ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 5, с. 873–883

УДК 517.958, 517.956.35, 532.135, 537.84

СИММЕТРИЗАЦИЯ МГД УРАВНЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ[1)]

© 2020 г. А. М. Блохин[1,2], А. Ю. Голдин[2,*]

[1] 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

[2] 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский государственный университет, Россия

*e-mail: goldinandrey@list.ru

Поступила в редакцию 18.07.2019 г.
Переработанный вариант 18.07.2019 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Рассматриваются уравнения, описывающие течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости при наличии магнитного поля. Обсуждается вопрос о симметризации этой системы уравнений. Библ. 13.

Ключевые слова: полимерная среда, магнитное поле, симметрическая t-гиперболическая (по Фридрихсу) система.

DOI: 10.31857/S0044466920050051

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] и [3] описывается математическая модель полимерной жидкости. В статье [4] рассматривается вопрос о приведении этой модели к симметрическому виду. Данная работа продолжает изучение уравнений, предложенных в модели, с точки зрения теории дифференциальных уравнений. Проводится симметризация в случае наличия магнитного поля. Также получены условия для t-гиперболичности (по Фридрихсу) исследуемой системы, приведены примеры, когда эти условия выполняются. Результаты работы обеспечивают возможность применения развитой теории гиперболических систем уравнений и конструирования специальных численных методов, которые можно будет применить при решении уже сугубо практических задач (см., например, [3]), связанных с течением полимерных сред.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Вместо системы уравнений, рассмотренной в [5], [4], изучим теперь магнитогидродинамические уравнения (см., например, монографии [6], [7]). В плоском случае данную реологическую модель в обезразмеренном виде можно записать так (сам процесс обезразмеривания подробно описан в [8]):

$$u_x + v_y = 0, \tag{2.1}$$

$$L_x + M_y = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla P = \frac{1}{Re}\operatorname{div}\Pi + \sigma_m(\mathbf{H},\nabla)\mathbf{H}, \tag{2.3}$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1u_x - 2a_{12}u_y + \mathscr{L}_{11} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{da_{12}}{dt} - A_1v_x - A_2u_y + \tilde{K}_1a_{12} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2a_{12}v_x - A_2v_y + \mathscr{L}_{22} = 0, \tag{2.6}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 17-01-00791_а и 19-01-00261_а).

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} - (\mathbf{H},\nabla)\,\mathbf{u} - b_m\Delta_{x,y}\mathbf{H} = 0. \quad (2.7)$$

Здесь t — время;

u, v — компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ в декартовой системе координат x, y;

L, M — компоненты вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ в декартовой системе координат;

$P = p + \sigma_m\dfrac{L^2 + M^2}{2}$ — полное МГД давление;

$a_{ij}, i, j = 1,2$ — компоненты симметрического тензора анизотропии Π второго ранга;

$\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u},\nabla)$ — субстанциональная производная;

$A_1 = W^{-1} + a_{11}, A_2 = W^{-1} + a_{22}$;

$\mathcal{L}_{ii} = K_I a_{ii} + \beta(a_{12}^2 + a_{ii}^2),\ i = 1,2$;

$K_I = W^{-1} + \dfrac{\bar{k}}{3}I$, $\tilde{K}_I = K_I + \beta I$;

$I = a_{11} + a_{22}$ — первый инвариант тензора анизотропии Π;

$\bar{k} = k - \beta$, k, β $(0 < \beta < 1)$ — скалярные феноменологические параметры реологической модели;

Re, W — числа Рейнольдса и Вейсенберга;

σ_m — коэффициент магнитного давления;

$b_m = 1/\mathrm{Re}_m$, Re_m — магнитное число Рейнольдса;

$\Delta_{x,y} = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ — оператор Лапласа.

Везде далее для простоты положим $\sigma_m = 1$. Такой выбор коэффициента магнитного давления возможен за счет подбора характерных величин магнитного поля и скорости течения. В случае абсолютной проводимости коэффициент $b_m = 0$ (см. [7], [9]). Подобные условия встречаются при исследовании космических проблем в задачах астрофизики [10]. Тогда уравнения (2.3)–(2.7) можно переписать в виде

$$\mathbf{V}_t + B\mathbf{V}_x + C\mathbf{V}_y + \mathbf{F} = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ L \\ M \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u & 0 & -\frac{1}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & u & 0 & -\frac{1}{\mathrm{Re}} & 0 & 0 & -L \\ -2A_1 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_1 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a_{12} & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ -L & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & -L & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & -\frac{1}{\mathrm{Re}} & 0 & -M & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & -\frac{1}{\mathrm{Re}} & L & 0 \\ -2a_{12} & 0 & v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & 0 & 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2A_2 & 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ -M & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \nabla p \\ \mathcal{L}_{11} \\ \tilde{K}_I a_{12} \\ \mathcal{L}_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вопрос о t-гиперболичности системы (2.1)–(2.7) в предположении, что P – известная функция (см. [11] по поводу определения t-гиперболичности). Характеристическое уравнение для нее запишется в виде

$$\det(\tau I_7 + \xi B + \eta C) = 0, \tag{2.9}$$

где I_7 – единичная матрица порядка 7; ξ, η – вещественные числа, не равные нулю одновременно. Раскрывая определитель в левой части, получаем

$$\begin{aligned} &(\tau + \xi u + \eta v)^3 \Bigg[(\tau + \xi u + \eta v)^4 + (\xi L + \eta M)^2 \left(\frac{3\xi^2 A_1}{Re} + \frac{3\eta^2 A_2}{Re} + \frac{4\xi\eta a_{12}}{Re} \right) - \\ &- \left(2(\xi L + \eta M)^2 + \frac{3\xi^2 A_1}{Re} + \frac{3\eta^2 A_2}{Re} + \frac{4\xi\eta a_{12}}{Re} \right)(\tau + \xi u + \eta v)^2 + (\xi L + \eta M)^4 + \\ &+ 2\frac{\xi^3 A_1}{\mathrm{Re}^2}(\xi A_1 + \eta a_{12}) + \frac{4\xi\eta(\xi A_1 + \eta a_{12})(\eta A_2 + \xi a_{12})}{\mathrm{Re}^2} + 2\frac{\eta^3 A_2}{\mathrm{Re}^2}(\eta A_2 + \xi a_{12}) \Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Используем обозначения $\alpha_1 = A_1/\mathrm{Re}$, $\alpha_2 = A_2/\mathrm{Re}$, $\alpha_{12} = a_{12}/\mathrm{Re}$ и приведем выражение (2.10) к следующему виду:

$$(\tau + \xi u + \eta v)^3[\vartheta^2 - (3\alpha_2\eta^2 - \alpha_1\xi^2)\vartheta - 2\alpha_2\eta^2(\alpha_1\xi^2 - \alpha_2\eta^2)] = 0, \tag{2.11}$$

где $\vartheta = (\tau + \xi u + \eta v)^2 - (\xi L + \eta M)^2 - 2\xi(\xi\alpha_1 + \eta\alpha_{12})$. Из (2.11) имеем

а) $\tau + \xi u + \eta v = 0$;

б) $(\tau + \xi u + \eta v)^2 = (\xi L + \eta M)^2 + 2(\alpha_1\xi^2 + \alpha_{12}\xi\eta + \alpha_2\eta^2)$;

в) $(\tau + \xi u + \eta v)^2 = (\xi L + \eta M)^2 + \alpha_1\xi^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + \alpha_2\eta^2$.

Значит, если матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_2 \end{pmatrix} > 0,$$

т.е.

$$\alpha_1 > 0, \quad D = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_{12}^2 > 0, \tag{2.12}$$

то уравнение (2.10) при любых вещественных ξ, η $(\xi^2 + \eta^2 \neq 0)$ имеет четыре различных вещественных корня одинарной кратности:

$$\begin{aligned} \tau &= -\xi u - \eta v \pm \sqrt{2(\alpha_1\xi^2 + \alpha_{12}\xi\eta + \alpha_2\eta^2)}, \\ \tau &= -\xi u - \eta v \pm \sqrt{\alpha_1\xi^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + \alpha_2\eta^2} \end{aligned} \tag{2.13}$$

и один вещественный корень тройной кратности

$$\tau = -\xi u - \eta v. \tag{2.14}$$

Условия (2.12) t-гиперболичности системы (2.8) (ср. с условиями из [1]) проверяются на ее конкретном решении. Заметим также, что знание корней τ (2.13) и (2.14) характеристического уравнения (2.9) позволяет правильно поставить краевые условия для системы (2.8) в том случае, когда ее решение при каждом t ищется в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Теперь с помощью уравнений (2.1), (2.2) систему (2.8) перепишем в виде системы законов сохранения, или в дивергентном виде [8], считая известным полное МГД давление P

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{P}_i^{(2)}}{\partial y} + \Gamma_i = 0, \quad i = \overline{1,7}. \tag{2.15}$$

Здесь

$$\mathcal{P}_1^{(0)} = u, \quad \mathcal{P}_2^{(0)} = v, \quad \mathcal{P}_3^{(0)} = \alpha_1 + u^2 + L^2, \quad \mathcal{P}_4^{(0)} = \alpha_2 + v^2 + M^2, \quad \mathcal{P}_5^{(0)} = \alpha_{12} + uv + LM,$$
$$\mathcal{P}_6^{(0)} = L, \quad \mathcal{P}_7^{(0)} = M, \quad \mathcal{P}_1^{(1)} = u^2 - \alpha_1 - L^2, \quad \mathcal{P}_2^{(1)} = uv - \alpha_{12} - ML, \quad \mathcal{P}_3^{(1)} = u(u^2 - \alpha_1) - uL^2,$$
$$\mathcal{P}_4^{(1)} = u(v^2 + \alpha_2) - 2\alpha_{12}v - 2vLM + uM^2, \quad \mathcal{P}_5^{(1)} = v(u^2 - \alpha_1) - vL^2, \quad \mathcal{P}_6^{(1)} = 0, \quad \mathcal{P}_7^{(1)} = uM - vL,$$
$$\mathcal{P}_1^{(2)} = uv - \alpha_{12} - ML, \quad \mathcal{P}_2^{(2)} = v^2 - \alpha_2 - M^2, \quad \mathcal{P}_3^{(2)} = v(u^2 + \alpha_1) - 2\alpha_{12}u - 2uLM + vL^2,$$
$$\mathcal{P}_4^{(2)} = v(v^2 - \alpha_2) - vM^2, \quad \mathcal{P}_5^{(2)} = u(v^2 - \alpha_2) - uM^2, \quad \mathcal{P}_6^{(2)} = vL - uM, \quad \mathcal{P}_7^{(2)} = 0;$$
$$\Gamma_1 = P_x, \quad \Gamma_2 = P_y, \quad \Gamma_3 = 2uP_x + \tilde{K}_I\alpha_1 + \pi, \quad \Gamma_4 = 2vP_y + \tilde{K}_I\alpha_2 + \pi,$$
$$\Gamma_5 = vP_x + uP_y + \tilde{K}_I\alpha_{12}, \quad \Gamma_6 = 0, \quad \Gamma_7 = 0,$$
$$\pi = -\beta\,\mathrm{Re}\cdot D + \frac{1}{W^2\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\tilde{k}}{3} - 1\right) - \frac{\bar{k}}{3W}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \tilde{k} = 2\bar{k} + 3\beta.$$

При получении вида (2.15) важную роль сыграли следующие соотношения, использующие уравнения (2.2) и (2.7)

$$2u\,\mathrm{div}(L\mathbf{H}) = -\frac{\partial L^2}{\partial t} + \frac{\partial (uL^2)}{\partial x} + \frac{\partial (2uML - vL^2)}{\partial y},$$

$$2v\,\mathrm{div}(M\mathbf{H}) = -\frac{\partial M^2}{\partial t} + \frac{\partial (2vML - uM^2)}{\partial x} + \frac{\partial (vM^2)}{\partial y},$$

$$v\,\mathrm{div}(L\mathbf{H}) + u\,\mathrm{div}(M\mathbf{H}) = -\frac{\partial (LM)}{\partial t} + \frac{\partial (vL^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uM^2)}{\partial y}.$$

В следующих двух разделах мы введем дополнительный закон сохранения для системы (2.1)–(2.7) и используем его для приведения к симметрическому виду системы (2.8). Заметим при этом, что симметрическая система также будет t-гиперболической (см. [11]) при выполнении условий (2.12).

3. ПОЛУЧЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО (ЭНТРОПИЙНОГО) ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ МГД УРАВНЕНИЙ

Будем искать дополнительный закон сохранения для системы (2.1)–(2.7) в виде

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{P}^{(2)}}{\partial y} + \Gamma = 0. \tag{3.1}$$

Задача состоит в определении вида функций $\mathcal{P}^{(0)} = \mathcal{P}^{(0)}(\mathbf{U})$, $\mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}^{(1)}(\mathbf{U})$, $\mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}^{(2)}(\mathbf{U})$ и $\Gamma = \Gamma(\nabla P, \mathbf{U})$, которые зависят от $\mathbf{U} = (u, v, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, L, M)^{\mathrm{T}}$. Более подробно о выводе дополнительных законов и использовании их при симметризации систем законов сохранения можно прочитать в работах [6], [12] и [13].

Предположим, что существуют так называемые канонические переменные $q_i = q_i(\mathbf{U})$, $i = \overline{1,7}$, и функции $r = r(\mathbf{U})$, $g = g(\mathbf{U})$ такие, что верно следующее:

$$d\mathcal{P}^{(0)} = \sum_{i=1}^{7} q_i d\mathcal{P}_i^{(0)}, \tag{3.2}$$

$$
\begin{aligned}
d\mathcal{P}^{(1)} &= \sum_{i=1}^{7} q_i d\mathcal{P}_i^{(1)} + rdu + gdL = ud\mathcal{P}^{(0)} + \left\{ \sum_{i=1}^{7} q_i \mathcal{P}_i^{(0)} - 2\alpha_1 q_3 - \alpha_{12} q_5 - (2q_3 L + q_5 M + q_6)L + r \right\} du - \\
&- (q_1 + 2uq_3 + vq_5)d\alpha_1 - (q_2 + 2vq_4 + uq_5)d\alpha_{12} - [\alpha_1 q_5 + 2q_4\alpha_{12} + (2Mq_4 + q_5 L + q_7)L]dv - \\
&- L(q_2 + 2vq_4 + uq_5)dM - \{2L(q_1 + 2uq_3 + vq_5) + M(q_2 + 2vq_4 + uq_5) + uq_6 + vq_7 - g\}dL,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
d\mathcal{P}^{(2)} &= \sum_{i=1}^{7} q_i d\mathcal{P}_i^{(2)} + rdv + gdM = vd\mathcal{P}^{(0)} + \left\{ \sum_{i=1}^{7} q_i \mathcal{P}_i^{(0)} - 2\alpha_2 q_4 - \alpha_{12} q_5 - (2q_4 M + q_5 L + q_7)M + r \right\} dv - \\
&- \left[2q_3\alpha_{12} + \alpha_2 q_5 + (2Lq_3 + q_5 M + q_6)M\right] du - (q_1 + 2uq_3 + vq_5)d\alpha_{12} - (q_2 + 2vq_4 + uq_5)d\alpha_2 - \\
&- M(q_1 + 2uq_3 + vq_5)dL - \left\{2M(q_2 + 2vq_4 + uq_5) + L(q_1 + 2uq_3 + vq_5) + uq_6 + vq_7 - g\right\} dM,
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\Gamma = (q_1 + 2uq_3 + q_5 v)P_x + (q_2 + 2vq_4 + q_5 u)P_y + \tilde{K}_I(\alpha_1 q_3 + \alpha_2 q_4) + \pi(q_3 + q_4) + \tilde{K}_I \alpha_{12} q_5. \tag{3.5}
$$

Далее положим

$$
\begin{gathered}
q_1 = 2(-u\alpha_2 + v\alpha_{12})G, \quad q_2 = 2(-v\alpha_1 + u\alpha_{12})G, \quad q_3 = \alpha_2 G, \quad q_4 = \alpha_1 G, \\
q_5 = -2\alpha_{12} G, \quad q_6 = -2G(L\alpha_2 - M\alpha_{12}), \quad q_7 = -2G(M\alpha_1 - L\alpha_{12}), \\
g = -2uG(L\alpha_2 - M\alpha_{12}) - 2vG(M\alpha_1 - L\alpha_{12}),
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

где G — некоторая функция от компонент вектора $\mathbf{U}$.

Пусть

$$
\mathcal{P}^{(0)} = \sum_{i=1}^{7} q_i \mathcal{P}_i^{(0)} - q_3\alpha_1 - q_4\alpha_2 - q_5\alpha_{12} + r. \tag{3.7}
$$

Поскольку в силу (3.2) и (3.6) из (3.7) следует

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{7} \mathcal{P}_i^{(0)} dq_i - \alpha_1 dq_3 - q_3 d\alpha_1 - q_4 d\alpha_2 - \alpha_2 dq_4 - q_5 d\alpha_{12} - \alpha_{12} dq_5 + dr = \\
&= dr - GdD - d\{G[(\alpha_2 u^2 - 2uv\alpha_{12} + \alpha_1 v^2) + (\alpha_2 L^2 - 2LM\alpha_{12} + \alpha_1 M^2)]\},
\end{aligned}
$$

то, если $G = F'(D)$, где $F(D)$ — некоторая функция от D, тогда имеем

$$
r = F(D) + G\{\alpha_2 u^2 - 2uv\alpha_{12} + \alpha_1 v^2 + \alpha_2 L^2 - 2LM\alpha_{12} + \alpha_1 M^2\},
$$

и из (3.2)–(3.5) следует

$$
\mathcal{P}^{(0)} = F(D), \quad \mathcal{P}^{(1)} = uF(D), \quad \mathcal{P}^{(2)} = vF(D), \quad \Gamma = 2\tilde{K}_I DG(D) + \pi(\alpha_1 + \alpha_2)G(D).
$$

Итак, с учетом вышеизложенного получаем, что дополнительный закон (3.1) принимает следующий вид (ср. с дополнительным законом из [4]):

$$
\left(F(D)\right)_t + \operatorname{div}\left(F(D)\mathbf{u}\right) + \Gamma = 0. \tag{3.8}
$$

4. СИММЕТРИЗАЦИЯ МГД УРАВНЕНИЙ

Наличие дополнительного нестационарного закона сохранения (3.8) и введенных канонических переменных (3.6) позволяет нам организовать процесс симметризации системы (2.8) (подробности см. в [6], [12] и [13]). При этом учитываются и стационарные законы (2.1), (2.2). После этого процесса, который мы сейчас кратко опишем, исходная система (2.8) будет записана в симметрическом t-гиперболическом (по Фридрихсу) виде.

Итак, введем следующие производящие функции $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}^{(1)}$, $\mathcal{M}^{(2)}$:

$$
\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{7} q_i \mathcal{P}_i^{(0)} - P^{(0)} = 2GD - r,
$$

$$
\mathcal{M}^{(1)} = \sum_{i=1}^{7} q_i \mathcal{P}_i^{(1)} + ru + gL - \mathcal{P}^{(1)} = 2uGD,
$$

$$\mathcal{M}^{(2)} = \sum_{i=1}^{7} q_i \mathcal{P}_i^{(2)} + rv + gM - \mathcal{P}^{(2)} = 2vGD,$$

при этом в силу (3.2), (3.3), (3.4) для $i = \overline{1,7}$ имеем

$$\mathcal{P}_i^{(0)} = \mathcal{L}_{q_i}, \quad \mathcal{P}_i^{(1)} = \mathcal{M}_{q_i}^{(1)} - ur_{q_i} - Lg_{q_i}, \quad \mathcal{P}_i^{(2)} = \mathcal{M}_{q_i}^{(2)} - vr_{q_i} - Mg_{q_i}.$$

Как видно из [6], [12] и [13], вместо системы (2.8) можно рассмотреть следующую:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_{q_i}) + \frac{\partial}{\partial x}(M_{q_i}^{(1)} - ur_{q_i} - Lg_{q_i}) + \frac{\partial}{\partial y}(M_{q_i}^{(2)} - vr_{q_i} - Mg_{q_i}) + r_{q_i}\operatorname{div}\mathbf{u} + g_{q_i}\operatorname{div}\mathbf{H} + \Gamma_i = 0, \quad i = \overline{1,7}, \tag{4.1}$$

которая может быть переписана в виде

$$A_0\mathbf{Q}_t + A_1\mathbf{Q}_x + A_2\mathbf{Q}_y + \Gamma = 0. \tag{4.2}$$

Здесь

$$A_0 = (\mathcal{L}_{q_iq_j}), \quad A_1 = (\mathcal{M}_{q_iq_j}^{(1)} - ur_{q_iq_j} - Lg_{q_iq_j}), \quad A_2 = (\mathcal{M}_{q_iq_j}^{(2)} - vr_{q_iq_j} - Mg_{q_iq_j}), \quad i, j = \overline{1,7},$$

суть симметрические матрицы и

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_4 \\ \Gamma_5 \\ \Gamma_6 \\ \Gamma_7 \end{pmatrix}.$$

При этом $A_0 = IJ^{-1}$, $A_1 = (I_1 - uI_r - LI_g)J^{-1}$, $A_2 = (I_2 - vI_r - MI_g)J^{-1}$, где матрицы I, J, I_1, I_2, I_r, I_g определяются так

$$d\mathbf{Q} = Jd\mathbf{U}, \quad d\mathcal{L}_q = Id\mathbf{U}, \quad d\mathcal{M}_q^{(1)} = I_1 d\mathbf{U}, \quad d\mathcal{M}_q^{(2)} = I_2 d\mathbf{U}, \quad d\mathbf{r}_q = I_r d\mathbf{U}, \quad d\mathbf{g}_q = I_g d\mathbf{U},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_{12} \\ L \\ M \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_q = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{q_1} \\ \mathcal{L}_{q_2} \\ \mathcal{L}_{q_3} \\ \mathcal{L}_{q_4} \\ \mathcal{L}_{q_5} \\ \mathcal{L}_{q_6} \\ \mathcal{L}_{q_7} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_q^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{q_1}^{(1)} \\ \mathcal{M}_{q_2}^{(1)} \\ \mathcal{M}_{q_3}^{(1)} \\ \mathcal{M}_{q_4}^{(1)} \\ \mathcal{M}_{q_5}^{(1)} \\ \mathcal{M}_{q_6}^{(1)} \\ \mathcal{M}_{q_7}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_q^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{q_1}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{q_2}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{q_3}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{q_4}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{q_5}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{q_6}^{(2)} \\ \mathcal{M}_{q_7}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_q = \begin{pmatrix} r_{q_1} \\ r_{q_2} \\ r_{q_3} \\ r_{q_4} \\ r_{q_5} \\ r_{q_6} \\ r_{q_7} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_q = \begin{pmatrix} g_{q_1} \\ g_{q_2} \\ g_{q_3} \\ g_{q_4} \\ g_{q_5} \\ g_{q_6} \\ g_{q_7} \end{pmatrix},$$

и имеют следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} -2\alpha_2 G & 2\alpha_{12}G & q_1\alpha_2\dfrac{G'}{G} & -2uG + q_1\alpha_1\dfrac{G'}{G} & 2vG - 2q_1\alpha_{12}\dfrac{G'}{G} & 0 & 0 \\ 2\alpha_{12}G & -2\alpha_1 G & -2vG + q_2\alpha_2\dfrac{G'}{G} & q_2\alpha_1\dfrac{G'}{G} & 2uG - 2q_2\alpha_{12}\dfrac{G'}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^2 G' & G + \alpha_1\alpha_2 G' & -2\alpha_{12}\alpha_2 G' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G + \alpha_1\alpha_2 G' & \alpha_1^2 G' & -2\alpha_{12}\alpha_1 G' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_{12}\alpha_2 G' & -2\alpha_{12}\alpha_1 G' & 4\alpha_{12}^2 G' - 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_2 G'\Pi_1 & -2GL - 2\alpha_1 G'\Pi_1 & 2GM + 4\alpha_{12}G'\Pi_1 & -2G\alpha_2 & 2G\alpha_{12} \\ 0 & 0 & -2GM - 2\alpha_2 G'\Pi_2 & -2\alpha_1 G'\Pi_2 & 2GL + 4\alpha_{12}G'\Pi_2 & 2G\alpha_{12} & -2G\alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$
J^{-1} = \begin{pmatrix}
-\dfrac{\alpha_1}{2DG} & -\dfrac{\alpha_{12}}{2DG} & -\dfrac{u\alpha_1}{DG} & -\dfrac{v\alpha_{12}}{DG} & -\dfrac{\alpha_1 v + u\alpha_{12}}{2DG} & 0 & 0 \\
-\dfrac{\alpha_{12}}{2DG} & -\dfrac{\alpha_2}{2DG} & -\dfrac{u\alpha_{12}}{DG} & -\dfrac{\alpha_2 v}{DG} & -\dfrac{\alpha_{12} v + u\alpha_2}{2DG} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\dfrac{\alpha_1^2 G'}{\Sigma} & \dfrac{G + DG' - \alpha_{12}^2 G'}{\Sigma} & -\dfrac{\alpha_1\alpha_{12} G'}{\Sigma} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{G + DG' - \alpha_{12}^2 G'}{\Sigma} & -\dfrac{\alpha_2^2 G'}{\Sigma} & -\dfrac{\alpha_2\alpha_{12} G'}{\Sigma} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\dfrac{\alpha_1\alpha_{12} G'}{\Sigma} & -\dfrac{\alpha_2\alpha_{12} G'}{\Sigma} & -\dfrac{G + 2\alpha_1\alpha_2 G'}{2\Sigma} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\dfrac{L\alpha_1}{DG} & -\dfrac{M\alpha_{12}}{DG} & -\dfrac{La_{12} + M\alpha_1}{2DG} & -\dfrac{\alpha_1}{2DG} & -\dfrac{\alpha_{12}}{2DG} \\
0 & 0 & -\dfrac{L\alpha_{12}}{DG} & -\dfrac{M\alpha_2}{DG} & -\dfrac{L\alpha_2 + M\alpha_{12}}{2DG} & -\dfrac{\alpha_{12}}{2DG} & -\dfrac{\alpha_2}{2DG}
\end{pmatrix},
$$

$$
I = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2u & 0 & 1 & 0 & 0 & 2L & 0 \\
0 & 2v & 0 & 1 & 0 & 0 & 2M \\
v & u & 0 & 0 & 1 & M & L \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \quad
I_g = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
2L & 0 & 0 & 0 & 0 & 2u & 0 \\
0 & 2M & 0 & 0 & 0 & 0 & 2v \\
M & L & 0 & 0 & 0 & v & u \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
I_r = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2u & 0 & \dfrac{G^4}{\Sigma^2} + \alpha_{12}^2 C & \alpha_1^2 S & -2\alpha_1\alpha_{12} C & -2L & 0 \\
0 & -2v & \alpha_2^2 C & \dfrac{G^4}{\Sigma^2} + \alpha_{12}^2 C & -2\alpha_2\alpha_{12} C & 0 & -2M \\
-v & -u & \alpha_2\alpha_{12} C & \alpha_1\alpha_{12} C & \dfrac{G^4}{\Sigma^2} - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_{12}^2) C & -M & -L \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix},
$$

$$
I_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-\dfrac{2DGG'\alpha_1}{\Sigma} & 0 & (K-1)u & -\dfrac{2G^3G'\alpha_1^2 u}{\Sigma^2} & \dfrac{4G^3G'\alpha_1\alpha_{12} u}{\Sigma^2} & 0 & 0 \\
\dfrac{2G(DG' + G)\alpha_2}{\Sigma} & -2\alpha_{12} & -\dfrac{2G^3G'\alpha_2^2 u}{\Sigma^2} & (K+1)u & -2\left(v - \dfrac{2G^3G'\alpha_{12}\alpha_2 u}{\Sigma^2}\right) & 0 & 0 \\
\dfrac{G^2\alpha_{12}}{\Sigma} & -\alpha_1 & -v - \dfrac{2G^3G'\alpha_{12}\alpha_2 u}{\Sigma^2} & -\dfrac{2G^3G'\alpha_1\alpha_{12} u}{\Sigma^2} & \dfrac{G^3(4G'\alpha_{12}^2 + 2DG' + G)u}{\Sigma^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha_{12} & \dfrac{2G\left(DG' + G\right)\alpha_1}{\Sigma} & (K+1)v & -\dfrac{2G^3G'\alpha_1^2 v}{\Sigma^2} & \dfrac{4G^3G'\alpha_1\alpha_{12}v}{\Sigma^2} - 2u & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2DGG'\alpha_2}{\Sigma} & -\dfrac{2G^3G'\alpha_2^2 v}{\Sigma^2} & (K-1)v & \dfrac{4G^3G'\alpha_{12}\alpha_2 v}{\Sigma^2} & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & \dfrac{G^2\alpha_{12}}{\Sigma} & -\dfrac{2G^3G'\alpha_{12}\alpha_2 v}{\Sigma^2} & -\dfrac{2G^3G'\alpha_1\alpha_{12}v}{\Sigma^2} - u & \dfrac{G^3(4G'\alpha_{12}^2 + 2DG' + G)v}{\Sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\Pi_1 = L\alpha_2 - M\alpha_{12}, \quad \Pi_2 = M\alpha_1 - L\alpha_{12}, \quad \Sigma = G(G + 2DG'),$$

$$C = -\frac{2G^3G'}{\Sigma^2}, \quad S = \frac{G^2(2G'(G + 2DG') - \Sigma')}{\Sigma^2}, \quad K = \frac{G^3(G - 2G'\alpha_{12}^2)}{\Sigma^2},$$

$$A_0 = -\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1}{2DG} & \dfrac{\alpha_{12}}{2DG} & \dfrac{u\alpha_1}{DG} & \dfrac{v\alpha_{12}}{DG} & \dfrac{\alpha_1 v + u\alpha_{12}}{2DG} & 0 & 0 \\ \dfrac{\alpha_{12}}{2DG} & \dfrac{\alpha_2}{2DG} & \dfrac{u\alpha_{12}}{DG} & \dfrac{\alpha_2 v}{DG} & \dfrac{\alpha_{12}v + u\alpha_2}{2DG} & 0 & 0 \\ \dfrac{u\alpha_1}{DG} & \dfrac{u\alpha_{12}}{DG} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dfrac{L\alpha_1}{DG} & \dfrac{L\alpha_{12}}{DG} \\ \dfrac{v\alpha_{12}}{DG} & \dfrac{v\alpha_2}{DG} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & \dfrac{M\alpha_{12}}{DG} & \dfrac{M\alpha_2}{DG} \\ \dfrac{\alpha_1 v + u\alpha_{12}}{2DG} & \dfrac{\alpha_{12}v + u\alpha_2}{2DG} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & \dfrac{(M\alpha_1 + L\alpha_{12})}{2DG} & \dfrac{(M\alpha_{12} + L\alpha_2)}{2DG} \\ 0 & 0 & \dfrac{L\alpha_1}{DG} & \dfrac{M\alpha_{12}}{DG} & \dfrac{(M\alpha_1 + L\alpha_{12})}{2DG} & \dfrac{\alpha_1}{2DG} & \dfrac{\alpha_{12}}{2DG} \\ 0 & 0 & \dfrac{L\alpha_{12}}{DG} & \dfrac{M\alpha_2}{DG} & \dfrac{(M\alpha_{12} + L\alpha_2)}{2DG} & \dfrac{\alpha_{12}}{2DG} & \dfrac{\alpha_2}{2DG} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{33} = \frac{2\alpha_1(u^2 + L^2)}{DG} + \frac{G'\alpha_1^2}{\Sigma}, \quad a_{44} = \frac{2\alpha_2(v^2 + M^2)}{DG} + \frac{G'\alpha_2^2}{\Sigma},$$

$$a_{45} = \frac{\alpha_2(uv + LM) + \alpha_{12}(v^2 + M^2)}{DG} + \frac{G'\alpha_{12}\alpha_2}{\Sigma},$$

$$a_{34} = \frac{2\alpha_{12}uv + 2LM\alpha_{12}}{DG} + \frac{G'\alpha_{12}^2 - DG' - G}{\Sigma},$$

$$a_{35} = \frac{\alpha_1(uv + LM) + \alpha_{12}(u^2 + L^2)}{DG} + \frac{G'\alpha_1\alpha_{12}}{\Sigma},$$

$$a_{55} = \frac{\alpha_1(v^2 + M^2) + \alpha_2(u^2 + L^2)}{2DG} + \frac{\alpha_{12}(uv + LM)}{DG} + \frac{G'\alpha_1\alpha_2}{\Sigma} + \frac{G}{2\Sigma},$$

$$
A_1 = \begin{pmatrix}
-\dfrac{\alpha_1 u}{2DG} & -\dfrac{\alpha_{12} u}{2DG} & \dfrac{G'\alpha_1^2}{\Sigma} - \alpha_1 N_1 & b_{14} & b_{15} & \dfrac{L\alpha_1}{2DG} & \dfrac{L\alpha_{12}}{2DG} \\
-\dfrac{\alpha_{12} u}{2DG} & -\dfrac{\alpha_2 u}{2DG} & \dfrac{G'\alpha_1\alpha_{12}}{\Sigma} - \alpha_{12} N_1 & b_{24} & b_{25} & \dfrac{L\alpha_{12}}{2DG} & \dfrac{L\alpha_2}{2DG} \\
\dfrac{G'\alpha_1^2}{\Sigma} - \alpha_1 N_1 & \dfrac{G'\alpha_1\alpha_{12}}{\Sigma} - \alpha_{12} N_1 & \dfrac{3uG'\alpha_1^2}{\Sigma} - 2u\alpha_1 N_1 & b_{34} & b_{35} & 0 & 0 \\
b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} \\
b_{15} & b_{25} & b_{35} & b_{45} & b_{55} & b_{56} & b_{46} \\
\dfrac{L\alpha_1}{2DG} & \dfrac{L\alpha_{12}}{2DG} & 0 & b_{46} & b_{56} & -\dfrac{\alpha_1 u}{2DG} & -\dfrac{\alpha_{12} u}{2DG} \\
\dfrac{L\alpha_{12}}{2DG} & \dfrac{L\alpha_2}{2DG} & 0 & b_{47} & b_{46} & -\dfrac{\alpha_{12} u}{2DG} & -\dfrac{\alpha_2 u}{2DG}
\end{pmatrix},
$$

где

$$
N_1 = \frac{(u^2 - L^2)}{DG}, \quad b_{14} = \frac{G'\alpha_{12}^2 - DG' - G}{\Sigma} + \frac{\alpha_{12}(LM - uv)}{DG},
$$

$$
b_{15} = \frac{G'\alpha_1\alpha_{12}}{\Sigma} + \frac{\alpha_{12} N_1}{2} - \frac{\alpha_1(uv - LM)}{2DG}, \quad b_{24} = \frac{G'\alpha_{12}\alpha_2}{\Sigma} + \frac{\alpha_2(LM - uv)}{DG},
$$

$$
b_{25} = \frac{2G'\alpha_1\alpha_2 + G}{2\Sigma} + \frac{\alpha_2 N_1}{2} - \frac{\alpha_{12}(uv - LM)}{2DG},
$$

$$
b_{34} = \frac{2vG'\alpha_1\alpha_{12} - u(DG' + G - G'\alpha_{12}^2)}{\Sigma} - 2v\alpha_{12}N_1, \quad b_{35} = \frac{G'\alpha_1^2 v + 2G'\alpha_1\alpha_{12}u}{\Sigma} - (\alpha_1 v + \alpha_{12}u)N_1,
$$

$$
b_{44} = \alpha_2\left(\frac{2\alpha_{12}v + 4LMv - 2M^2u - 2uv^2}{DG} - \frac{2G\alpha_{12}v}{D\Sigma} - \frac{G'\alpha_2 u}{\Sigma}\right),
$$

$$
b_{45} = \frac{Gv + \alpha_2 G'(\alpha_1 v - 2\alpha_{12}u)}{\Sigma} - \frac{G\alpha_2(\alpha_1 v + \alpha_{12}u)}{D\Sigma} -
$$

$$
- \frac{\alpha_{12}u(v^2 + M^2) + \alpha_2 v(u^2 - L^2) - \alpha_{12}(\alpha_{12}v + \alpha_2 u + 2LMv)}{DG},
$$

$$
b_{55} = \frac{G'\alpha_1\alpha_{12}v}{\Sigma} - \frac{G\alpha_{12}(\alpha_1 v + \alpha_{12}u)}{2D\Sigma} -
$$

$$
- \frac{\alpha_1 u(v^2 + M^2) + (\alpha_2 u + 2\alpha_{12}v)(u^2 - L^2) - \alpha_1(\alpha_{12}v + \alpha_2 u + 2LMv)}{2DG},
$$

$$
b_{46} = -\frac{\alpha_{12}(Mu - Lv)}{DG}, \quad b_{47} = -\frac{\alpha_2(Mu - Lv)}{DG}, \quad b_{56} = -\frac{\alpha_1(Mu - Lv)}{2DG}.
$$

$$
A_2 = \begin{pmatrix}
-\dfrac{\alpha_1 v}{2DG} & -\dfrac{\alpha_{12} v}{2DG} & c_{13} & \dfrac{G'\alpha_2^2}{\Sigma} - \alpha_2 N_2 & c_{15} & \dfrac{M\alpha_1}{2DG} & \dfrac{M\alpha_{12}}{2DG} \\
-\dfrac{\alpha_{12} v}{2DG} & -\dfrac{\alpha_2 v}{2DG} & c_{23} & \dfrac{G'\alpha_2^2}{\Sigma} - \alpha_2 N_2 & c_{25} & \dfrac{M\alpha_{12}}{2DG} & \dfrac{M\alpha_2}{2DG} \\
c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & -b_{56} & -b_{46} \\
\dfrac{G'\alpha_{12}\alpha_2}{\Sigma} - \alpha_{12} N_2 & \dfrac{G'\alpha_2^2}{\Sigma} - \alpha_2 N_2 & c_{34} & \dfrac{3G'\alpha_2^2 v}{\Sigma} - 2\alpha_2 v N_2 & c_{45} & 0 & 0 \\
c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & -b_{46} & -b_{47} \\
\dfrac{M\alpha_1}{2DG} & \dfrac{M\alpha_{12}}{2DG} & -b_{56} & 0 & -b_{46} & -\dfrac{\alpha_1 v}{2DG} & -\dfrac{\alpha_{12} v}{2DG} \\
\dfrac{M\alpha_{12}}{2DG} & \dfrac{M\alpha_2}{2DG} & -b_{46} & 0 & -b_{47} & -\dfrac{\alpha_{12} v}{2DG} & -\dfrac{\alpha_2 v}{2DG}
\end{pmatrix},
$$

где

$$N_2 = \frac{(v^2 - M^2)}{DG}, \quad c_{13} = \alpha_1\left(\frac{\alpha_{12} + LM - uv}{DG} - \frac{G'\alpha_{12}}{\Sigma} - \frac{G\alpha_{12}}{D\Sigma}\right),$$

$$c_{15} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_{12}(LM - uv)}{2DG} - \frac{G\alpha_{12}^2}{2D\Sigma} - \frac{\alpha_1 N_2}{2}, \quad c_{23} = \frac{\alpha_{12}(\alpha_{12} + LM - uv)}{DG} - \frac{G'\alpha_1\alpha_2}{\Sigma} - \frac{G\alpha_1\alpha_2}{D\Sigma},$$

$$c_{25} = \frac{\alpha_2(\alpha_{12} + LM - uv)}{2DG} - \frac{G\alpha_{12}\alpha_2}{2D\Sigma} - \frac{\alpha_{12}N_2}{2}, \quad c_{34} = \frac{G'(2\alpha_{12}\alpha_2 u + \alpha_{12}^2 v - Dv) - Gv}{\Sigma} - 2\alpha_{12}uN_2,$$

$$c_{33} = \frac{\alpha_1 u(\alpha_{12} + 2LM) - 2\alpha_1 v(u^2 + L^2)}{DG} - \frac{G'\alpha_1^2 v}{\Sigma} - \frac{2G\alpha_1\alpha_{12}u}{D\Sigma},$$

$$c_{35} = \frac{u(G'\alpha_{12}^2 - DG' - G)}{\Sigma} - \frac{G\alpha_{12}^2 u}{D\Sigma} - \frac{\alpha_1 u(v^2 - M^2) + \alpha_{12}v(u^2 + L^2) - u(\alpha_1\alpha_2 + 2LM\alpha_{12})}{DG},$$

$$c_{45} = \frac{G'\alpha_2^2 u}{\Sigma} - \frac{G\alpha_{12}\alpha_2 v}{D\Sigma} + \frac{\alpha_2\alpha_{12}v}{DG} - (\alpha_2 u + \alpha_{12}v)N_2,$$

$$c_{55} = \frac{G'\alpha_{12}\alpha_2 u}{\Sigma} - \frac{G\alpha_{12}^2 v + G\alpha_{12}\alpha_2 u}{2D\Sigma} + \frac{LM\alpha_2 u}{DG} - \alpha_{12}uN_2 +$$
$$+ \frac{\alpha_2\left(\alpha_{12}u + \alpha_1 v\right) - \alpha_2 v(u^2 + L^2) - \alpha_1 v(v^2 - M^2)}{2DG}.$$

Умножая систему (4.2) слева на матрицу J^* и учитывая равенство

$$d\mathbf{Q} = Jd\mathbf{U},$$

перепишем ее в терминах исходных переменных:

$$B_0\mathbf{U}_t + B_1\mathbf{U}_x + B_2\mathbf{U}_y + J^*\Gamma = 0, \tag{4.3}$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} -2G\alpha_2 & 2G\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2G\alpha_{12} & -2G\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G'\alpha_2^2 & (G'\alpha_1\alpha_2 + G) & -2G'\alpha_{12}\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G'\alpha_1\alpha_2 + G & G'\alpha_1^2 & -2G'\alpha_1\alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2G'\alpha_{12}\alpha_2 & -2G'\alpha_1\alpha_{12} & 4G'\alpha_{12}^2 - 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2G\alpha_2 & 2G\alpha_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G\alpha_{12} & -2G\alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2G\alpha_2 u & 2G\alpha_{12}u & 2G\alpha_2 & 0 & -2G\alpha_{12} & 2GL\alpha_2 & -2GL\alpha_{12} \\ 2G\alpha_{12}u & -2G\alpha_1 u & -2G\alpha_{12} & 0 & 2G\alpha_1 & -2GL\alpha_{12} & 2GL\alpha_1 \\ 2G\alpha_2 & -2G\alpha_{12} & G'\alpha_2^2 u & (G'\alpha_1\alpha_2 + G)u & -2G'\alpha_{12}\alpha_2 u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (G'\alpha_1\alpha_2 + G)u & G'\alpha_1^2 u & -2G'\alpha_1\alpha_{12}u & 0 & 0 \\ -2G\alpha_{12} & 2G\alpha_1 & -2G'\alpha_{12}\alpha_2 u & -2G'\alpha_1\alpha_{12}u & (4G'\alpha_{12}^2 - 2G)u & 0 & 0 \\ 2GL\alpha_2 & -2GL\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & -2G\alpha_2 u & 2G\alpha_{12}u \\ -2GL\alpha_{12} & 2GL\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 2G\alpha_{12}u & -2G\alpha_1 u \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -2G\alpha_2 \nu & 2G\alpha_{12}\nu & 0 & -2G\alpha_{12} & 2G\alpha_2 & 2GM\alpha_2 & -2GM\alpha_{12} \\ 2G\alpha_{12}\nu & -2G\alpha_1\nu & 0 & 2G\alpha_1 & -2G\alpha_{12} & -2GM\alpha_{12} & 2GM\alpha_1 \\ 0 & 0 & G'\alpha_2^2\nu & (G'\alpha_1\alpha_2 + G)\nu & -2G'\alpha_{12}\alpha_2\nu & 0 & 0 \\ -2G\alpha_{12} & 2G\alpha_1 & (G'\alpha_1\alpha_2 + G)\nu & G'\alpha_1^2\nu & -2G'\alpha_1\alpha_{12}\nu & 0 & 0 \\ 2G\alpha_2 & -2G\alpha_{12} & -2G\alpha_{12}\alpha_2\nu & -2G'\alpha_1\alpha_{12}\nu & (4G'\alpha_{12}^2 - 2G)\nu & 0 & 0 \\ 2GM\alpha_2 & -2GM\alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & -2G\alpha_2\nu & 2G\alpha_{12}\nu \\ -2GM\alpha_{12} & 2GM\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 2G\alpha_{12}\nu & -2G\alpha_1\nu \end{pmatrix},$$

Системы (4.2), (4.3) симметрические. Положительная (отрицательная) определенность матрицы A_0 следует из соответствующей определенности матрицы B_0 и наоборот.

В случае отрицательной определенности матрицы B_0 из системы (4.3) надо умножить эту систему на -1. В итоге мы получим симметрическую t-гиперболическую систему (по Фридрихсу):

$$\hat{B}_0\mathbf{U}_t + \hat{B}_1\mathbf{U}_x + \hat{B}_2\mathbf{U}_y - J^* \cdot \Gamma = 0, \tag{4.4}$$

где $\hat{B}_0 = -B_0$, $\hat{B}_1 = -B_1$, $\hat{B}_2 = -B_2$.

Также стоит отметить, что при выведении дополнительного закона (3.8) мы ввели произвольные функции $G(D)$ и $F(D)$, и, вообще говоря, сам дополнительный закон определяется не единственным образом. Но в предположении, что выполнены условия t-гиперболичности (2.12), условие положительной определенности матрицы $\hat{B}_0$ приводит к следующим ограничениям:

$$G > 0, \quad G' < 0, \quad G + 2DG' < 0. \tag{4.5}$$

Условия (4.5) выполнены, например, если $F(D) = \ln D$ (см., также, [4]). Тогда имеем

$$G = \frac{1}{D} > 0, \quad G' = -\frac{1}{D^2} < 0, \quad G + 2DG' = -\frac{1}{D} < 0.$$

Таким образом, математическая модель, предложенная в [5] и описывающая течения растворов и расплавов несжимаемых вязкоупругих полимерных сред, приведена к симметрическому t-гиперболическому виду. При этом из полной системы (2.1)–(2.7) выделена подсистема (2.3)–(2.7), которая при известном полном МГД давлении P является t-гиперболической, что доказано с помощью прямой проверки условий t-гиперболичности в разд. 2. Далее с использованием соотношений (2.1) и (2.2) проводится симметризация системы (2.8) (следуя С.К. Годунову). При этом неизбежно возникают громоздкие вычисления, связанные с поиском специальных матриц, которые участвуют в процессе приведения исходной системы к конечному симметрическому виду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bambaeva N.V., Blokhin A.M.* The t-hyperbolicity of a nonstationary system governing flows of polymeric media // J. of Math. Sci. 2013. V. 188. № 4. P. 333–343.
2. *Пышнограй Г.В., Покровский В.Н., Яновский Ю.Г. и др.* Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // Докл. АН СССР. 1994. Т. 339. № 5. С. 612–615.
3. *Алтухов Ю.А., Пышнограй Г.В.* Входные течения в канале 4:1 текучих линейных полимеров // Механика композиционных материалов и конструкций. Издание ИПРИМ РАН. 2001. Т. 7. № 1. С. 16–23.
4. *Bambaeva N.V., Blokhin A.M.* Symmetrization of the system of equation governing on incompressible viscoelastic polymeric fluid // J. of Math. Sci. 2014. V. 203. № 4. P. 436–443.
5. *Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В.* Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: изд. АлтГПА, 2012.
6. *Блохин А.М., Трахинин Ю.Л.* Устойчивость сильных разрывов в магнитной гидродинамике и электрогидродинамике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
7. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. школа, 1985.
8. *Бамбаева Н.В., Блохин А.М.* Стационарные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 5. С. 109–134.
9. *Нордлинг К., Остерман Д.* Справочник по физике для ученого и инженера. СПб.: БХВ – Петербург, 2011.
10. *Ши-и Бай.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
11. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики / Под ред. В.В. Абгарян. М.: Наука, 1979.
12. *Блохин А.М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.
13. *Блохин А.М., Доровский В.Н.* Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск: Наука, 1994.