается относительно лишь этих значений искомой функции или их компонент. При применении же подхода с использованием фундаментальной матрицы решений такая специфика задачи не сказывается на требуемом объеме вычислений.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.1), (1.2)

Рассмотрим две вспомогательные линейные задачи относительно системы дифференциальных уравнений (1.1) с условиями

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i x(t_i) = \gamma \tag{2.1}$$

и параметрическими условиями

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i x(t_i) + E_{n,m} \cdot \lambda = \gamma, \tag{2.2}$$

где $\lambda \in R^m$ – произвольный вектор параметров. Остальные обозначения в (2.1), (2.2) те же, что и для задачи (1.1), (1.2).

Относительно решения задачи (1.1), (2.1) имеет место следующая

Теорема 1. *Для существования и единственности решения задачи* (1.1), (2.1) *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\operatorname{rang}\left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \Phi(t_i, t_1)\right) = n.$$

Доказательство теоремы следует из формулы Коши (1.8) и частного случая системы (1.10) при отсутствии нелинейного слагаемого.

Теорема 2. *Для произвольного вектора $\lambda \in R^m$ решение задачи* (1.1), (2.2) *представимо в виде*

$$x(t) = y^0(t) + y^1(t)\lambda, \tag{2.3}$$

где $y^0(t)$ – n-мерная вектор-функция есть решение задачи

$$\dot{y}^0(t) = A(t)y^0(t) + B(t), \quad t \in [t_1, t_l], \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i y^0(t_i) = \gamma, \tag{2.5}$$

$y^1(t)$ – матричная функция размера $n \times m$ есть решение задачи

$$\dot{y}^1(t) = A(t)y^1(t), \quad t \in [t_1, t_l], \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i y^1(t_i) = -E_{n,m}. \tag{2.7}$$

Представление решения задачи в виде (2.3) при выполнении условия (1.4) единственно.

Доказательство. Продифференцируем обе части формулы (2.3) и подставим в (1.1). После группировки будем иметь

$$\left[\dot{y}^0(t) - A(t)y^0(t) - B(t)\right] + \left[\dot{y}^1(t) - A(t)y^1(t)\right]\lambda = 0, \quad t \in [t_1, t_l]. \tag{2.8}$$

Учитывая необходимость выполнения (2.8) для произвольно заданных векторов $\lambda \in R^m$, потребуем равенства нулю выражений в квадратных скобках. Отсюда следует необходимость удовлетворения $y^0(t)$ и $y^1(t)$ соответственно уравнениям (2.4), (2.6).

Теперь, подставляя представление решения (2.3) в условия (2.2), после группировки получим

$$\left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i y^0(t_i) - \gamma\right] + \left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i y^1(t_i) + E_{n,m}\right]\lambda = 0. \quad (2.9)$$

Учитывая необходимость выполнения (2.9) при произвольно заданных $\lambda \in R^m$, необходимо, чтобы выражения в квадратных скобках были равны нулю, а следовательно, выполнены уравнения (2.5), (2.7).

Для доказательства единственности представления решения задачи (1.1), (2.2) в виде (2.3) предположим существование другого, отличного от (2.3), представления

$$\tilde{x}(t) = \tilde{y}^0(t) + \tilde{y}^1(t)\lambda,$$

где $\tilde{y}^0(t)$ и $\tilde{y}^1(t)$ являются решениями задач

$$\dot{\tilde{y}}^0(t) = A(t)\tilde{y}^0(t) + B(t), \quad t \in [t_1, t_l],$$

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \tilde{y}^0(t_i) = \gamma,$$

$$\dot{\tilde{y}}^1(t) = A(t)\tilde{y}^1(t), \quad t \in [t_1, t_l],$$

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \tilde{y}^1(t_i) = -E_{n,m}.$$

Подставляя в систему дифференциальных уравнений (1.1) и условия (2.2) разность решений

$$\Delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t) = \Delta y^0(t) - \Delta y^1(t)\lambda,$$

$$\Delta y^0(t) = y^0(t) - \tilde{y}^0(t),$$

$$\Delta y^1(t) = y^1(t) - \tilde{y}^1(t),$$

получаем, что $\Delta y^0(t)$ и $\Delta y^1(t)$ должны быть решениями, соответственно, следующих однородных задач:

$$\dot{y}^0(t) = A(t)\Delta y^0(t), \quad \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \Delta y^0(t_i) = 0,$$

$$\dot{y}^1(t) = A(t)\Delta y^1(t), \quad \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \Delta y^1(t_i) = 0.$$

Как известно, в силу однородности и условия (1.4) они имеют единственное тривиальное решение: $\Delta y^0(t) = 0,\ \Delta y^1(t) = 0$.

Вернемся теперь к решению задачи (1.1), (1.2). Приняв в качестве вектора параметров λ в (2.3) вектор-функцию $G(\overline{x})$, для решения задачи (1.1), (1.2) используем представление

$$x(t) = y^0(t) + y^1(t)G(\overline{x}), \quad (2.10)$$

где $y^0(t)$, $y^1(t)$ являются решениями линейных задач (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7). Из (2.10) следует, что

$$x(t_i) = y^0(t_i) + y^1(t_i)G(x(t_1), \ldots, x(t_l)), \quad i = 1, \ldots, l. \quad (2.11)$$

Соотношения (2.11) представляют собой систему $n \times l$ нелинейных алгебраических уравнений относительно значений в промежуточных точках искомого решения системы (1.1) или их компонент, участвующих в условиях (1.2). После ее решения, определив $x(t_1)$, несложно определяется решение $x(t)$ системы (1.1) из решения задачи Коши.

Тогда очевидно, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *При условиях, наложенных на данные задачи* (1.1), (1.2), *существование и единственность ее решения полностью определяются существованием и единственностью решения нелинейной системы* (2.11).

Важно учесть следующие специфические особенности предлагаемого подхода.

Замечание 2. Построение фундаментальной матрицы решения с целью ее использования для решения рассматриваемой задачи требует решения n-мерной квадратной матричной системы дифференциальных уравнений. В предлагаемом подходе суммарная общая размерность вспомогательных систем дифференциальных уравнений (2.4), (2.6) равна $(n+1)\times m$, причем, как правило, имеет место $m < n$.

Замечание 3. Систему (2.11) следует формировать относительно не полностью всех n-мерных векторов $x(t_i), i = 1,\ldots,l$, а только из тех их компонент, которые участвуют в качестве аргументов в m-мерной вектор-функции $G(x(t_1),\ldots,x(t_l))$.

Для решения линейных систем дифференциальных уравнений (2.4), (2.6) с линейными неразделенными условиями, соответственно, (2.5) и (2.7) можно использовать известные методы прогонки (переноса) условий [4], [5], [9], [10].

Замечание 4. В частном случае, когда в условии (1.2) все матрицы α_i, $i = 1,\ldots,l$, кроме одной, являются нулевыми, то вспомогательные задачи (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7) являются задачами Коши. Этот же случай можно получить, если все матрицы α_i, $i = 1,\ldots,l$, нулевые. Для этого достаточно в условии (1.2) ввести слагаемое, например, $E_{n,n}x(t_1)$, соответственно при этом необходимо изменить нелинейную часть слагаемых (как это указывалось в замечании 1).

Для решения нелинейной алгебраической системы $n\times l$ уравнений (2.11) можно использовать известные численные методы [12], [13] и имеющиеся пакеты прикладных программ Matlab, Mathcad и другие. При этом надо учесть, что, как правило, нелинейные вектор-функции, участвующие в условиях (1.2), имеют сравнительно простой вид и достаточно гладки. Это позволяет легко их дифференцировать с целью дальнейшего использования численных методов высокого порядка сходимости и точности [14]–[16].

Учитывая, что для нелинейных алгебраических систем нет конструктивных условий для единственности их решений, то при численных расчетах с применением итерационных методов следует использовать различные начальные приближения для многократного проведения итерационных процедур.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Рассмотрим решение линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = 8tx(t) - 8t, \quad t \in [-1;1], \tag{3.1}$$

со следующим нелинейным условием:

$$x^2(1) + 2x^2(0) - x^2(-1) = 8. \tag{3.2}$$

Здесь $n = 1$, $l = 3$, $m = 1$, $A(t) = 8t$, $B(t) = -8t$, $\gamma = 8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, можно проверить, что $x(t) = e^{4t^2} + 1$ – есть одно из точных решений задачи (3.1), (3.2).

Учитывая, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, поступим согласно замечанию 4, а именно, условие (3.2) запишем в виде

$$x(-1) + G(\bar{x}) = 8, \quad \bar{x} = (x^1, x^2, x^3), \quad x^1 = x(-1), \quad x^2 = x(0), \quad x^3 = x(1), \tag{3.3}$$

а нелинейную функцию в условии (3.3) в виде

$$G(\bar{x}) = x^2(1) + 2x^2(0) - x^2(-1) - x(-1).$$

Тогда вспомогательные задачи (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7) будут следующими задачами Коши:

$$\dot{y}^0(t) = 8ty^0(t) - 8t, \quad y^0(-1) = 8,$$

$$\dot{y}^1(t) = 8ty^1(t), \quad y^1(-1) = -1.$$

Их решениями являются функции:

$$y^0(t) = 7e^{4t^2-4} + 1, \quad y^1(t) = -e^{4t^2-4}.$$

Решение задачи (3.1), (3.3) согласно формуле (2.10) имеет вид

$$x(t) = 7e^{4t^2-4} + 1 - e^{4t^2-4}\left[x^2(1) + 2x^2(0) - x^2(-1) - x(-1)\right].$$

Отсюда при $t = -1; 0; 1$ получим алгебраическую систему следующих уравнений относительно $x(-1)$, $x(0)$, $x(1)$:

$$x(-1) = 8 - \left[x^2(1) + 2x^2(0) - x^2(-1) - x(-1)\right],$$
$$x(0) = 7e^{-4} + 1 - e^{-4}\left[x^2(1) + 2x^2(0) - x^2(-1) - x(-1)\right],$$
$$x(1) = 8 - \left[x^2(1) + 2x^2(0) - x^2(-1) - x(-1)\right].$$

Из первого и третьего уравнений следует, что

$$x(-1) = x(1),$$

а из первого и второго уравнений имеем

$$x(-1) = e^4 x(0) - e^4 + 1.$$

Подставляя во второе уравнение, будем иметь

$$x^2(0) = 4, \quad x(0) = \pm 2.$$

Вообще говоря, далее $x(-1)$, $x(1)$ можно не определять, достаточно решить две задачи Коши относительно уравнения (3.1) с двумя различными начальными условиями

$$x(0) = -2 \quad \text{и} \quad x(0) = 2,$$

и получить два решения задачи (3.1), (3.2):

$$x(t) = e^{4t^2} + 1 \quad \text{и} \quad x(t) = -3e^{4t^2} + 1,$$

которые, как легко проверить, удовлетворяют условиям задачи (3.1), (3.3).

Задача 2. Рассмотрим решение следующей системы линейных уравнений:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) - e^{-t^2} x_2(t) + e^t, \quad t \in [-1;1], \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) + 2tx_2(t) - t^2\left(te^t + 1\right) \tag{3.4}$$

при условиях

$$x_2^2(-1) + x_2^2(0) - x_2^2(1) = 1 - e^2, \quad x_1(-1) = 1 - e^{-1}. \tag{3.5}$$

Здесь $n = 2, m = 1, l = 3$. Одним из ее точных решений являются функции

$$x_1(t) = te^t + 1, \ \ x_2(t) = e^{t^2}. \tag{3.6}$$

Матрица $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет ранг, равный 1. Изменим первое условие в задаче

$$x_2(-1) + g(\bar{x}) = 1 - e^2,$$

где $g(\bar{x}) = x_2^2(-1) + x_2^2(0) - 2x_2^2(1) - x_2(-1)$. Тогда изменится матрица

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и ее ранг будет равен $n = 2$.

Вспомогательные задачи (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7) имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{y}_1^0(t) = y_1^0(t) - e^{-t^2} y_2^0(t) + e^t, \quad y_1^0(-1) = 1 - e^{-1}, \\ \dot{y}_2^0(t) = t^2 y_1^0(t) + 2ty_2^0(t) - t^2\left(te^t + 1\right), \quad y_2^0(-1) = 1 - e^2, \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} \dot{y}_1^1(t) = y_1^1(t) - e^{-t^2} y_2^1(t), \quad y_1^1(-1) = 0, \\ \dot{y}_2^1(t) = t^2 y_1^1(t) + 2ty_2^1(t), \quad y_2^1(-1) = -1. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Заметим, что аргументами нелинейной функции в условии являются только значения второй искомой функции $x_2(t)$ в точках $t = -1; 0; 1$. Поэтому систему алгебраических уравнений (2.11) составим только для этих значений компонент искомой вектор функции $x(t)$:

$$x_2(-1) = y_2^0(-1) + y_2^1(-1)\left[x_2^2(-1) + x_2^2(0) - 2x_2^2(1) - x_2(-1)\right],$$
$$x_2(0) = y_2^0(0) + y_2^1(0)\left[x_2^2(-1) + x_2^2(0) - 2x_2^2(1) - x_2(-1)\right],$$
$$x_2(1) = y_2^0(1) + y_2^1(1)\left[x_2^2(-1) + x_2^2(0) - 2x_2^2(1) - x_2(-1)\right].$$

Учитывая начальные условия для $y^0(t)$, $y^1(t)$, система относительно $x_2(-1)$, $x_2(0)$, $x_2(1)$ примет вид

$$\begin{gathered} x(-1) = 1 - e^2 - \left[x_2^2(-1) + x_2^2(0) - 2x_2^2(1) - x_2(-1)\right], \\ x(0) = y_2^0(0) + y_2^1(0)\left[x_2^2(-1) + x_2^2(0) - 2x_2^2(1) - x_2(-1)\right], \\ x(1) = y_2^0(1) + y_2^1(1)\left[x_2^2(-1) + x_2^2(0) - 2x_2^2(1) - x_2(-1)\right]. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Умножим сначала первое уравнение на $y_2^1(0)$ и сложим со вторым уравнением, потом первое уравнение умножим на $y_2^1(1)$ и сложим с третьим уравнением, получим

$$x_2(0) = -y_2^1(0)\,x_2(-1) + y_2^0(0) + y_2^1(0)\left(1 - e^2\right),$$
$$x_2(1) = -y_2^1(1)\,x_2(-1) + y_2^0(1) + y_2^1(1)\left(1 - e^2\right).$$

Поставляя эти выражения в первое уравнение (3.6), получаем квадратное уравнение относительно $x_2(-1)$:

$$\begin{gathered} A_0 x_2^2(-1) + A_1 x_2(-1) + A_2 = 0, \quad A_0 = -1 - \left(y_2^1(0)\right)^2 + 2\left(y_2^1(1)\right)^2, \\ A_1 = 2y_2^1(0)\,y_2^0(0) + 2\left(y_2^1(0)\right)^2\left(1 - e^2\right) - 4y_2^1(1)\,y_2^0(1) - 4\left(y_2^1(1)\right)^2\left(1 - e^2\right), \\ A_2 = 1 - e^2 - \left(y_2^0(0)\right)^2 - 2y_2^0(0)\,y_2^1(0)\left(1 - e^2\right) - \left(y_2^1(0)\right)^2\left(1 - e^2\right)^2 + 2\left(y_2^0(1)\right)^2 + \\ + 4y_2^0(1)\,y_2^1(1)\left(1 - e^2\right) + 2\left(y_2^1(1)\right)^2\left(1 - e^2\right)^2. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Используя метод Рунге–Кутты четвертого порядка, из задач Коши (3.7), (3.8) были найдены значения

$$y_2^0(0) = -2.1092, \quad y_2^0(1) = 23.3558,$$
$$y_2^1(0) = -0.34138, \quad y_2^1(1) = -0.11344.$$

Тогда получим два решения кадратного уравнения (3.10):

$$x_2(-1) = 2.7165, \quad x_2(-1) = -1.7594. \tag{3.11}$$

Значения $x_2(0)$, $x_2(1)$ уже можно не определять. Дополняя ко второму условию из (3.5) два различных условия из (3.11), решаем две задачи Коши относительно системы (3.4) с двумя возможными начальными условиями:

$$x^1(-1) = \left(1 - e^{-1};\ 2.7165\right), \quad x^2(-1) = \left(1 - e^{-1};\ -1.7594\right).$$

В табл. 1 приведены результаты решения двух задач Коши с этими начальными условиями, в этой же табл. 1 приведены значения $x^*(t)$ – известного решения (3.6) рассматриваемой задачи.

Отметим, что проведенные преобразования над системой (3.9) были не обязательны, ее можно было бы решать непосредственно с применением численных методов. Но в этом случае могло бы определиться лишь одно из полученных решений. Это зависило бы от использованного начального приближения в итерационном процессе решения нелинейной системы (3.6).

Таблица 1. Полученные и точное решения задачи 1

t	–1.0	–0.8	–0.6	–0.4	–0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_1^0	0.632	1.380	2.304	3.439	4.838	6.577	8.744	11.429	14.713	18.665	23.356
y_2^0	–6.389	–4.409	–3.234	–2.552	–2.207	–2.109	–2.176	–2.279	–2.153	–1.232	1.684
y_1^1	0.000	0.081	0.179	0.297	0.439	0.612	0.823	1.080	1.386	1.744	2.156
y_2^1	–1.000	–0.692	–0.512	–0.409	–0.357	–0.341	–0.353	–0.379	–0.394	–0.344	–0.113
x_1^*	0.632	0.641	0.671	0.732	0.836	1.000	1.2442	1.597	2.093	2.780	3.718
x_2^*	2.718	1.896	1.433	1.174	1.041	1.000	1.0408	1.174	1.433	1.896	2.718
x_1^1	0.632	0.641	0.671	0.732	0.8370	1.001	1.246	1.599	2.096	2.7836	3.722
x_2^1	2.717	1.895	1.432	1.173	1.0400	0.999	1.040	1.173	1.432	1.8953	2.717
x_1^2	0.632	1.004	1.474	2.063	2.804	3.742	4.931	6.431	8.298	10.590	13.373
x_2^2	–1.759	–1.204	–0.861	–0.658	–0.556	–0.529	–0.541	–0.524	–0.330	0.358	2.209

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен подход к решению систем линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными нелокальными условиями, содержащих значения искомой функции в промежуточных точках.

Приведены условия существования и единственности решения задачи. Для решения задачи предложен специальный вид представления, в котором участвуют векторная и матричная функции, являющиеся решениями вспомогательных линейных дифференциальных уравнений с линейными ограничениями. С использованием этого представления строится система нелинейных алгебраических уравнений относительно значений искомой функции в заданных точках.

Предложенный подход проиллюстрирован на решении двух тестовых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nicoletti O.* Sulle condizioni inizali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie. Atti R., Torino 1897. V. 33. P. 746–748.
2. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
3. *Valle Poussin Ch.J.* Sur l'equation differentielle lineare du second order determinition d'une integrale par deux valeurx assignes. Extension aux equation d'orde n // J. Math. Pure et Appl. 1929. № 9. P. 125–144.
4. *Абрамов А.А., Бураго Н.Г. и др.* Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач // Сообщение по программному обеспечению ЭВМ. М. В. АН СССР, 1982.
5. *Moszynski K.* A method of solving the boundary value problem for a system of linear ordinary differential equation // Alqoritmy, Varshava. 1964. V. 11. № 9. P. 11–25.
6. *Кигурадзе И.Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новые достижения. 1987. Т. 30.
7. *Самойленко А.М., Лаптинский В.М., Кенжебаев К.К.* Конструктивные методы исследования периодических многоточечных краевых задач. Киев, 1999.
8. *Джумабаев Д.С.* Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Матем. журнал. Алматы. 2005. Т. 5. № 1 (15). С. 30–38.
9. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.
10. *Антипин А.С.* Терминальное управление краевыми моделями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 2. С. 257–285.
11. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 186 с.
12. *Ortega J.M., Reinboldt W.C.* Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic press, 2000.
13. *Dai P.-F., Wu Q-B., Chen M.-H.* Modified Newton-NSS method for solving systems of nonlinear equations // Numerical algorithms. 2018. V. 77. № 1. P. 1–21.
14. *Martinez J.M.* Practical Quasi-Newton Methods for Solving Nonlinear Systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. V. 124 (1–2). P. 97–121.
15. *Young W.W., Ni Q.* A new cubic convergent method for solving a system of nonlinear equations // International Journal of Computer Mathematics. 2017. V. 94. № 10. P. 1960–1980.
16. *Евтушенко Ю.Г., Третьяков А.А.* Методы p-го порядка для решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН. 2014. Т. 455. № 5.