

УДК 532.61.096

ДВУМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ¹⁾

© 2020 г. В. К. Андреев^{1,*}, Е. Н. Лемешкова^{1,**}

¹ 660036 Красноярск, Академгородок 50/44, Институт вычислительного моделирования СО РАН, Россия

² 660036 Красноярск, Свободный 79, Сибирский федеральный университет, Россия

*e-mail: andr@icm.krasn.ru

**e-mail: elena_cher@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 25.03.2019 г.
Переработанный вариант 29.07.2019 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Изучается задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся жидкостей в плоском канале с твердыми стенками, на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. На общей поверхности раздела учитывается изменение межфазной энергии. Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Возникающая сопряженная краевая задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль канала. Применение к ней тау-метода показывает, что она имеет два различных решения. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Для каждого из решений построены поля скоростей и температур в слоях. Библ. 14. Фиг. 3.

Ключевые слова: поверхность раздела, термокапиллярность, обратная задача, тау-метод.

DOI: 10.31857/S0044466920050038

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании, вообще говоря, нестационарного движения жидких сред с поверхностью раздела Γ в неоднородном поле температур разность потоков тепла на ней, в общем случае, не равна нулю [1], [2]

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = \alpha \theta \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u} + \omega(\theta, \mathbf{u} \cdot \nabla_{\Gamma} \theta), \quad (1.1)$$

где $\alpha = -\partial \sigma / \partial \theta$, $\omega = \partial(\sigma(\theta) + \alpha(\theta)) / \partial \theta$, $\sigma(\theta)$ — коэффициент поверхностного натяжения. В равенстве (1.1) k_j , θ_j — коэффициенты теплопроводностей и температуры жидкостей, $j = 1, 2$; $\theta = \theta_1 = \theta_2$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ — общие значения температур и векторов скоростей на поверхности раздела Γ , \mathbf{n} — нормаль к Γ , направленная во вторую жидкость. Условие (1.1) можно назвать энергетическим условием на поверхности раздела двух жидкостей Γ [3]. Оно означает, что скачок теплового потока в направлении нормали к Γ компенсируется изменением внутренней энергии этой поверхности. В свою очередь, это изменение связано как с изменением температуры, так и площади границы раздела.

Для многих жидких сред зависимость $\sigma(\theta)$ хорошо аппроксимируется линейной функцией

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 - \alpha(\theta - \theta_0) \quad (1.2)$$

с положительными постоянными σ_0 , α , θ_0 . В этом случае энергетическое равенство (1.1) упрощается

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = \alpha \theta \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{u}. \quad (1.3)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 17-01-00229).

Порядок отношения правой части равенства (1.3) к первому члену левой ее части оценивается параметром $E = \alpha\theta^*/\mu_2k_2$ (для второго надо положить μ_1k_1, μ_j – динамические вязкости), определяющим влияние межфазной энергии на динамику движения жидкостей внутри слоев; θ^* – характерная температура на границе раздела. Эти параметры для обычных жидкостей при комнатной температуре малы [2], [4], [5]. Так, в экспериментах в системе воздух – этиловый спирт при $\theta^* = 15^\circ\text{C}$ имеем $E \sim 5 \times 10^{-4}$. Поэтому часто правую часть в (1.1) опускают и говорят о равенствах потока тепла через границу раздела. Однако для маловязких жидкостей эти слагаемые надо учитывать. Расчеты [5], проведенные для движения пузырьков в различных жидкостях, показали, что значение $E = O(1)$ достигается при достаточно высоких температурах – вязкость быстро уменьшается с ростом температуры. Кроме того, этот факт имеет место и для некоторых криогенных жидкостей, например для жидкого CO_2 . Максимальные значения E достигаются вблизи критических точек. Так, для воды $E \sim 0.02$ при $\theta = 303.15 \text{ K}$; $E \sim 0.6$ при $\theta = 573.15 \text{ K}$; $E \sim 0.7$ при $\theta = 623.15 \text{ K}$ (критическая точка для воды $\theta_{\text{кр}} = 647.30 \text{ K}$).

В книге [2] на простых примерах двухслойных систем, когда основное состояние либо покой, либо однонаправленное стационарное течение, показано влияние теплоты, поглощаемой или выделяющейся при локальных изменениях площади межфазной поверхности, на формирование напряжений Марангони и слаболинейных волновых режимов на границе раздела жидкостей, вязкость которых достаточно мала. В [6] изучено влияние изменения межфазной поверхностной энергии на характер и тип неустойчивостей основного однонаправленного течения, когда для возмущений использовано условие (1.3). Показано, что существенное отличие от классического случая (правая часть в (1.3) равна нулю) в поведении возмущений наблюдается в области коротких волн. Именно, в задаче с полным условием кризис течения вызывается тепловой колебательной модой и сопровождается формированием поперечных бегущих волн, которые распространяются в противоположном основному течению направлении. В задаче с классическим условием неустойчивость проявляется в виде поперечных стоячих волн. Учет дополнительного слагаемого в энергетическом условии позволил получить результат, качественно совпадающий с экспериментальными данными для системы FC-72 – азот.

В упомянутых выше задачах основное стационарное двухслойное течение не зависело от изменения межфазной энергии. В настоящей работе исследуется такая зависимость для двумерного двухслойного стационарного течения с полем скоростей типа Хименца.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоское двухслойное стационарное течение вязких теплопроводных жидкостей в слоях, ограниченных твердыми стенками $y = 0, y = h$ с общей поверхностью раздела $y = l < h$ в отсутствие массовых сил.

Межфазная поверхность предполагается плоской, для этого достаточно потребовать, чтобы капиллярное число $\text{Ca} = \mu_j\chi_l/\sigma_0l \ll 1$ (см. [7]), χ – коэффициент температуропроводности. Поле скоростей и температур системы уравнений вязкой теплопроводной жидкости в слоях будем искать в виде

$$u_j^1(x, y) = w_j(y)x, u_j^2(x, y) = v_j(y), \quad \theta_j(x, y) = a_j(y)x^2 + b_j(y), \quad (2.1)$$

причем $0 < y < l$ при $j = 1, l < y < h$ при $j = 2$ и $\text{div}_\Gamma \mathbf{u} = w_1(l)$. Такое представление поля скоростей соответствует известному решению Хименца [8]. Подстановка (2.1) в уравнения движения и переноса тепла и их анализ на совместность приводят к следующим следствиям: функции $w_j(y), v_j(y), a_j(y)$ и $b_j(y)$ есть решения нелинейных систем уравнений

$$\begin{aligned} v_j w_{jy} + w_j^2 &= v_j w_{jyy} + f_j, & w_j + v_{jy} &= 0, \\ 2w_j a_j + v_j a_{jy} &= \chi_j a_{jyy}, & v_j b_{jy} &= \chi_j b_{jyy} + 2\chi_j a_j, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где v_j – кинематические вязкости, $\rho_j = \mu_j/v_j$ – плотности, f_j – постоянные. Давления в жидкостях распределены по законам

$$\frac{1}{\rho_j} p_j(x, y) = v_j v_{jy} - \frac{v_j^2}{2} - f_j \frac{x^2}{2} + d_{0j}, \quad d_{0j} = \text{const}, \quad (2.3)$$

так, что значения f_j характеризуют градиенты давлений вдоль оси x .

Будем считать, что на твердой стенке $y = 0$ (подложке) задано распределение температуры $\theta_1(x, 0) = a_{10}x^2 + b_{10}$ с постоянными a_{10}, b_{10} . При $a_{10} > 0$ температура имеет в точке $x = 0$ минимальное значение, а при $a_{10} < 0$ – максимальное. Верхняя стенка теплоизолирована: $\theta_{2y}(x, h) = 0$. Таким образом, на твердых стенках для искомых функций заданы условия

$$\begin{aligned} w_1(0) = v_1(0) = 0, \quad a_1(0) = a_{10}, \quad b_1(0) = b_{10}, \\ w_2(h) = v_2(h) = 0, \quad a_{2y}(h) = b_{2y}(h) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

На границе раздела $y = l$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} w_1(l) = w_2(l), \quad v_1(l) = v_2(l) = 0, \quad a_1(l) = a_2(l), \quad b_1(l) = b_2(l), \\ \mu_2 w_{2yy}(l) - \mu_1 w_{1yy}(l) = -2\alpha a_1(l), \quad k_2 a_{2y}(l) - k_1 a_{1y}(l) = \alpha a_1(l) w_1(l), \\ k_2 b_{2y}(l) - k_1 b_{1y}(l) = \alpha b_1(l) w_1(l). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Первые четыре условия в (2.5) есть следствия непрерывности поля скоростей и температур на границе раздела, а пятое – динамическое условие. Последние два условия получены с учетом зависимости коэффициента поверхностного натяжения (1.2) и соотношения (1.3).

Замечание 1. Поставленная задача является обратной, поскольку наряду с функциями w_j, v_j, a_j, b_j постоянные f_j (градиенты давлений вдоль слоев) также неизвестны. Сами давления по известным v_j и f_j определяются по формулам (2.3).

Исключим вертикальные скорости $v_j(y)$ из уравнений неразрывности с учетом условий прилипания на стенках (2.4)

$$v_1(y) = -\int_0^y w_1(z) dz, \quad 0 \leq y \leq l; \quad v_2(y) = -\int_h^y w_2(z) dz, \quad l \leq y \leq h. \quad (2.6)$$

Тогда основной будет следующая обратная сопряженная краевая задача:

$$\begin{aligned} v_1 w_{1yy} = w_1^2 - f_1 - w_{1y} \int_0^y w_1(z) dz, \quad \chi_1 a_{1yy} = 2a_1 w_1 - a_{1y} \int_0^y w_1(z) dz, \\ \chi_1 b_{1yy} = -2\chi_1 a_1 - b_{1y} \int_0^y w_1(z) dz, \quad 0 < y < l, \\ v_2 w_{2yy} = w_2^2 - f_2 - w_{2y} \int_h^y w_2(z) dz, \quad \chi_2 a_{2yy} = 2a_2 w_2 - a_{2y} \int_h^y w_2(z) dz, \\ \chi_2 b_{2yy} = -2\chi_2 a_2 - b_{2y} \int_h^y w_2(z) dz, \quad l < y < h. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Граничные условия для нее следуют из (2.4), (2.5) и представлений (2.6)

$$\begin{aligned} w_1(0) = 0, \quad w_2(h) = 0, \quad a_1(0) = a_{10}, \quad a_{2y}(h) = 0, \quad b_1(0) = b_{10}, \quad b_{2y}(h) = 0, \\ \int_0^l w_1(z) dz = 0, \quad \int_l^h w_2(z) dz = 0, \quad \mu_2 w_{2y}(l) - \mu_1 w_{1y}(l) = -2\alpha a_1(l), \quad w_1(l) = w_2(l), \\ a_1(l) = a_2(l), \quad k_2 a_{2y}(l) - k_1 a_{1y}(l) = \alpha a_1(l) w_1(l), \quad b_1(l) = b_2(l), \quad k_2 b_{2y}(l) - k_1 b_{1y}(l) = \alpha b_1(l) w_1(l). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Задача для функций $b_j(y)$ отделяется и они находятся после решения задачи для функций $w_j(y), a_j(y)$ и не влияют на поле скоростей в слоях.

Введем безразмерные функции и параметры

$$\begin{aligned} W_j(\xi) = \frac{l^2}{M\chi_1} w_j(y), \quad A_j(\xi) = \frac{a_j(y)}{a_{10}}, \quad B_j(\xi) = \frac{b_j(y)}{a_{10}l^2}, \quad F_j = \frac{l^4}{M\chi_1^2} f_j, \\ \xi = \frac{y}{h}, \quad P_j = \frac{v_j}{\chi_j}, \quad M = \frac{\alpha a_{10} l^3}{\chi_1 \mu_2}, \quad E = \frac{\alpha^2 a_{10} l^2}{\mu_2 k_2}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где P_j – числа Прандтля, M – число Марангони, $\theta^* = |a_{10}|l^2$ – характерная температура вдоль поверхности раздела, так что M , E могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Тогда в безразмерных переменных нелинейная сопряженная краевая задача примет вид

$$\begin{aligned} \gamma^2 P_1 W_{1\xi\xi} &= M \left[W_1^2 - W_{1\xi} \int_0^\xi W_1(z) dz \right] - F_1, & A_{1\xi\xi} &= \frac{M}{\gamma^2} \left[2A_1 W_1 - A_{1\xi} \int_0^\xi W_1(z) dz \right], \\ \gamma^2 B_{1\xi\xi} &= -2A_1 - MB_{1\xi} \int_0^\xi W_1(z) dz, & 0 < \xi < \gamma, \\ \frac{\gamma^2 P_2}{\chi} W_{2\xi\xi} &= M \left[W_2^2 - W_{2\xi} \int_1^\xi W_2(z) dz \right] - F_2, & A_{2\xi\xi} &= \frac{\chi M}{\gamma^2} \left[2A_2 W_2 - A_{2\xi} \int_1^\xi W_2(z) dz \right], \\ \gamma^2 B_{2\xi\xi} &= -2A_2 - \chi MB_{2\xi} \int_1^\xi W_2(z) dz, & \gamma < \xi < 1, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} W_1(0) = 0, \quad W_2(1) = 0, \quad A_1(0) = 1, \quad A_{2\xi}(1) = 0, \quad B_1(0) = B_{10}, \quad B_{2\xi}(1) = 0, \\ W_1(\gamma) = W_2(\gamma), \quad W_{2\xi}(\gamma) - \mu W_{1\xi}(\gamma) = -2\gamma^{-1} A_1(\gamma), \quad A_1(\gamma) = A_2(\gamma), \\ A_{2\xi}(\gamma) - k A_{1\xi}(\gamma) = \gamma^{-1} E A_1(\gamma) W_1(\gamma), \quad B_1(\gamma) = B_2(\gamma), \quad B_{2\xi}(\gamma) - k B_{1\xi}(\gamma) = \gamma^{-1} E B_1(\gamma) W_1(\gamma), \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\gamma = l/h < 1$, $\mu = \mu_1/\mu_2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$, $k = k_1/k_2$. К граничным условиям (2.11) необходимо добавить интегральные условия переопределения

$$\int_0^\gamma W_1(z) dz = 0, \quad \int_\gamma^1 W_2(z) dz = 0, \tag{2.12}$$

которые позволяют найти неизвестные постоянные (градиенты давлений вдоль слоев) F_j , $j = 1, 2$.

3. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ – ПОЛЗУЩИЕ ТЕЧЕНИЯ

Известно, что при малых числах Рейнольдса уравнения импульса и энергии упрощаются за счет отбрасывания конвективного ускорения. Такие движения принято называть ползущими. Ползущие течения имеют место во многих конструктивных элементах машин, механизмов, оборудования и приборов, если поперечные размеры каналов или скорости течения малы или вязкость протекающей жидкости велика. В нашем случае роль числа Рейнольдса играет число Марангони, которое может быть является малым как за счет физических параметров жидкости, так и толщины канала [9], [10].

Поэтому предположим что $|M| \ll 1$ и ищем решение задачи (2.10)–(2.12) в виде $W_j = W_j^0 + MW_j^1 + \dots$, $F_j = F_j^0 + MF_j^1 + \dots$, $A_j = A_j^0 + MA_j^1 + \dots$, тогда решение для нулевого приближения имеет вид [11]

$$\begin{aligned} W_1^0(\xi) &= -\frac{F_1^0}{6\gamma^2 P_1} (3\xi^2 - 2\gamma\xi), & A_1^0(\xi) &= 1 + C_1\xi, \\ B_1^0(\xi) &= -\frac{1}{\gamma^2} (\xi^2 + C_1\xi^3) + d_1\xi + B_{10}, & 0 \leq \xi \leq \gamma, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} W_2^0(\xi) &= -\frac{\chi F_2^0}{6\gamma^2 P_2} (3\xi^2 + 2\delta(\xi - 1) - 3), & A_2^0(\xi) &= 1 + \gamma C_1 \equiv C_2, \\ B_2^0(\xi) &= -\frac{C_2}{\gamma^2} (\xi^2 - 2\xi) + d_2, & \gamma \leq \xi \leq 1, \end{aligned} \tag{3.2}$$

причем

$$F_1^0 = -6P_1C_2\delta_1, \quad F_2^0 = \frac{\gamma^2 F_1^0}{v(1-\gamma)^2},$$

$$\delta = \frac{\gamma^2 + \gamma - 2}{1-\gamma}, \quad \delta_1 = \frac{1-\gamma}{2(\gamma + \mu(1-\gamma))}, \quad d_2 = -\frac{2C_2}{\gamma} + d_1\gamma + B_{10},$$

$$d_1 = \frac{E\delta_1 C_2^2 - C_2(EB_{10}\delta_1 + 2(\gamma-1)) + k(2 + 3C_1\gamma)}{\gamma(EC_2\delta_1 + k)}$$
(3.3)

и C_2 есть решение квадратного уравнения

$$E\delta_1 C_2^2 + k(C_2 - 1) = 0$$
(3.4)

с дискриминантом

$$D = 1 + \frac{2\gamma^2(1-\gamma)E}{k[\gamma + \mu(1-\gamma)]}.$$

Значит, при

$$E > -\frac{k[\gamma + \mu(1-\gamma)]}{2\gamma^2(1-\gamma)} = E^*$$

имеется два решения (для $a_{10} > 0$ это всегда так), при $E = E^*$ — одно, а при $E < E^*$ решений нет. Последние два случая реализуются только для $a_{10} < 0$, когда температура на нижней стенке имеет максимум в точке $x = 0$. Выражения для безразмерных вертикальных скоростей определяются по формуле (2.6) и будут иметь вид

$$V_1^0(\xi) = \frac{F_2^0}{6\gamma^2 P_1} (\xi^3 - \gamma\xi^2), \quad 0 \leq \xi \leq \gamma,$$

$$V_2^0(\xi) = \frac{\chi F_2^0}{6\gamma^2 P_2} (\xi^3 + \delta(\xi^2 - 1) - (2\delta + 3)(\xi - 1) - 1), \quad \gamma \leq \xi \leq 1.$$
(3.5)

Замечание 2. Простые вычисления показывают, что при $E = 0$ единственное решение задачи (1.10)–(1.16), при малых числах Марангони, таково

$$W_1^0(\xi) = \frac{\delta_1}{6\gamma^2} (3\xi^2 - 2\gamma\xi), \quad A_1^0(\xi) = 1, \quad F_1^0 = -6P_1\delta_1,$$

$$B_1^0(\xi) = -\frac{1}{\gamma^2}\xi^2 + \frac{2(k + \gamma - 1)}{\gamma k}\xi + B_{10}, \quad 0 \leq \xi \leq \gamma,$$

$$W_2^0(\xi) = \frac{\delta_1}{(1-\gamma)^2} (3\xi^2 + 2\delta(\xi - 1) - 3), \quad A_2^0(\xi) = 1, \quad F_2^0 = \frac{\gamma^2 F_1^0}{v(1-\gamma)^2},$$

$$B_2^0(\xi) = -\frac{1}{\gamma^2}(\xi^2 - 2\xi) + \frac{2(\gamma-1)(k + \gamma)}{k\gamma} + B_{10}, \quad \gamma \leq \xi \leq 1,$$
(3.6)

и оно существенно отличается от решения (3.1)–(3.4).

4. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для решения общей нелинейной задачи (2.10)–(2.12) применяется тау-метод, являющийся модификацией метода Галеркина [12]. Произведем замену переменных: $\xi' = \xi/\gamma$ для $j = 1$ и $\xi' = (1 - \xi)/(1 - \gamma)$ для $j = 2$. Тогда задача (2.10)–(2.12) переписется в виде (штрихи опущены)

$$L_1(W_1, F_1) \equiv P_1 W_{1\xi\xi} - M \left[W_1^2 - W_{1\xi} \int_0^\xi W_1(z) dz \right] + F_1 = 0,$$

$$N_1(W_1, A_1) \equiv A_{1\xi\xi} - M \left[2A_1W_1 - A_{1\xi} \int_0^\xi W_1(z)dz \right] = 0, \tag{4.1}$$

$$K_1(W_1, A_1, B_1) \equiv B_{1\xi\xi} + 2A_1 + MB_{1\xi} \int_0^\xi W_1(z)dz = 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

$$L_2(W_2, F_2) \equiv \frac{\gamma^2 P_2}{\chi(1-\gamma)^2} W_{2\xi\xi} - M \left[W_2^2 - W_{2\xi} \int_0^\xi W_2(z)dz \right] + F_2 = 0,$$

$$N_2(W_2, A_2) \equiv \frac{\gamma^2}{\chi(1-\gamma)^2} A_{2\xi\xi} - M \left[2A_2W_2 - A_{2\xi} \int_0^\xi W_2(z)dz \right] = 0, \tag{4.2}$$

$$K_2(W_2, A_2, B_2) \equiv \frac{\gamma^2}{\chi(1-\gamma)^2} B_{2\xi\xi} + 2A_2 + M\chi B_{2\xi} \int_0^\xi W_2(z)dz = 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

$$W_1(0) = 0, \quad W_2(0) = 0, \quad A_1(0) = 1, \quad A_{2\xi}(0) = 0, \quad B_1(0) = B_{10}, \quad B_{2\xi}(0) = 0,$$

$$W_1(1) = W_2(1), \quad \frac{\gamma}{1-\gamma} W_{2\xi}(1) + \mu W_{1\xi}(1) = 2A_1(1),$$

$$A_1(1) = A_2(1), \quad \frac{\gamma}{1-\gamma} A_{2\xi}(1) + kA_{1\xi}(1) = -EA_1(1)W_1(1), \tag{4.3}$$

$$B_1(1) = B_2(1), \quad \frac{\gamma}{1-\gamma} B_{2\xi}(1) + kB_{1\xi}(1) = -EB_1(1)W_1(1),$$

$$\int_0^1 W_1(z)dz = 0, \quad \int_0^1 W_2(z)dz = 0. \tag{4.4}$$

Приближенное решение задачи(4.1)–(4.4) ищется в виде сумм:

$$W_{jn}(\xi) = \sum_{k=1}^n W_j^k R_k(\xi), \quad A_{jn}(\xi) = \sum_{k=0}^n A_j^k R_k(\xi), \quad B_{jn}(\xi) = \sum_{k=0}^n B_j^k R_k(\xi), \tag{4.5}$$

где $R_k(z) = P_k(2z - 1)$ – смещенные полиномы Лежандра [13], $z \in [0, 1]$, $P_k(z)$ – обычные полиномы Лежандра. Из интегральных условий (4.4), учитывая ортогональность полиномов $R_k(z)$ на отрезке $[0, 1]$

$$\int_0^1 R_k(z)R_m(z)dz = \delta_{km}h_m, \quad h_m = \frac{1}{2m+1}, \quad \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

получаем $W_1^0 = W_2^0 = 0$. Остальные коэффициенты W_j^k, A_j^k, B_j^k и постоянные F_{1n}, F_{2n} находятся из системы галеркинских приближений

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_j(W_{jn}, F_j)R_m(\xi)d\xi &= 0, & \int_0^1 N_j(W_{jn}, A_{jn})R_m(\xi)d\xi &= 0, \\ \int_0^1 K_j(W_{jn}, A_{jn})R_m(\xi)d\xi &= 0, & m = 0, \dots, n-2, & \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

и преобразованных граничных условий (4.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^k W_1^k &= 0, & \sum_{k=1}^n (-1)^k W_2^k &= 0, & \sum_{k=1}^n W_1^k &= \sum_{k=1}^n W_2^k, \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k A_1^k &= 1, & \sum_{k=0}^n A_2^k R_k'(0) &= 0, & \sum_{k=0}^n A_1^k &= \sum_{k=0}^n A_2^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (-1)^k B_1^k &= B_{10}, \quad \sum_{k=0}^n B_2^k R_k'(0) = 0, \quad \sum_{k=0}^n B_1^k = \sum_{k=0}^n B_2^k, \\
\frac{\gamma}{1-\gamma} \sum_{k=1}^n W_2^k R_k'(1) + \mu \sum_{k=1}^n W_1^k R_k'(1) &= 2 \sum_{k=0}^n A_1^k, \\
\frac{\gamma}{1-\gamma} \sum_{k=0}^n A_2^k R_k'(1) + k \sum_{k=0}^n A_1^k R_k'(1) &= -E \sum_{k=0}^n A_1^k \sum_{k=1}^n W_1^k, \\
\frac{\gamma}{1-\gamma} \sum_{k=0}^n B_2^k R_k'(1) + k \sum_{k=0}^n B_1^k R_k'(1) &= -E \sum_{k=0}^n B_1^k \sum_{k=1}^n W_1^k.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

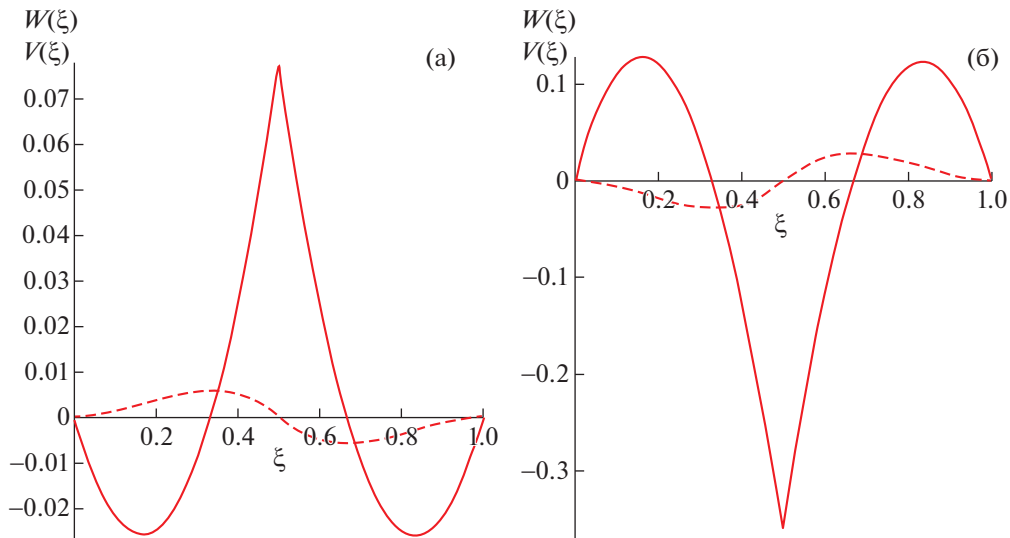
В частности, неизвестные постоянные F_{1n} , F_{2n} определяются по известным W_{jn} и A_{jn} , из уравнений $\int_0^1 L_j(W_{jn}, F_{jn}) R_0(\xi) d\xi = 0$, $j = 1, 2$. При выводе системы (4.7) было учтено, что $R_k(1) = 1$, $R_k(0) = (-1)^k$. Таким образом, уравнения (4.6), (4.7) образуют замкнутую систему алгебраических нелинейных уравнений на коэффициенты W_j^k , A_j^k и постоянные F_{jn} , $j = 1, 2$.

Для решения нелинейной системы уравнений (4.6), (4.7) применялся метод Ньютона. В качестве нулевых приближений для неизвестных коэффициентов W_j^k , A_j^k , B_j^k и постоянных F_{1n} , F_{2n} взяты значения, удовлетворяющие условиям (4.7) и равенствам

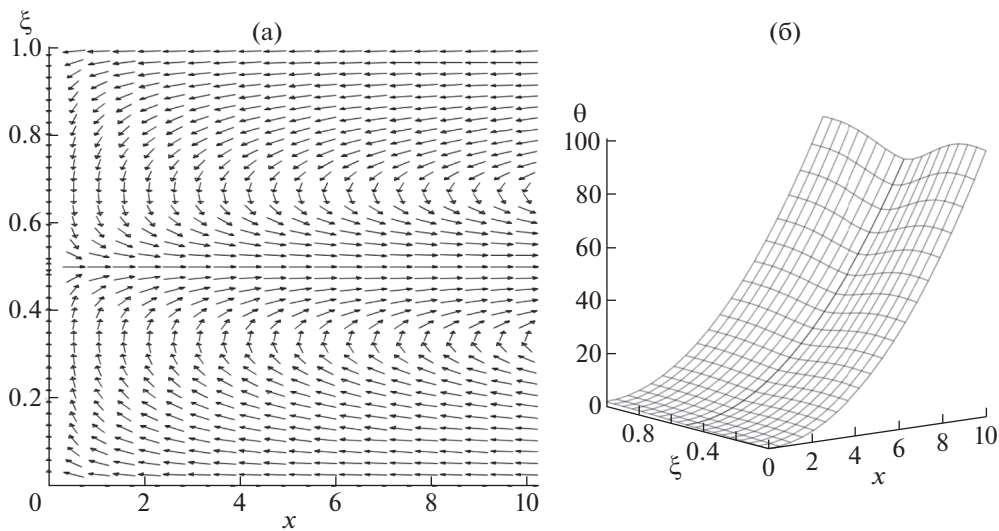
$$\begin{aligned}
2A_{1n}(1)W_{1n}(1) - \mu \int_0^1 W_{1n}'^2 d\xi - \frac{\gamma}{1-\gamma} \int_0^1 W_{2n}'^2 d\xi - \frac{3M}{2P_1} \left(\mu \int_0^1 W_{1n}^3 d\xi + \frac{\nu(1-\gamma)}{\gamma} \int_0^1 W_{2n}^3 d\xi \right) &= 0, \\
-EA_{1n}(1)W_{1n}(1) - kA_{1n}'(0) - 3M \left(k \int_0^1 A_{1n} W_{1n} d\xi + \frac{\chi(1-\gamma)}{\gamma} \int_0^1 A_{2n} W_{2n} d\xi \right) &= 0, \\
F_{1n} = 2M \int_0^1 W_{1n}'^2 d\xi - P_1(W_{1n}'(1) - W_{1n}'(0)), \quad F_{2n} = 2M \int_0^1 W_{2n}'^2 d\xi - \frac{\gamma^2 P_2}{\chi(1-\gamma)} (W_{2n}'(1) - W_{2n}'(0)), & \tag{4.8} \\
-EA_{1n}(1)W_{1n}(1) - kA_{1n}'(0) + 2 \left(k \int_0^1 A_{1n} d\xi + \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \int_0^1 A_{2n} d\xi \right) - & \\
-M \left(k \int_0^1 B_{1n} W_{1n} d\xi + \frac{\chi(1-\gamma)}{\gamma} \int_0^1 B_{2n} W_{2n} d\xi \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Интегральные равенства (4.8) следуют из уравнений (4.1), (4.2), учитывая граничные условия (4.3) и вид решений (4.5).

Расчеты проводились для следующих значений определяющих параметров, соответствующих системе вода ($j = 1$) – водяной пар ($j = 2$) на линии насыщения при температуре 300°C [14]: $E = 0.6$, $M = 11.5$, $h = 1 \times 10^{-6}$ м, $l = 0.5 \times 10^{-6}$ м и $n = 15$ (далее нижний индекс n будет опущен). Было получено два различных значения безразмерных постоянных F_1 , F_2 : $\{F_1^1 = -0.434, F_2^1 = -1.506\}$, $\{F_1^2 = 2.446, F_2^2 = 7.366\}$ (верхний индекс означает номер решения). При этом разность значений, полученных при $n = 15$ и $n = 16$, составляет порядка 10^{-15} и 10^{-10} для F^1 и F^2 соответственно, что говорит о хорошей сходимости τ – метода при решении данной краевой задачи. На фиг. 1 приведены профили безразмерных функций $W_j(\xi)$ и поперечных скоростей $V_j(\xi)$ для значений F^1 и F^2 соответственно. Здесь и далее функции $W(\xi)$ и $V(\xi)$ совпадают с функциями $W_j(\xi)$ и $V_j(\xi)$, $j = 1, 2$ соответственно на своих областях определения. Стоит также отметить, что с уменьшением числа Марангони найденные значения F_1^1 , F_2^1 и F_1^2 , F_2^2 стремятся к параметрам модельной



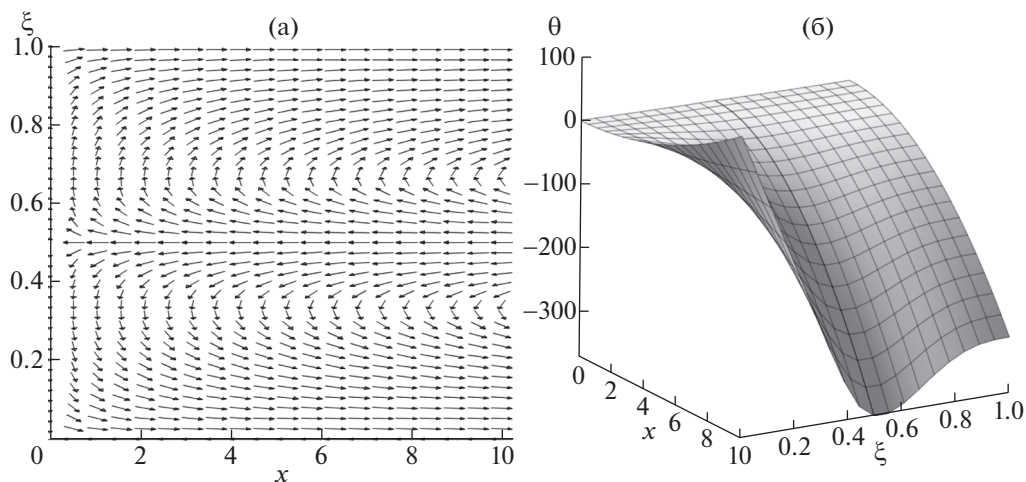
Фиг. 1. Профили безразмерной функции $W(\xi)$ (---) и поперечной скорости $V(\xi)$ (—) для F^1 (а) и F^2 (б).



Фиг. 2. Поле скоростей (а) и температур (б) в слоях для F^1 .

задачи $F_1^{01} = -0.515$, $F_2^{01} = -1.743$ и $F_1^{02} = 72.615$, $F_2^{02} = 245.712$ соответственно (см. (3.3)). Так, при $M = 0.001$ получим $|F_j^{01} - F_j^1| \approx 10^{-15}$ и $|F_j^{02} - F_j^2| \approx 10^{-10}$, $j = 1, 2$.

На фиг. 2, 3 изображены поля скоростей и температур в слоях для F^1 и F^2 соответственно. В обоих случаях возникают зоны возвратного течения: в первом случае – вблизи поверхности раздела (фиг. 2), а во втором – вблизи твердых стенок (фиг. 3). Помимо градиента поверхностного натяжения, имеется еще один механизм движения, возникающий при нагреве нижней стенки – градиент давления в слоях. Вычисления показывают, что градиент давления в первом слое по модулю существенно превосходит градиент поверхностного натяжения и действует в противоположном направлении. Поэтому в обоих случаях течение вблизи поверхности раздела направлено в сторону роста температуры, то есть в сторону, противоположную направлению действия термокапиллярных сил.



Фиг. 3. Поле скоростей (а) и температур (б) в слоях для F^2 .

Для случая, когда отсутствует влияние изменения внутренней межфазной энергии ($E = 0$) имеется одно решение $F_1 = -0.438$, $F_2 = -1.518$. Это решение с уменьшением числа Марангони стремится к единственному решению модельной задачи (3.6) $F_1^0 = -0.519$, $F_2^0 = -1.756$, и при $M = 0.001$ получим $|F_j^0 - F_j| \approx 10^{-15}$, $j = 1, 2$.

Стоит также сказать о влиянии безразмерных параметров на возникающие течения: с ростом безразмерных параметров M и E значения безразмерной функции $W(\xi)$ и поперечной скорости $V(\xi)$ уменьшаются. С увеличением толщины второго слоя (уменьшение γ) безразмерный градиент давления во второй жидкости убывает по модулю, а в первой практически не изменяется. Так, при $E = 0$, $\gamma = 0.2$ (толщина второго слоя в 4 раза больше первого) $F_1 = -0.431$, $F_2 = -0.081$. На интенсивность течений безразмерный параметр γ не влияет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andreev V.K. et al.* Mathematical Models of Convection. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH and CO KG, 2012.
2. *Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А.* Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000.
3. *Пухначёв В.В.* Движение вязкой жидкости со свободными границами. Новосибирск: НГУ, 1989.
4. *Harper J.F.* The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27. P. 361–366.
5. *Torres F.E.* Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles // *Phys. Fluids A.* 1993. V. 5. № 3. P. 537–549.
6. *Bekezhanova V.B., Kabov O.A.* Influence of internal variations of the interface on the stability of film flow // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer.* 2016. 4(2–3). P. 133–156.
7. *Зейтунян Р.Х.* Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара–Марангони // *Успехи физ. наук.* 1998. Т. 168. № 3. С. 259–286.
8. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyllinder // *Dinglers Polytech. J.* 1911. V. 326. P. 321–440.
9. *Антановский Л.К., Копбосынов Б.К.* Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // *Прикл. матем. и техн. физ.* 1986. № 2. С. 59–64.
10. *Адмаев О.В., Андреев В.К.* Нестационарное движение пузырька под действием термокапиллярных сил // *Сб. Математическое моделирование в механике.* Красноярск: ВЦК СО РАН. 1997. Деп. ВИНТИ. С. 4–9.
11. *Андреев В.К.* Свойства решений сопряженной нелинейной краевой задачи, описывающей стационарное течение двух жидкостей в канале // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2018. Материалы научной конференции.* 9–13 апреля 2018 г. СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2018. 288 с.
12. *Fletcher C.A.J.* Computational Galerkin method. Berlin: Springer-Verlag. 1984.
13. *Szego, Gabor.* Orthogonal polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 23. Revised ed. American Mathematical Society. Providence. R.I. 1959. 421 p.
14. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.