ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 5, с. 837–840

УДК 519.65

О НУЛЯХ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ II РОДА

© 2020 г. С. М. Багирова[1,*], А. Х. Ханмамедов[2,3,**]

[1] AZ 2000 Гянджа, ул. Ататюрка, 450, Азербайджанский государственный аграрный университет, Азербайджан

[2] AZ 1141 Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, Ин-т матем. и механ. НАН Азербайджана, Азербайджан

[3] AZ 1007 Баку, ул. Дж. Гаджибекли, 71, Университет “Азербайджан”, Азербайджан

*e-mail: bagirovasevindj@rambler.ru

**e-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

Поступила в редакцию 30.09.2019 г.
Переработанный вариант 19.12.2019 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Исследуются нули модифицированной функции Бесселя II рода (функции Макдональда) $K_\nu(z)$, рассматриваемой как функция от индекса ν. Доказано, что при фиксированном $z, z > 0$, функция $K_\nu(z)$имеет счетное число простых чисто мнимых нулей ν_n. Найдена асимптотика нулей ν_n при $n \to +\infty$. Библ. 15.

Ключевые слова: функции Бесселя, нули функций Бесселя, уравнение Шрёдингера, собственные значения.

DOI: 10.31857/S004446692005004X

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В работе [1] Г. Пойа показал, что при каждом фиксированном $z > 0$ косинус преобразование функции $k(t) = e^{-z\operatorname{ch} t}$ имеет только действительные нули. Этот пример интересен также тем, что упомянутое косинус преобразование суть (см. [2]–[5]) модифицированная функция Бесселя II рода (функция Макдональда), т.е.

$$K_{i\lambda}(z) = \int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch} t}\cos\lambda t dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad \lambda \in C, \tag{1}$$

где $K_\nu(z)$ является решением модифицированного уравнения Бесселя

$$z^2u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0. \tag{2}$$

Следует отметить, что вопрос о нулях функций Бесселя изучен более детально, когда они рассматриваются как функции от своих аргументов, т.е. при фиксированном индексе (см. [2]–[7] и литературу к ним). Иначе обстоит дело для функций Бесселя, рассматриваемых как функции от индекса при фиксированном аргументе. В этом направлении отметим работу [8], в которой показано, что для положительных z нули ν_k функции Бесселя I рода $J_\nu(z)$ вещественны, просты и асимптотически близки к отрицательным целым числам (см. также [9]). Что же касается функции $K_\nu(z)$, рассматриваемой как функция от индекса ν, упомянутый выше результат Пойа был уточнен тем, что все нули этой функции являются чисто мнимыми и их бесконечно много (см. [3]). Однако вопрос об асимптотике нулей функции $K_\nu(z)$, насколько нам известно, не изучался. Настоящая заметка посвящена последнему вопросу. Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. *При каждом фиксированном $z > 0$ функция $K_\nu(z)$ имеет счетное число простых чисто мнимых нулей $\pm i\nu_n$, $\nu_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$. Имеет место асимптотическая формула*

$$\nu_n \sim \frac{\pi n}{\ln n}, \quad n \to +\infty. \tag{3}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим уравнение (2) при $z > 0$. Если мы положим $z = 2e^{x/2}$, $y(x) = u(2e^{x/2})$, $\nu = 2i\lambda$, то уравнение (1) примет вид

$$-y'' + e^x y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет собой одномерное уравнение Шрёдингера с экспоненциальным потенциалом. Одним из решений этого уравнения, очевидно, является функция

$$f(x,\lambda) = K_{2i\lambda}(2e^{x/2}). \tag{5}$$

Известно [2]–[4], что при каждом $z > 0$ функция $K_\nu(z)$ является целой функцией индекса ν. Следовательно, при каждом фиксированном x, $-\infty < x < +\infty$, решение $f(x,\lambda)$ служит целой функцией относительно λ. Пользуясь известным (см. [2], [4]) асимптотическим равенством

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}(1 + O(z^{-1})), \quad z \to \infty,$$

находим, что для каждого фиксированного λ решение $f(x,\lambda)$ принадлежит пространству $L_2(a,\infty)$, где a – любое конечное число. Откуда следует, что для каждого $a > -\infty$ собственные значения граничной задачи

$$-y'' + e^x y = \lambda^2 y, \quad a < x < +\infty, \tag{6}$$

$$y(a) = 0 \tag{7}$$

являются нулями функции $f(a,\lambda) = K_{2i\lambda}(2e^{a/2})$ и наоборот.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(a,+\infty)$ самосопряженный оператор T_a, порожденный дифференциальным выражением

$$l_a(y) = -y'' + e^x y, \quad x > a,$$

и граничным условием (7). Так как $e^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то спектр оператора T_a, т.е. задачи (6), (7), состоит [11], [12] из простых вещественных собственных значений λ_n^2, $n = 1,2,\ldots$, сгущающихся к $+\infty$, причем $\lambda_n^2 \geq \inf\limits_{x\geq a} e^x = e^a > 0$. Отсюда и из соотношения $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ следует, что функция $K_{2i\lambda}(2e^{a/2})$ имеет лишь действительные нули $\pm\lambda_n, \lambda_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$. Покажем, что эти нули простые. Условимся точками обозначать дифференцирование по λ, а штрихами – по x:

$$f' = \frac{\partial}{\partial x} f, \quad \dot{f} = \frac{\partial}{\partial \lambda} f.$$

Дифференцируя уравнение

$$-f''(x,\lambda) + e^x f(x,\lambda) = \lambda^2 f(x,\lambda)$$

по λ, видим, что $\dot{f}(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$-\dot{f}''(x,\lambda) + e^x \dot{f}(x,\lambda) = \lambda^2 \dot{f}(x,\lambda) + 2\lambda f(x,\lambda).$$

Следовательно,

$$\{\dot{f}(x,\lambda), f(x,\lambda)\}' = 2\lambda f^2(x,\lambda), \tag{8}$$

где $\{u,v\} = uv' - u'v$. Далее из (1), (5) следует, что при действительных значениях λ имеют место равенства

$$f(x,\lambda) = \int_0^\infty e^{-zcht} \cos\lambda t dt,$$

$$f'(x,\lambda) = -\frac{z}{2}\int_0^\infty e^{-zcht}\, \mathrm{ch}\, t \cos\lambda t dt,$$

$$\dot{f}(x,\lambda) = -\int_0^\infty te^{-zcht}\sin\lambda t dt,$$

$$\dot{f}'(x,\lambda) = \frac{z}{2}\int_0^\infty te^{-zcht}\operatorname{ch} t\sin\lambda t dt,$$

где $z = 2e^{x/2}$. Отсюда легко вывести оценку при $x > 0$:

$$|F(x,\lambda)| \le e^{x/2}e^{-e^{x/2}}\int_0^\infty te^{-\operatorname{ch} t}\operatorname{ch} t dt,$$

где $F(x,\lambda)$ означает любую из функций $f(x,\lambda)$, $\dot{f}(x,\lambda)$, $f'(x,\lambda)$, $\dot{f}'(x,\lambda)$. Последняя оценка показывает, что каждая из этих функций экспоненциально убывает при $x \to +\infty$ равномерно по λ. Тогда из равенства (8) вытекает, что

$$-\dot{f}(a,\lambda_n)f'(a,\lambda_n) = 2\lambda_n\int_a^{+\infty} f^2(x,\lambda_n)dx.$$

Из последнего соотношения видно, что $\dot{f}(a,\lambda_n) \ne 0$, т.е. нули функции $f(a,\lambda)$ являются простыми.

Исследуем теперь асимптотику собственных значений λ_n^2. Не нарушая общности, будем считать, что $a = 0$. Так как функция $q(x) = e^x$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.3 из монографии [11] (см. также [13]), то имеем

$$\int_0^{\ln\lambda_n^2}\sqrt{\lambda_n^2 - e^x}dx \sim \pi n, \quad n \to +\infty. \tag{9}$$

Далее, заметим, что

$$\int_0^{\ln\lambda_n^2}\sqrt{\lambda_n^2 - e^x}dx = \int_1^{\lambda_n^2} t^{-1}\sqrt{\lambda_n^2 - t}dt = \lambda_n\int_1^{\lambda_n^2}\frac{\lambda_n^2}{t}\sqrt{1-\frac{t}{\lambda_n^2}}d\frac{t}{\lambda_n^2} = \lambda_n\int_{\lambda_n^{-2}}^1 u^{-1}\sqrt{1-u}du. \tag{10}$$

Так как функция $G(u) = 2\sqrt{1-u} - \ln(1+\sqrt{1-u}) + \ln(1-\sqrt{1-u})$ служит первообразной функции $g(u) = u^{-1}\sqrt{1-u}$, то из формулы (10) имеем

$$\int_0^{\ln\lambda_n^2}\sqrt{\lambda_n^2 - e^x}dx = 2\lambda_n\ln\lambda_n\left[1 + O\left(\frac{1}{\ln\lambda_n}\right)\right], \quad n \to +\infty.$$

Сопоставляя это соотношение с (9), получаем

$$\lambda_n\ln\lambda_n = \frac{\pi n}{2}[1 + o(1)], \quad n \to +\infty.$$

Если теперь λ_n ищем в виде $\lambda_n = \frac{n\pi}{2}\left(\ln\frac{n\pi}{2}\right)^{-1}[1+\varepsilon_n]$, то из последнего равенства легко вывести соотношение $\varepsilon_n = o(1)$, $n \to +\infty$. Следовательно, для нулей функции $K_{2i\lambda}(z)$ верно асимптотическое равенство

$$\lambda_n \sim \frac{n\pi}{2\ln n}, \quad n \to +\infty.$$

Теперь справедливость формулы (3) вытекает из того, что $\nu_n = 2\lambda_n$. Тем самым теорема доказана.

Замечание 1. Если в уравнении (6) x заменим на $x + a$, то граничная задача (6), (7) сводится к граничной задаче

$$-y'' + e^{x+a}y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < +\infty, \quad y(0) = 0.$$

Пусть $\lambda_n^2(a)$ является n-м собственным значением последней граничной задачи, т.е. граничной задачи (6), (7). Если $a_1 < a_2$, то в силу принципа минимакса (см. [14], [15]) имеем $\lambda_n(a_1) < \lambda_n(a_2)$. Поэтому если $\nu_n(z)$ есть n-й нуль функции $K_{i\lambda}(z)$, $z > 0$ и $0 < z_1 < z_2$, то справедливо неравенство $\nu_n(z_1) < \nu_n(z_2)$.

Замечание 2. Известно, что (см., например, [2]) при $z \to 0$ функция $K_\nu(z)$ удовлетворяет асимптотическим соотношениям

$$K_0(z) \sim -\ln z,$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re}\nu > 0.$$

Из указанных выше рассуждений следует, что для чисто мнимых значений индекса ν функция $K_\nu(z)$ ограничена вблизи точки $z = 0$. В самом деле, при действительных значениях $\lambda \neq 0$ уравнение (4) имеет [12] два линейно независимых решения $e(x,\lambda)$ и $\overline{e(x,\lambda)}$, где $e(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}(1 + o(1))$, $x \to -\infty$. Следовательно, при всех действительных значениях $\lambda \neq 0$ справедливо разложение

$$K_{i\lambda}(2e^{x/2}) = a(\lambda)\overline{e(x,\lambda)} + \overline{a(\lambda)}e(x,\lambda), \quad -\infty < x < +\infty,$$

где учитывается, что $K_{i\lambda}(2e^{x/2})$ принимает действительные значения. Но тогда будем иметь

$$K_{i\lambda}(2e^{x/2}) = a(\lambda)e^{-i\lambda x} + \overline{a(\lambda)}e^{i\lambda x} + o(1), \quad x \to -\infty.$$

Откуда следует, что для всех чисто мнимых значений индекса ν функция $K_\nu(z)$ ограничена вблизи точки $z = 0$, если только $z > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Polya G.* On the zeros of certain trigonometric integrals // J. of London Math. Soc. 1926. V. 1. № 2. P. 98–99.
2. *Abramowitz V., Stegun I.N.* (eds.) Handbook of mathematical functions, 10th edit., Applied Mathematical series, 55, National Bureau of Standards, Washington; Dover Publications, Inc., New York, 1964 (Пер. В.А. Диткин, Л.Н. Кармазина (ред.). Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
3. *Грей Э., Мэтьюз Г.Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
5. *Керимов М.К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 9. С. 1387–1441.
6. *Керимов М.К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления. IV. Неравенства, оценки, разложения и др. для нулей функций Бесселя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 1. С. 3–41.
7. *Budzinskiy S.S., Kharitonov D.M.* On inflection points of Bessel functions of the second kind of positive order // Integral Transform. Spec. Funct. 2017. V. 28. № 12. P. 909–914.
8. *Bobkov V.* Asymptotic relation for zeros of cross-product of Bessel functions and applications // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 1078–1092.
9. *Coulomb M.J.* Sur les zéros des fonctions de Bessel considérées comme fonctions de 1 ordre // Bull. Sci. Math. 1936. V. 60. P. 297–302.
10. *Dougall J.* The determination of Green's function by means of cylindrical or spherical harmonics // Proc. Edin. Math. Soc. 1900. V. 18. P. 33–83.
11. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
12. *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.
13. *Titchmarsh E.C.* On the asymptotic distribution of eigenvalues asymptotic // The Quarterly Journal of Math. 1954. V. 5. № 1. P. 228–240.
14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 4, Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
15. *Fournais S., Helffer B.* Spectral Methods in Surface Superconductivit. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhauser, 2010.