ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 5, с. 900–916

УДК 519.6:532.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЯТЕН В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

© 2020 г. В. А. Гущин[1,*], И. А. Смирнова[1]

[1] 123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19/18, Институт автоматизации проектирования Российской академии наук (ИАП РАН), Россия

*e-mail: gushchin47@mail.ru

Поступила в редакцию 16.09.2019 г.
Переработанный вариант 16.09.2019 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Изучение динамики пятен перемешанной жидкости в стратифицированной окружающей среде представляет интерес как для исследования тонкой структуры океана, так и для исследования динамики следа за движущимся подводным объектом. Работа посвящена построению физической и математической модели для этой задачи. В качестве стратифицирующего компонента выбрана соленость. Эта модель описывается уравнениями Навье–Стокса в приближении Буссинеска. Для решения поставленной задачи используется одна из последних версий разработанного авторами метода расщепления по физическим факторам, конечно-разностная схема которого обладает такими свойствами, как высокий порядок аппроксимации, минимальная схемная вязкость и дисперсия, и, что особенно важно при решении задач с большими градиентами гидрофизических параметров, задач со свободной поверхностью и внутренними волнами свойством монотонности. Проведены многочисленные тестовые и методические расчеты по изучению влияния сеточных параметров на результаты. Приведены результаты сравнения с аналитическими оценками, экспериментальными данными и расчетами других авторов. В качестве примера показана динамика возмущения солености, что соответствует линиям равной фазы, характеризующим поведение внутренних волн в процессе коллапса пятен. Библ. 19. Фиг. 10.

Ключевые слова: несжимаемая вязкая жидкость, стратификация, соленость, приближение Буссинеска, коллапс пятен, метод расщепления.

DOI: 10.31857/S0044466920050087

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение различного рода явлений и процессов, наблюдаемых в таких неоднородных средах, как атмосфера и океан, представляет как научный, так и практический интерес. Неоднородность этих сред связана с эффектами плавучести – наличием силы тяжести. Плотность среды меняется по вертикали. Известно, что плотность среды зависит от температуры, давления и солености (для морской и океанических сред). Мгновенное распределение гидрофизических параметров (плотности, температуры, солености) по глубине никогда не бывает гладким, а носит ступенчатый характер: участки, где гидродинамические характеристики постоянны, сменяются участками с большими их градиентами. Это связано с тем, что в турбулентном потоке с сильно устойчивой стратификацией турбулентность распространена не повсеместно, а пятнами. Неоднородный и сильно анизотропный характер турбулентности в условиях сильной устойчивой стратификации был предсказан А.Н. Колмогоровым еще в конце 40-х годов. На существование блинообразных пятен турбулентности в океане было указано в [1].

Пятна перемешанной жидкости – это следствие взаимодействия внутренних волн, которые при определенных условиях могут опрокидываться. Другая интерпретация – это срез поперечного сечения следа за движущимся в стратифицированной среде подводным объектом. Турбулентность сосредоточена в блинообразных слоях – пятнах, простирающихся в горизонтальном направлении на расстояния, значительно превышающие их вертикальные размеры [2]–[5]. Эти блинообразные пятна оказываются резко ограниченными и долго живущими. Поэтому возникновение и развитие пятен перемешанной жидкости в стратифицированной среде представляет существенный интерес в связи с изучением тонкой структуры океана, а также исследованием динамики следа за движущимся подводным объектом.

Пятна эволюционируют, постепенно сплющиваясь и внедряясь в окружающую среду языками – интрузиями. Перемешанность жидкости в пятне создает в нем избыточное по сравнению с окружающей средой давление, которое и порождает движущую силу интрузии. Под влиянием этой силы происходит расплывание (коллапс) пятна.

Эта задача исследовалась аналитически [6], [7], изучалась в лабораторных условиях [8]–[10], а с появлением приемлемых вычислительных машин стала объектом и математического моделирования [11]–[15].

В настоящее время известен целый ряд численных методов, разработанных для исследования течений неоднородной вязкой жидкости, например [11]–[14].

Некоторые из них исторически основаны на решении уравнений Навье–Стокса в форме Гельмгольца (в переменных вихрь – функция тока) [11], что ограничивает область их применимости случаем двумерных течений. В последние годы все большее внимание уделяется разработке численных методов решения уравнений Навье–Стокса в переменных вектор скорости – давление [12]–[14]. Во всех работах, кроме [11], [13], принимается приближение Буссинеска, согласно которому изменение плотности жидкости учитывается лишь в силах плавучести. В [11] исследования проводятся для идеальной жидкости, а в [13] рассматривается только случай слабой стратификации.

За прошедшие 40 лет с момента выхода нашей работы [14] в области математического моделирования подобных течений естественно произошло много изменений. Предложены новые физические и математические модели [16], [17]. Существенно повысилось качество методов решения поставленных задач [18], [19]. Ну и, конечно же, прогресс в развитии вычислительной технике потрясающий.

В данной работе нам хотелось бы адаптировать математическую модель [16], использованную нами ранее в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра стратифицированной жидкостью [16], [17], к задаче о коллапсе (схлопывании) пятен, которую мы решали ранее без учета диффузии стратифицирующего компонента [14], [15].

Метод также может быть обобщен на случай турбулентных течений.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Согласно модели, предложенной в [7], возникновение и развитие турбулентности в устойчиво стратифицированной по плотности жидкости неотделимо от внутренних волн и происходит следующим образом. Под действием внешних сил в стратифицированной жидкости возникают внутренние волны большого масштаба. В результате их нелинейного взаимодействия и последующего опрокидывания или потери устойчивости возникают области перемешанной жидкости – пятна (иногда их называют зонами смешения). Эти пятна перемешанной турбулизованной жидкости эволюционируют, постепенно сплющиваясь (схлопывание, или коллапс, турбулентных пятен), что, в свою очередь, приводит к образованию новых пятен, и т. д.

В процессе эволюции пятна естественно рассматривать три ее основные стадии [7], [9].

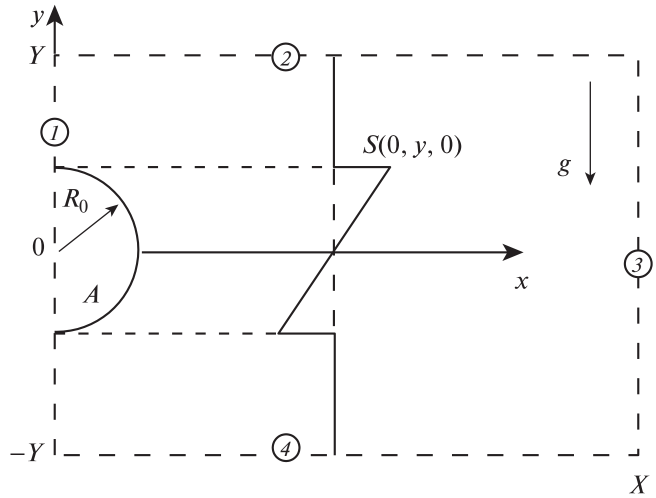
I. Начальная стадия. Движущая сила, действующая на частицы жидкости, находящиеся внутри пятна, значительно превосходит силы сопротивления; происходит интенсивное порождение пятном внутренних волн.

II. Промежуточная стационарная стадия. Движущая сила уравновешивается в основном сопротивлением формы и волновым сопротивлением, обусловленным излучением внутренних волн; увеличение горизонтального размера пятна в зависимости от времени происходит почти по линейному закону, т.е. ускорение пренебрежимо мало.

III. Заключительная вязкая стадия. Движущая сила уравновешивается в основном вязким сопротивлением; горизонтальный размер пятна меняется слабо.

Стадии I и II непродолжительны и, по оценкам в [6], [9], [12], завершаются через промежуток времени, приблизительно равный $4T_b$, где $T_b = 2\pi/N$ – период, а N – частота Брента–Вяйсяля. Причем продолжительность стадии I не превосходит $T_b/2$. В основном же наблюдаемые пятна турбулентности находятся на заключительной III стадии эволюции.

Далее в результате диффузии пятно смешивается с окружающей жидкостью и исчезает.



Фиг. 1. Постановка задачи о коллапсе пятна. Начальные условия для возмущения солености.

Рассмотрим плоскую нестационарную задачу о течении, возникающем при коллапсе (схлопывании по вертикали) области однородной жидкости A, окруженной устойчиво и непрерывно стратифицированной по плотности (для определенности – по линейному закону) жидкостью (фиг. 1).

Течение развивается в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения $\mathbf{g}$. Невозмущенное линейное распределение плотности [16]:

$$\rho(x,y) = \rho_0\left(1 - \frac{y}{\Lambda} + s(x,y)\right)$$

характеризуется масштабом стратификации

$$\Lambda = \left|\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\right|^{-1},$$

частотой плавучести $N = \sqrt{g/\Lambda}$ и периодом плавучести $T_b = 2\pi/N$; $C = \Lambda/R_0$ – отношение масштабов, R_0 – радиус пятна, s – возмущение солености (стратифицирующего компонента), включающее коэффициент солевого сжатия.

Уравнения Навье–Стокса, описывающие течения такого типа, можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \\
\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla s = k_s\Delta s + \frac{v}{\Lambda}, \\
\nabla\cdot\mathbf{v} = 0,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости с составляющими u, v соответственно вдоль осей x и y декартовой системы координат, выбранной так, как указано на фиг. 1, ρ – плотность, p – давление, s – возмущение солености, k_s – коэффициент диффузии соли, μ – коэффициент динамической вязкости, $\mathbf{g} = (0, -g)$, g – ускорение свободного падения. В рассматриваемой задаче предполагается, что $\mu = \text{const}$.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ система на плоскости $\mathbf{R}^2$ находится в покое, т.е.

$$u = v = 0, \tag{2.2}$$

плотность жидкости в пятне A постоянна и

$$\rho = \rho_0, \tag{2.3}$$

а вне пятна, т.е. в области $\mathbf{R}^2 \backslash A$, имеем

$$\rho = \rho_0 (1 + ay + s), \quad a = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_0 < 0. \tag{2.4а}$$

Для возмущения солености имеем

$$s = \begin{cases} \dfrac{y}{\Lambda}, & (x, y) \in A, \\ 0, & (x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash A. \end{cases} \tag{2.4б}$$

В качестве начального приближения, необходимого при решении уравнения для давления, выбирается распределение

$$p = \begin{cases} -\rho_0 g y, & (x, y) \in A, \\ -\rho_0 g\left(y - \dfrac{a}{2} y^2\right), & (x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash A. \end{cases} \tag{2.5}$$

Поскольку давление в случае несжимаемой жидкости определяется с точностью до произвольной постоянной, не ограничивая общности, можно его выбрать равным нулю на уровне $y = 0$.

В силу симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$, естественно искать решение только в одной полуплоскости, например при $x \geq 0$. Симметрия относительно оси x не предполагается. Решение задачи будем искать в прямоугольной области $\{x, y\colon 0 \leq x \leq X, -Y \leq y \leq Y\}$. На левой границе (линия *1* на фиг. 1) этой области ставятся условия симметрии течения

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \tag{2.6}$$

Верхняя (линия *2*), нижняя (линия *4*) и правая (линия *3*) границы должны быть выбраны на достаточно большом расстоянии от источника возмущений (от пятна) так, чтобы постановка каких-либо граничных условий на этих границах, необходимых для решения задачи, не оказывала существенного влияния на картину течения.

Выбирая в качестве характерного линейного размера радиус пятна R_0 в момент времени $t = 0$, характерной плотности – плотность ρ_0 в пятне в начальный момент времени, характерного времени N^{-1}, где $N = (-ag)^{0.5}$, перейдем к безразмерным переменным

$$\tilde{f} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\rho}), \quad x = \tilde{x}R_0, \quad y = \tilde{y}R_0, \quad t = \tilde{t}/N, \quad u = \tilde{u}R_0 N,$$

где

$$v = \tilde{v}R_0 N, \quad p = \tilde{p}\rho_0 R_0^2 N^2, \quad \rho = \tilde{\rho}\rho_0.$$

Будем также считать, что p – давление за вычетом гидростатического. Тогда уравнения (2.1), начальные (2.2)–(2.5) и граничные (2.6) условия примут в безразмерных переменных в приближении Буссинеска следующий вид (тильда опущена):

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\mathrm{Fr}} s \frac{\mathbf{g}}{g}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s = \frac{1}{\mathrm{Sc} \cdot \mathrm{Re}}\Delta s + \frac{v}{C}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$u = v = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \tag{2.8}$$

$$\rho = 1, \quad (x, y) \in A, \tag{2.9}$$

$$\rho = 1 - \frac{y}{C} + s, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash A, \tag{2.10а}$$

$$s = \begin{cases} \dfrac{y}{C}, & (x, y) \in A, \\ 0, & (x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash A, \end{cases} \tag{2.10б}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \tag{2.11}$$

где число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_0 R_0^2 N/\mu$, число Фруда $\mathrm{Fr} = R_0 N^2/g$, число Шмидта $\mathrm{Sc} = \mu/\rho_0 k_s$, k_s – коэффициент диффузии соли, $C = \Lambda/R_0$ – отношение масштабов.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения поставленной задачи будет использована одна из последних версий Метода расщепления по физическим факторам для исследования течений Несжимаемой жидкости (МЕРАНЖ). Конечно-разностная схема этого метода обладает такими свойствами, как второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальная схемная вязкость и дисперсия, работоспособная в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда и, что особенно важно при решении подобных задач, монотонность [19].

Схема расщепления. Пусть в некоторый момент времени $t_n = n\tau$, где τ – величина шага по времени, n – число шагов, известны поля скорости $\mathbf{v}$, давления p и возмущения солености s. Тогда схему нахождения неизвестных функций в момент времени $t_{n+1} = (n+1)\cdot\tau$ можно представить в следующем виде:

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\mathbf{v}^n + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}^n + \frac{1}{\mathrm{Fr}} s^n \frac{\mathbf{g}}{g}, \tag{3.1}$$

$$\tau\Delta p = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\tau} = -\nabla p, \tag{3.3}$$

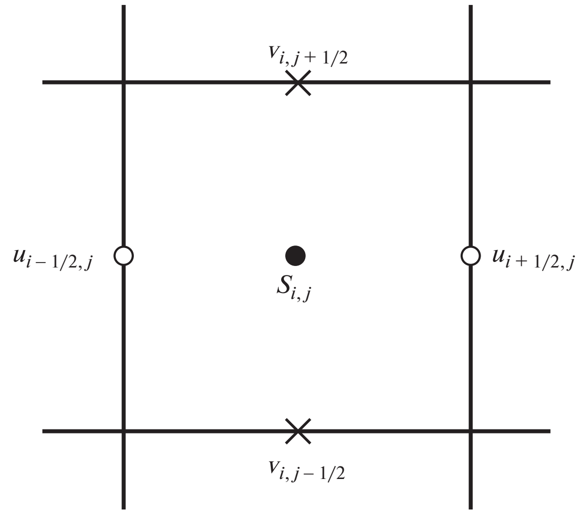
$$\frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)s^n + \frac{1}{\mathrm{Sc}\cdot\mathrm{Re}}\Delta s^n + \frac{v^{n+1}}{C}. \tag{3.4}$$

На I этапе (3.1) предполагается, что перенос количества движения (импульса единицы массы) осуществляется только за счет конвенции, диффузии и сил плавучести. На II этапе (3.2) по найденному промежуточному полю скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ с учетом условия соленоидальности вектора скорости $\mathbf{v}^{n+1}$ из решения уравнения Пуассона находится поле давления. На III этапе (3.3) предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления (конвекция и диффузия отсутствуют). На IV этапе (3.4) по найденному полю скорости $\mathbf{v}^{n+1}$ рассчитывается поле возмущения солености.

Конечно-разностная схема. Исследуемая область течения покрывается равномерной по x и y сеткой ячеек:

$$\Omega = \begin{cases} x_{i+1/2} = ih_x, & h_x > 0, \quad i = 0,1,\ldots,L; \quad Lh_x = X, \\ y_{j+1/2} = jh_y, & h_y > 0, \quad j = 0,1,\ldots,M; \quad Mh_y = 2Y, \end{cases}$$

где h_x, h_y – размеры шагов сетки, а L и M – число ячеек сетки в направлении x и y соответственно (точка с координатами (i, j) совпадает с центром ячейки). Здесь, как и в исходном методе расщепления, используется “шахматная” сетка, т.е. координаты сеточных функций разнесены в пространстве, как это показано на фиг. 2. Это дает возможность наглядно интерпретировать каждую ячейку как элемент объема среды, который характеризуется рассчитываемыми в его центре давлением $p_{i,j}$, плотностью $\rho_{i,j}$, возмущением солености $s_{i,j}$ (возможно, температурой, энергией и т.п.), а также дивергенцией $D_{i,j}$ (D в зависимости от знака определяет наличие источника или стока в данном объеме). Знание же нормальной составляющей вектора скорости на стороне ячейки позволяет непосредственно вычислять поток количества движения через эту сторону.



Фиг. 2. Сеточный шаблон.

Для случая декартовой системы координат и равномерной сетки (фиг. 2) двумерная разностная схема имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\tilde{u}_{i+1/2,j}-u^n_{i+1/2,j}}{\tau}=\frac{(u^n_{i,j})^2-(u^n_{i+1,j})^2}{h_x}+\frac{(uv)^n_{i+1/2,j-1/2}-(uv)^n_{i+1/2,j+1/2}}{h_y}-\\ -\frac{1}{\mathrm{Re}\cdot h_y}\left[\left(\frac{v^n_{i+1,j+1/2}-v^n_{i,j+1/2}}{h_x}-\frac{u^n_{i+1/2,j+1}-u^n_{i+1/2,j}}{h_y}\right)-\right.\\ \left.-\left(\frac{v^n_{i+1,j-1/2}-v^n_{i,j-1/2}}{h_x}-\frac{u^n_{i+1/2,j}-u^n_{i+1/2,j-1}}{h_y}\right)\right],\end{gathered}\tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\tilde{v}_{i,j+1/2}-v^n_{i,j+1/2}}{\tau}=\frac{(v^n_{i,j})^2-(v^n_{i,j+1})^2}{h_y}+\frac{(uv)^n_{i-1/2,j+1/2}-(uv)^n_{i+1/2,j+1/2}}{h_x}+\\ +\frac{1}{\mathrm{Re}\cdot h_x}\left[\left(\frac{v^n_{i+1,j+1/2}-v^n_{i,j+1/2}}{h_x}-\frac{u^n_{i+1/2,j+1}-u^n_{i+1/2,j}}{h_y}\right)-\right.\\ \left.-\left(\frac{v^n_{i,j+1/2}-v^n_{i-1,j+1/2}}{h_x}-\frac{u^n_{i-1/2,j+1}-u^n_{i-1/2,j}}{h_y}\right)\right]-\frac{1}{\mathrm{Fr}}s^n_{i,j},\end{gathered}\tag{3.6}$$

$$\frac{p_{i+1.j}-2p_{i,j}+p_{i-1,j}}{h_x^2}+\frac{p_{i.j+1}-2p_{i,j}+p_{i,j-1}}{h_y^2}=\frac{\tilde{D}_{i,j}}{\tau},\tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}u^{n+1}_{i+1/2,j}=\tilde{u}_{i+1/2,j}-\frac{\tau}{h_x}(p_{i+1,j}-p_{i,j}),\\ v^{n+1}_{i,j+1/2}=\tilde{v}_{i,j+1/2}-\frac{\tau}{h_y}(p_{i,j+1}-p_{i,j}),\end{gathered}\tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{s_{i,j}{}^{n+1}-s_{i,j}{}^{n}}{\tau}=-\frac{u^{n+1}_{i+1/2,j}s^n_{i+1/2,j}-u^{n+1}_{i-1/2,j}s^n_{i-1/2,j}}{h_x}-\frac{v^{n+1}_{i,j+1/2}s^n_{i,j+1/2}-v^{n+1}_{i,j-1/2}s^n_{i,j-1/2}}{h_y}+\\ +\frac{1}{\mathrm{Sc}\cdot\mathrm{Re}}\left(\frac{s^n_{i+1,j}-2s^n_{i,j}+s^n_{i-1,j}}{h_x^2}-\frac{s^n_{i,j+1}-2s^n_{i,j}+s^n_{i,j-1}}{h_y^2}\right)+\frac{v^{n+1}_{i,j}}{C},\end{gathered}\tag{3.9}$$

где u, v — составляющие вектора скорости вдоль осей OX и OY.

При вычислении составляющей вектора скорости $\tilde{u}_{i+1/2,j}$ записывается закон сохранения импульса для импровизированной ячейки с центром в точке $(i+1, j)$ (см. фиг. 2). Для первых двух членов в правой части уравнения (3.5) имеем

$$\frac{(u^n_{i+1,j})^2 - (u^n_{i,j})^2}{h_x} = \frac{DU3 - DU1}{h_x}, \tag{3.10}$$

$$\frac{(uv)^n_{i+1/2,j+1/2} - (uv)^n_{i+1/2,j-1/2}}{h_y} = \frac{DU4 - DU2}{h_y}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим поток $DU3$ через правую сторону этой ячейки

$$DU3 = u^n_{i+1,j} \bullet \langle u^n_{i+1,j} \rangle, \tag{3.12}$$

где

$$u^n_{i+1,j} = 0.5(u^n_{i+3/2,j} + u^n_{i+1/2,j})$$

есть скорость переноса субстанции $\langle u^n_{i+1,j} \rangle$.

Пусть

$$\begin{gathered} \Delta_x u^n_{i+1,j} = u^n_{i+3/2,j} - u^n_{i+1/2,j}, \\ \Delta^2_x u^n_{i+1,j} = \Delta_x u^n_{i+3/2,j} - \Delta_x u^n_{i+1/2,j} = 0.5(u^n_{i+5/2,j} - u^n_{i+3/2,j} - u^n_{i+1/2,j} + u^n_{i-1/2,j}), \\ c^u_{i+1,j} = \tau |u^n_{i+1,j}| / h_x. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Тогда, если

$$(u \bullet \Delta_x u \bullet \Delta^2_x u)^n_{i+1,j} \geq 0,$$

то используется модифицированная схема с ориентированными разностями – МОР

$$\langle u^n_{i+1,j} \rangle = \begin{cases} 0.5(3 - c^u_{i+1,j}) u^n_{i+1/2,j} - 0.5(1 - c^u_{i+1,j}) u^n_{i-1/2,j}, & u^n_{i+1,j} \geq 0; \\ 0.5(3 - c^u_{i+1,j}) u^n_{i+3/2,j} - 0.5(1 - c^u_{i+1,j}) u^n_{i+5/2,j}, & u^n_{i+1,j} < 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

В противном случае, если

$$(u \bullet \Delta_x u \bullet \Delta^2_x u)^n_{i+1,j} < 0,$$

используется модифицированная схема с центральными разностями – МЦР

$$\langle u^n_{i+1,j} \rangle = 0.5\left(1 - \frac{\tau u^n_{i+1,j}}{h_x}\right) u^n_{i+3/2,j} + 0.5\left(1 + \frac{\tau u^n_{i+1,j}}{h_x}\right) u^n_{i+1/2,j}. \tag{3.15}$$

Поток $DU1$ через левую сторону ячейки вычисляется аналогично потоку $DU3$, но в уравнениях (3.12)–(3.15) необходимо индекс i уменьшить на единицу.

Для потоков DU (3.11) в уравнении (3.5) через горизонтальные стороны ячейки имеем

$$DU4 = v^n_{i+1/2,j+1/2} \bullet \langle u^n_{i+1/2,j+1/2} \rangle, \tag{3.16}$$

где

$$v^n_{i+1/2,j+1/2} = 0.5(v^n_{i+1,j+1/2} + v^n_{i,j+1/2}).$$

С учетом обозначений

$$\begin{gathered} \Delta_y u^n_{i+1/2,j+1/2} = u^n_{i+1/2,j+1} - u^n_{i+1/2,j}, \\ \Delta^2_y u^n_{i+1/2,j+1/2} = 0.5(u^n_{i+1/2,j+2} - u^n_{i+1/2,j+1} - u^n_{i+1/2,j} + u^n_{i+1/2,j-1}), \\ c^v_{i+1/2,j+1/2} = \tau \left| v^n_{i+1/2,j+1/2} \right| / h_y. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Тогда, если

$$(v \bullet \Delta_y u \bullet \Delta_y^2 u)^n_{i+1/2,j+1/2} \geq 0,$$

используется схема МОР

$$\langle u^n_{i+1/2,j+1/2} \rangle = \begin{cases} 0.5(3 - c^v_{i+1/2,j+1/2})u^n_{i+1/2,j} - 0.5(1 - c^v_{i+1/2,j+1/2})u^n_{i+1/2,j-1}, & v^n_{i+1/2,j+1/2} \geq 0, \\ 0.5(3 - c^v_{i+1/2,j+1/2})u^n_{i+1/2,j+1} - 0.5(1 - c^v_{i+1/2,j+1/2})u^n_{i+1/2,j+2}, & v^n_{i+1/2,j+1/2} < 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

а в противном случае, если

$$(v \bullet \Delta_y u \bullet \Delta_y^2 u)^n_{i+1/2,j+1/2} < 0,$$

используется схема МЦР

$$\langle u^n_{i+1/2,j+1/2} \rangle = 0.5\left(1 - \frac{\tau v^n_{i+1/2,j+1/2}}{h_y}\right)u^n_{i+1/2,j+1} + 0.5\left(1 + \frac{\tau v^n_{i+1/2,j+1/2}}{h_y}\right)u^n_{i+1/2,j}. \tag{3.19}$$

Поток $DU2$ через нижнюю сторону ячейки вычисляется аналогично $DU4$, но в уравнениях (3.16)–(3.19) необходимо индекс j уменьшить на единицу. Оставшиеся производные, входящие в правую часть уравнения (3.5) и соответствующие вязким членам, аппроксимируются центральными разностями.

При вычислении составляющей вектора скорости $\tilde{v}_{i,j+1/2}$ записывается закон сохранения импульса для вспомогательной ячейки с центрам в точке $(i, j + 1/2)$ (см. фиг. 2). Для первых двух членов в правой части уравнения (3.6) имеем

$$\frac{(uv)^n_{i+1/2,j+1/2} - (uv)^n_{i-1/2,j+1/2}}{h_x} = \frac{DV3 - DV1}{h_x}, \tag{3.20}$$

$$\frac{(v^n_{i,j+1})^2 - (v^n_{i,j})^2}{h_y} = \frac{DV4 - DV2}{h_y}. \tag{3.21}$$

Рассмотрим поток $DV3$ через правую сторону этой ячейки

$$DV3 = u^n_{i+1/2,j+1/2} \bullet \langle v^n_{i+1/2,j+1/2} \rangle, \tag{3.22}$$

где

$$u^n_{i+1/2,j+1/2} = 0.5(u^n_{i+1/2,j+1} + u^n_{i+1/2,j})$$

есть скорость переноса субстанции $\langle v^n_{i+1/2,j+1/2} \rangle$. Пусть

$$\begin{gathered} \Delta_x v^n_{i+1/2,j+1/2} = v^n_{i+1,j+1/2} - v^n_{i,j+1/2}, \\ \Delta_x^2 v^n_{i+1/2,j+1/2} = 0.5(v^n_{i+2,j+1/2} - v^n_{i+1,j+1/2} - v^n_{i,j+1/2} + v^n_{i-1,j+1/2}), \\ c^u_{i+1/2,j+1/2} = \tau \left| u^n_{i+1/2,j+1/2} \right| / h_x. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Если

$$(u \bullet \Delta_x v \bullet \Delta_x^2 v)^n_{i+1/2,j+1/2} \geq 0,$$

то используется схема МОР

$$\langle v^n_{i+1/2,j+1/2} \rangle = \begin{cases} 0.5(3 - c^u_{i+1/2,j+1/2})v^n_{i,j+1/2} - 0.5(1 - c^u_{i+1/2,j+1/2})v^n_{i-1,j+1/2}, & u^n_{i+1/2,j+1/2} \geq 0; \\ 0.5(3 - c^u_{i+1/2,j+1/2})v^n_{i+1,j+1/2} - 0.5(1 - c^u_{i+1/2,j+1/2})v^n_{i+2,j+1/2}, & u^n_{i+1/2,j+1/2} < 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

В противном случае, если

$$(u \bullet \Delta_x v \bullet \Delta_x^2 v)^n_{i+1/2,j+1/2} < 0,$$

используется схема МЦР

$$\langle v^n_{i+1/2,j+1/2}\rangle = 0.5\left(1-\frac{\tau u^n_{i+1/2,j+1/2}}{h_x}\right)v^n_{i+1,j+1/2} + 0.5\left(1+\frac{\tau u^n_{i+1/2,j+1/2}}{h_x}\right)v^n_{i,j+1/2}. \tag{3.25}$$

Поток $DU1$ через левую сторону ячейки находится аналогично потоку $DU3$, но в уравнениях (3.22)–(3.25) необходимо индекс i уменьшить на единицу.

Для потоков DV (3.21) через горизонтальные стороны ячейки имеем

$$DV4 = v^n_{i,j+1} \bullet \langle v^n_{i,j+1}\rangle, \tag{3.26}$$

где

$$v^n_{i,j+1} = 0.5(v^n_{i,j+3/2} + v^n_{i,j+1/2})$$

есть скорость переноса субстанции $\langle v^n_{i,j+1}\rangle$. Пусть

$$\begin{gathered} \Delta_y v^n_{i,j+1} = v^n_{i,j+3/2} - v^n_{i,j+1/2}, \\ \Delta^2_y v^n_{i,j+1} = 0.5(v^n_{i,j+5/2} - v^n_{i,j+3/2} - v^n_{i,j+1/2} + v^n_{i,j-1/2}), \\ c^v_{i,j+1} = \tau\left|v^n_{i,j+1}\right|/h_y. \end{gathered} \tag{3.27}$$

Если

$$(v \bullet \Delta_y v \bullet \Delta^2_y v)^n_{i,j+1} \ge 0,$$

то используется схема МОР

$$\langle v^n_{i,j+1}\rangle = \begin{cases} 0.5(3 - c^v_{i,j+1})v^n_{i,j+1/2} - 0.5(1 - c^v_{i,j+1})v^n_{i,j-1/2}, & v^n_{i,j+1} \ge 0; \\ 0.5(3 - c^v_{i,j+1})v^n_{i,j+3/2} - 0.5(1 - c^v_{i,j+1})v^n_{i,j+5/2}, & v^n_{i,j+1} < 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

В противном случае, если

$$(v \bullet \Delta_y v \bullet \Delta^2_y v)^n_{i,j+1} < 0,$$

то используется схема МЦР

$$\langle v^n_{i,j+1}\rangle = 0.5\left(1-\frac{\tau v^n_{i,j+1}}{h_y}\right)v^n_{i,j+3/2} + 0.5\left(1+\frac{\tau v^n_{i,j+1}}{h_y}\right)v^n_{i,j+1/2}. \tag{3.29}$$

Поток $DV2$ через нижнюю сторону этой ячейки вычисляется аналогично потоку $DV4$, но в уравнениях (3.26)–(3.29) необходимо индекс j уменьшить на единицу.

Остальные производные, входящие в правую часть уравнения (3.6) и соответствующие вязким членам, аппроксимируются центральными разностями.

При вычислении возмущения солености используется такой же подход. Для первых двух членов в правой части уравнения (3.9) имеем

$$\frac{u^{n+1}_{i+1/2,j}s^n_{i+1/2,j} - u^{n+1}_{i-1/2,j}s^n_{i-1/2,j}}{h_x} = \frac{DS3 - DS1}{h_x}, \tag{3.30}$$

$$\frac{v^{n+1}_{i,j+1/2}s^n_{i,j+1/2} - v^{n+1}_{i,j-1/2}s^n_{i,j-1/2}}{h_y} = \frac{DS4 - DS2}{h_y}. \tag{3.31}$$

Рассмотрим поток $DS3$ через правую сторону ячейки

$$DS3 = u^{n+1}_{i+1/2,j} \bullet \langle s^n_{i+1/2,j}\rangle, \tag{3.32}$$

где $u^{n+1}_{i+1/2,j}$ — скорость переноса субстанции $\langle s^n_{i+1/2,j}\rangle$. Пусть

$$\begin{gathered} \Delta_x s^n_{i+1/2,j} = s^n_{i+1,j} - s^n_{i,j}, \\ \Delta^2_x s^n_{i+1/2,j} = \Delta_x s^n_{i+1,j} - \Delta_x s^n_{i,j} = 0.5(s^n_{i+2,j} - s^n_{i+1,j} - s^n_{i,j} + s^n_{i-1,j}), \end{gathered} \tag{3.33}$$

$$c^u_{i+1/2,j} = \tau\left|u^{n+1}_{i+1/2,j}\right|/h_x.$$

Тогда, если

$$(u \bullet \Delta_x s \bullet \Delta^2_x s)_{i+1/2,j} \geq 0,$$

то используется модифицированная схема с ориентированными разностями – МОР

$$\langle s^n_{i+1/2,j}\rangle = \begin{cases} 0.5(3 - c^u_{i+1/2,j})s^n_{i,j} - 0.5(1 - c^u_{i+1/2,j})s^n_{i-1,j}, & u^{n+1}_{i+1/2,j} \geq 0; \\ 0.5(3 - c^u_{i+1/2,j})s^n_{i+1,j} - 0.5(1 - c^u_{i+1/2,j})s^n_{i+2,j}, & u^{n+1}_{i+1/2,j} < 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

В противном случае, если

$$(u \bullet \Delta_x s \bullet \Delta^2_x s)_{i+1/2,j} < 0,$$

используется модифицированная схема с центральными разностями – МЦР

$$\langle s_{i+1/2,j}\rangle = 0.5\left(1 - \frac{\tau u^{n+1}_{i+1/2,j}}{h_x}\right)s^n_{i+1,j} + 0.5\left(1 + \frac{\tau u^{n+1}_{i+1/2,j}}{h_x}\right)s^n_{i,j}. \tag{3.35}$$

Поток $DS1 = u^{n+1}_{i-1/2,j} \bullet \langle s^n_{i-1/2,j}\rangle$ через левую сторону ячейки вычисляется аналогично потоку $DS3$, но везде в уравнениях (3.32)–(3.35) необходимо индекс i уменьшить на единицу.

Для потоков DS (3.31) в уравнении (3.9) через горизонтальные стороны ячейки имеем

$$DS4 = v^{n+1}_{i,j+1/2} \bullet \langle s^n_{i,j+1/2}\rangle. \tag{3.36}$$

С учетом обозначений

$$\begin{gathered} \Delta_y s^n_{i,j+1/2} = s^n_{i,j+1} - s^n_{i,j}, \\ \Delta^2_y s^n_{i,j+1/2} = 0.5(s^n_{i,j+2} - s^n_{i,j+1} - s^n_{i,j} + s^n_{i,j-1}), \\ c^v_{i,j+1/2} = \tau\left|v^{n+1}_{i,j+1/2}\right|/h_y. \end{gathered} \tag{3.37}$$

Если

$$(v \bullet \Delta_y s \bullet \Delta^2_y s)_{i,j+1/2} \geq 0,$$

используется схема МОР

$$\langle s^n_{i,j+1/2}\rangle = \begin{cases} 0.5(3 - c^v_{i,j+1/2})s^n_{i,j} - 0.5(1 - c^v_{i,j+1/2})s^n_{i,j-1}, & v^{n+1}_{i,j+1/2} \geq 0; \\ 0.5(3 - c^v_{i,j+1/2})s^n_{i,j+1} - 0.5(1 - c^v_{i,j+1/2})s^n_{i,j+2}, & v^{n+1}_{i,j+1/2} < 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

В противном случае, если

$$(v \bullet \Delta_y s \bullet \Delta^2_y s)_{i,j+1/2} < 0,$$

используется схема МЦР

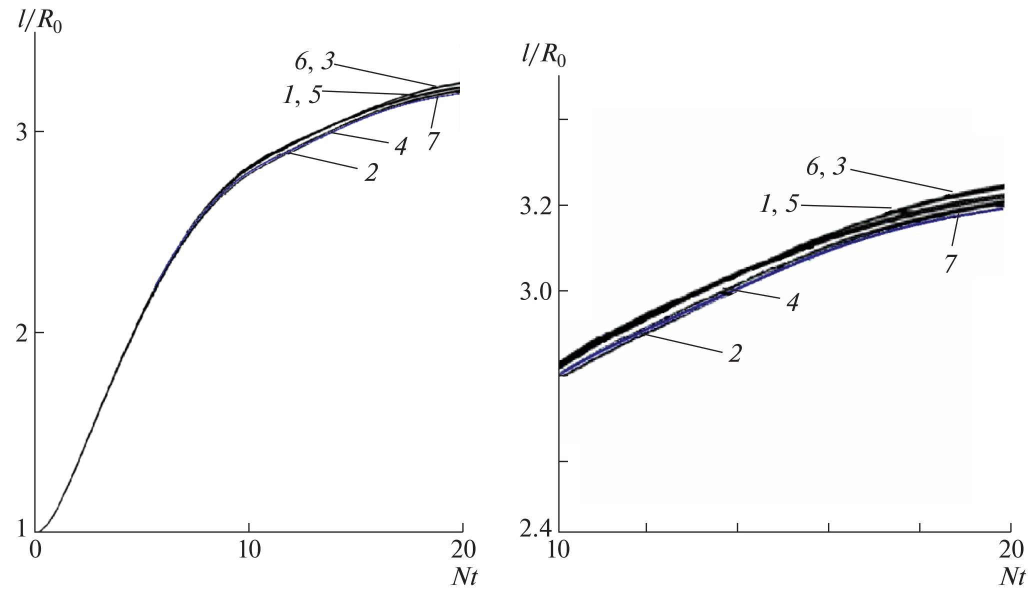
$$\langle s^n_{i,j+1/2}\rangle = 0.5\left(1 - \frac{\tau v^{n+1}_{i,j+1/2}}{h_y}\right)s^n_{i,j+1} + 0.5\left(1 + \frac{\tau v^{n+1}_{i,j+1/2}}{h_y}\right)s^n_{i,j}. \tag{3.39}$$

Поток $DS2 = v^{n+1}_{i,j-1/2} \bullet \langle s^n_{i,j-1/2}\rangle$ через нижнюю сторону ячейки вычисляется аналогично потоку $DS4$, но в уравнениях (3.36)–(3.39) необходимо индекс j уменьшить на единицу.

Легко видеть [19], что конечно-разностная схема аппроксимирует систему уравнений (2.7) с погрешностью порядка $O(\tau, \Delta^2)$, где $\Delta = \max(h_x, h_y)$.

Аппроксимация начальных условий (2.8)–(2.10) и условий симметрии (2.11) не представляет труда.

Процедура расчета. Сначала в исследуемой области течения задается начальное приближение, удовлетворяющее граничным условиям. Далее, по формулам (3.5), (3.6) находится промежуточное поле скорости $\tilde{\mathbf{v}}$. Затем из (3.7) рассчитывается поле давления. Для решения этого уравнения нами использовался метод верхней релаксации. Актуальное поле скорости находится из уравне-



Фиг. 3. Зависимость от времени положения правой точки пятна.

ний (3.8), а поле изменения солености – из уравнения (3.9). Далее вычислительный цикл повторяется до некоторого заданного момента времени либо до выполнения некоторого критерия установления (если существует стационарное решение), например,

$$\max_{(i,j)}\left|f_{i,j}^{n+l} - f_{i,j}^{n}\right| < \varepsilon_2, \quad \text{где} \quad f = (u, v, p, s).$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

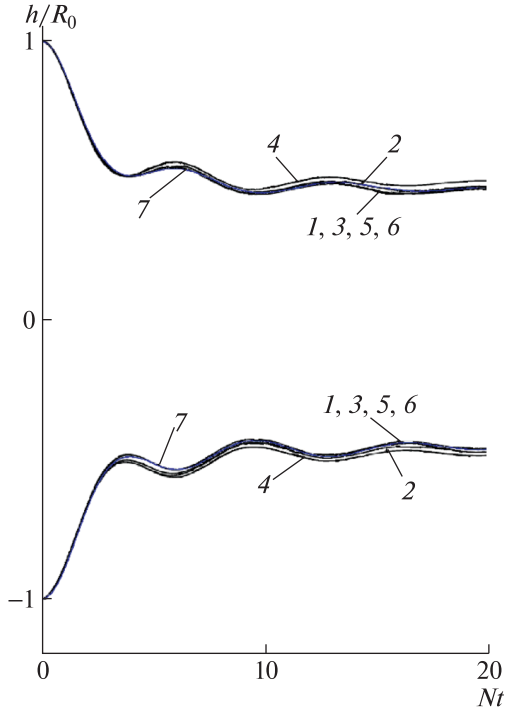
Пусть радиус пятна $R_0 = 1$. Расчеты выполнены в области с размерами $X = 15$, $Y = 5$ при следующих значениях коэффициентов и параметров: $\mu/\rho_0 = 0.01$ см^2/с, $k_s = 1.41 \times 10^{-5}$ см^2/с, $N = 1$ с$^{-1}$, $T_b = 2\pi/N\,s$, $\Lambda = 10$ см, $C = 10$, $\mathrm{Re} = 100$, $\mathrm{Fr} = 0.1$, $\mathrm{Sc} = 709.2$, что близко к лабораторным экспериментальным условиям. В качестве граничных условий на верхней, нижней и правой границах расчетной области, предполагая, что они достаточно удалены от пятна, выбрано состояние покоя, т.е. $u = v = s = 0$. Расчетная область была покрыта равномерной сеткой с шагами в обоих направлениях $h_x = h_y = 0.1$.

Тестирование программы. С целью проверки правильности работы программы были выполнены расчеты в отсутствие пятна и на различных сетках до $t = 100$. Характерные точки пятна (верхняя, нижняя и правая) оставались на месте, давление сохранялось постоянным, дивергенция скорости была на уровне 10^{-3}. Тем самым результаты этих расчетов подтвердили выполнение законов сохранения с требуемой точностью.

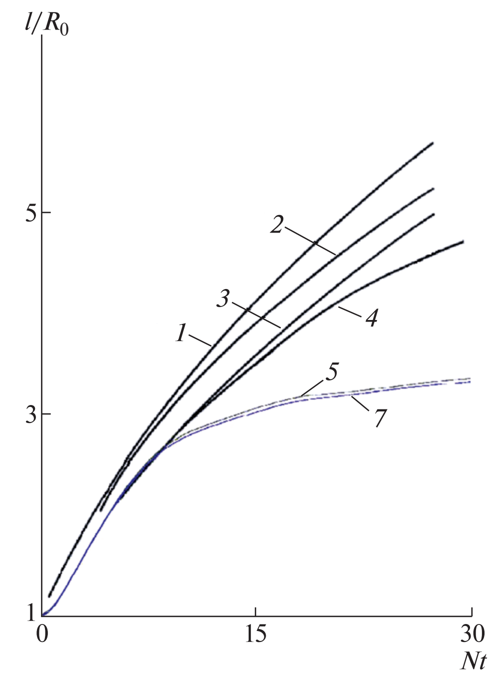
Методические расчеты. С целью исследования влияния размеров пространственной и временной сеток на результаты расчетов были проведены вычисления при следующих параметрах: **1** – 300 × 100, $h_x = 0.05$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.005$; **2** – 150 × 200, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.05$, $\tau = 0.005$; **3** – 300 × 200, $h_x = 0.05$, $h_y = 0.05$, $\tau = 0.005$; **4** – 600 × 100, $h_x = 0.025$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.0025$; **5** – 150 × 400, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.025$, $\tau = 0{,}0025$; **6** – 600 × 400, $h_x = 0.025$, $h_y = 0.025$, $\tau = 0.0025$.

На фиг. 3 показана зависимость от времени положения правой точки пятна. Кривые отмечены цифрами, соответствующими различным сеткам, упомянутым выше. Здесь же нанесена кривая *7*, соответствующая следующим параметрам: $X = 30$, $Y = 10$ (т.е. размеры расчетной области по каждой координате увеличены в два раза с целью проверки влияния степени удаленности внешних границ на результаты расчетов), 300 × 200, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$.

На фиг. 4 приведены зависимости от времени положения верхней и нижней точек пятна. Обозначения такие же, как и на фиг. 3. Как видно из фиг. 3 и фиг. 4, результаты практически не зависят от величины сеточных параметров и размеров области в указанном диапазоне. Это под-

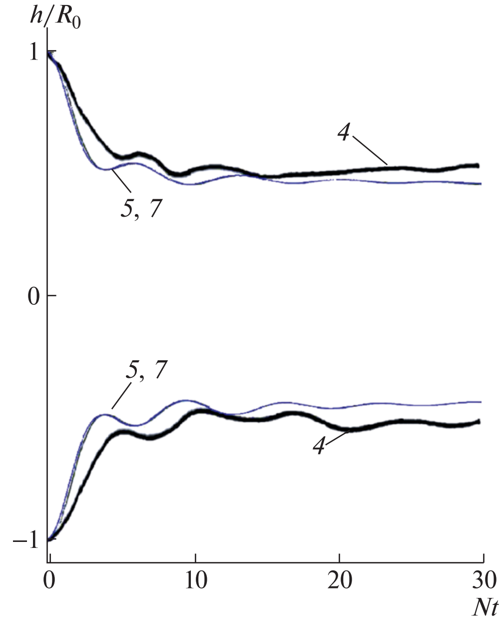


Фиг. 4. Зависимости от времени положения верхней и нижней точек пятна.



Фиг. 5. Сравнения динамики горизонтального размера пятна с аналитическими оценками [6] – кривая *1*, экспериментальными данными [9] – кривая *2* и расчетами других авторов [12], [14] – кривые *3* и *4* соответственно. Результаты данной работы: кривая *5* – для $X = 15$, $Y = 5$; 150×100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$; кривая *7* – $X = 30$, $Y = 10$, 300×200, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$.

тверждает возможность проведения дальнейших расчетов при следующих параметрах: $X = 15$, $Y = 5$, 150×100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$. Здесь следует также отметить, что изменение линейных размеров пятна со временем происходит не монотонно (фиг. 4). Это связано с генерацией и ди-



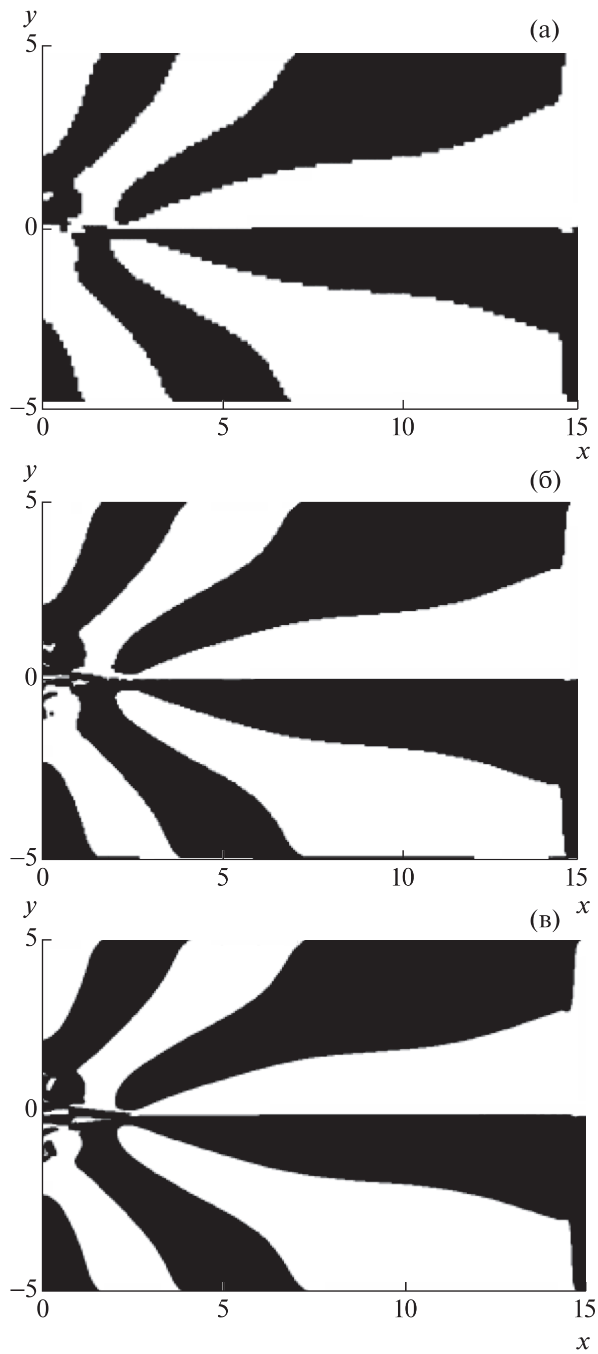
Фиг. 6. Результаты сравнения динамики вертикального размера пятна. Кривая *4* из [14]. Результаты данной работы: кривые *5* – для $X = 15$, $Y = 5$; 150×100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$; кривые *7* – для $X = 30$, $Y = 10$; 300×200, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$.

намикой внутренних волн в процессе коллапса пятна и впервые было обнаружено в нашей работе [14] и показано в фильме на конференции в сентябре 1980 г. по случаю 25-летия ВЦ АН СССР.

На фиг. 5 приведены результаты сравнения динамики горизонтальных размеров пятна с аналитическими оценками [6] – кривая *1*, экспериментальными данными [9] – кривая *2* и расчетами других авторов [12], [14] – кривые *3* и *4* соответственно. Кривые *5* и *7* представляют результаты данной работы при следующих значениях параметров: кривая *5* – для $X = 15$, $Y = 5$; 150×100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$; кривая *7* – для $X = 30$, $Y = 10$; 300×200, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$. Различия, наблюдаемые между кривыми на фиг. 5, можно объяснить следующим образом. Все аналитические оценки горизонтальных размеров пятна [6], [7] получены в предположении идеальности жидкости, то есть при отсутствии вязкости, а следовательно, горизонтальный размер пятна будет увеличиваться со временем быстрее, чем в экспериментах и численных расчетах. В экспериментах [8]–[10] числа Рейнольдса были существенно больше, чем в численных расчетах, а следовательно, опять горизонтальный размер пятна будет увеличиваться со временем быстрее, чем в численных расчетах. Расчеты в работах [12], [14] выполнены с использованием одинаковых моделей – уравнения Навье–Стокса в приближении Буссинеска, однако в этих моделях не учитывалась диффузия стратифицирующего компонента, что при прочих одинаковых условиях также приводит к более высоким скоростям увеличения горизонтального размера пятна. В работе [14] было также показано, что с увеличением числа Рейнольдса горизонтальный размер пятна будет увеличиваться со временем быстрее.

На фиг. 6 приведены результаты сравнения динамики вертикальных размеров пятна с расчетами [14] – кривая *4*. Кривые *5* и *7* представляют результаты данной работы при следующих значениях параметров: кривая *5* – для $X = 15$, $Y = 5$; 150×100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$; кривая *7* – для $X = 30$, $Y = 10$; 300×200, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$.

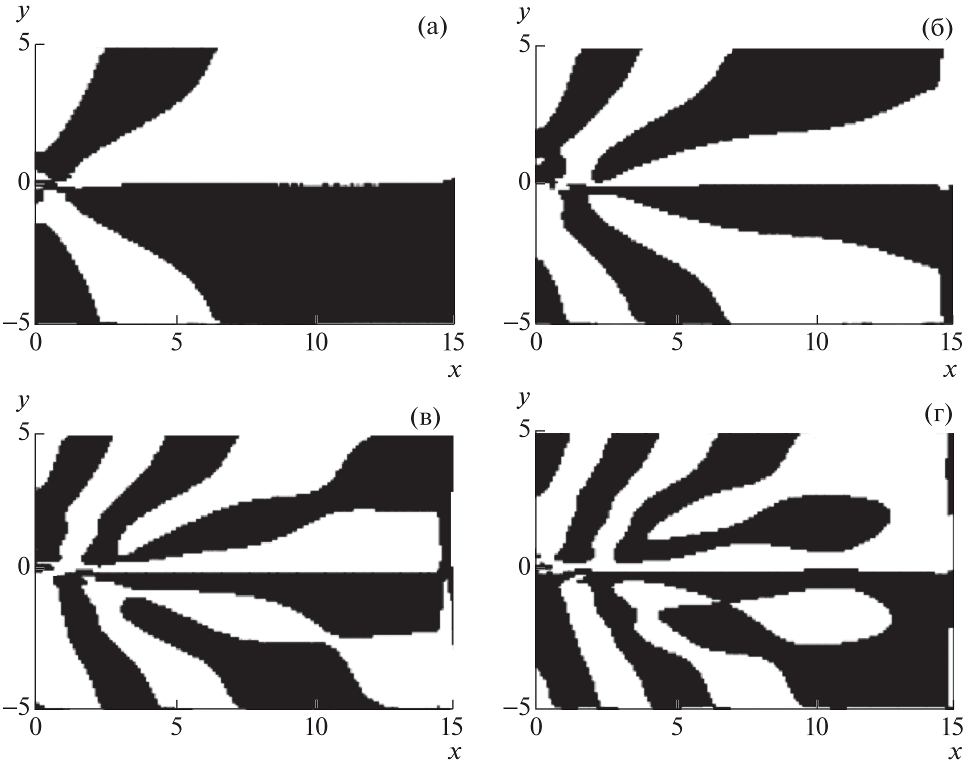
На фиг. 7–10 приведены поля изменения возмущения солености ds/dx. Белый цвет соответствует положительным значениям производной, а черный – отрицательным значениям. Границы раздела между черным и белым цветами полей при заданном уровне y соответствуют значениям $ds/dx = 0$, то есть минимумам и максимумам функции s или гребням и впадинам внутренних волн. Фактически это линии равной фазы. Из фиг. 7–10 также видно, что со временем линии равной фазы смещаются слева направо, а их наклон по отношению к горизонту уменьшается, что соответствует результатам работ [9], [14]. Здесь мы остановимся в основном на результатах методических расчетов.



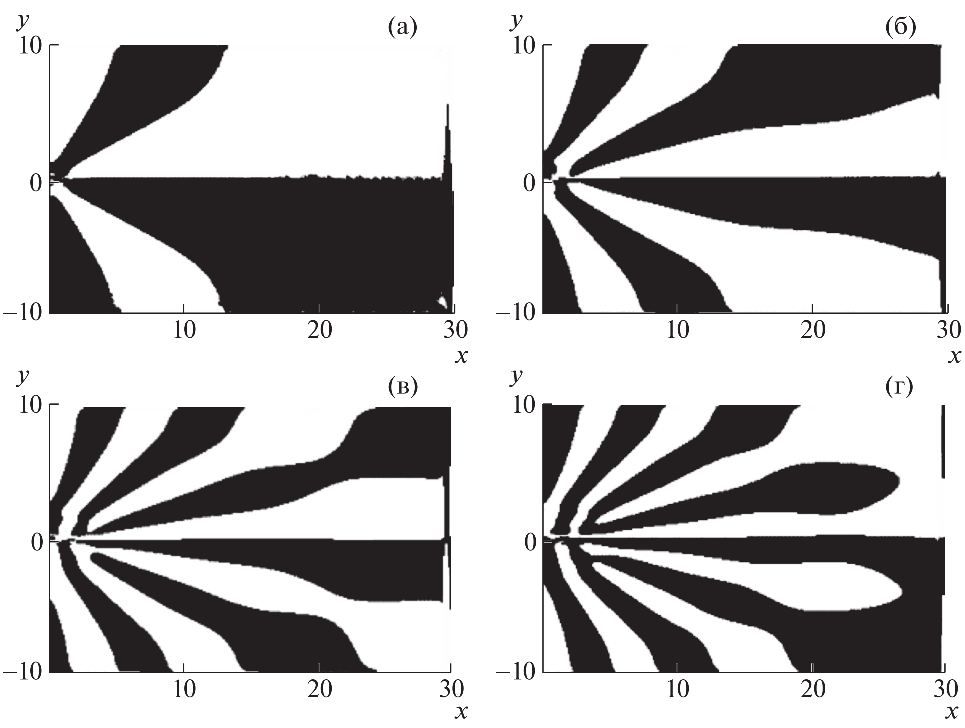
Фиг. 7. Поле изменения возмущения солености ds/dx. Область $X = 15$, $Y = 5$, $t = 10$; (а) 150×100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$; (б) 300×200, $h_x = 0.05$, $h_y = 0.05$, $\tau = 0.005$; (в) 600×400, $h_x = 0.025$, $h_y = 0.025$, $\tau = 0.0025$.

На фиг. 7 представлено поле изменения возмущения солености ds/dx при следующих значениях параметров. Область $X = 15$, $Y = 5$, $t = 10$; (а) 150×100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$; (б) 300×200, $h_x = 0.05$, $h_y = 0.05$, $\tau = 0.005$; (в) 600×400, $h_x = 0.025$, $h_y = 0.025$, $\tau = 0.0025$. Как видно, результаты для различных размеров пространственной сетки достаточно хорошо согласуются между собой.

На фиг. 8 показано изменение во времени поля изменения возмущения солености ds/dx. Область $X = 15$, $Y = 5$; 150×100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$; (а) $t = 4$; (б) $t = 10$; (в) $t = 16$; (г) $t = 20$. Видно, что со временем линии равной фазы смещаются слева направо, а их наклон по отношению к горизонту уменьшается, что соответствует результатам работ [9], [14].

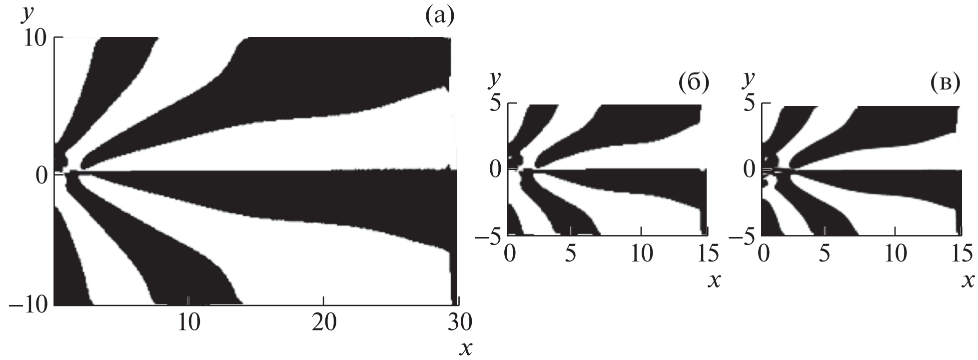


Фиг. 8. Поле изменения возмущения солености ds/dx. Область $X = 15$, $Y = 5$; (а) $t = 4$; (б) $t = 10$; (в) $t = 16$; (г) $t = 20$.



Фиг. 9. Поле изменения возмущения солености ds/dx. Область $X = 30$, $Y = 10$; (а) $t = 4$; (б) $t = 10$; (в) $t = 16$; (г) $t = 20$.

На фиг. 9 приведено поле изменения возмущения солености ds/dx для области с размерами $X = 30$, $Y = 10$; (а) $t = 4$; (б) $t = 10$; (в) $t = 16$; (г) $t = 20$. Из сравнения фиг. 8 и фиг. 9 можно сделать вывод, что для анализа волновой картины целесообразно либо увеличивать размеры расчетной



Фиг. 10. Поле изменения возмущения солености ds/dx. $t = 10$; (а) область $X = 30$, $Y = 10$; 300 × 200, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$; (б) область $X = 15$, $Y = 5$; 150 × 100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$; (в) область $X = 15$, $Y = 5$; 600 × 400, $h_x = 0.025$, $h_y = 0.025$, $\tau = 0.0025$.

области, либо изменять форму граничных условий на внешних границах. Хотя для небольших времен ($t < 2T_b$) области с размерами $X = 15$, $Y = 5$ вполне достаточно, что видно из сравнения результатов, приведенных на фиг. 10 для поля изменения возмущения солености ds/dx при $t = 10$; (а) область $X = 30$, $Y = 10$; 300 × 200, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$; (б) область $X = 15$, $Y = 5$; 150 × 100, $h_x = 0.1$, $h_y = 0.1$, $\tau = 0.01$; (в) область $X = 15$, $Y = 5$; 600 × 400, $h_x = 0.025$, $h_y = 0.025$, $\tau = 0.0025$. Путем прямого наложения можно видеть, что результаты практически совпадают.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждается задача о динамике (коллапсе) пятен перемешанной жидкости в стратифицированной среде. В качестве стратифицирующей компоненты выбрана соленость. Эта задача описывается уравнениями Навье–Стокса в приближении Буссинеска с соответствующими граничными и начальными условиями. Для решения поставленной задачи используется одна из последних версий разработанного авторами метода расщепления по физическим факторам. Конечно-разностная схема метода обладает такими свойствами, как высокий порядок аппроксимации, минимальная схемная вязкость и дисперсия, и что особенно важно при решении задач с большими градиентами гидрофизических параметров, задач со свободной поверхностью и внутренними волнами, свойством монотонности. Приведена конечно-разностная схема.

С целью проверки правильности работы программы были выполнены расчеты в отсутствие пятна и на различных сетках до $t = 100$. Характерные точки пятна (верхняя, нижняя и правая) оставались на месте, давление сохранялось постоянным, дивергенция скорости была на уровне 10^{-3}. Тем самым результаты этих расчетов подтвердили выполнение законов сохранения с требуемой точностью.

Проведены многочисленные тестовые и методические расчеты по изучению влияния сеточных параметров на результаты. Приведены результаты сравнения с аналитическими оценками, экспериментальными данными и расчетами других авторов. Совпадение результатов достаточно хорошее, что подтверждает возможность использования данной модели при исследовании подобных задач. Проведенные расчеты показали, что развитие пятна происходит несимметрично относительно горизонтальной оси, а изменение вертикального размера пятна немонотонно со временем и носит квазипериодический характер. Метод также может быть использован для расчета течений жидкости, стратификация которой отлична от линейной.

В качестве примера показана динамика возмущения солености, что соответствует линиям равной фазы, характеризующих поведение внутренних волн в процессе коллапса пятен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филлипс О.М.* Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. М.: Наука, 1967. С. 130–138.
2. *Федоров К.Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 184 с.
3. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 432 с.

4. *Скорер Р.* Аэрогидродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980. 551 с.
5. *Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 320 с.
6. *Kao T.W.* Principal stage of wake collapse in a stratified fluid. Two-dimensional theory // Phys. Fluids. 1976. V. 19. № 8. P. 1071–1074.
7. *Баренблатт Г.И.* Динамика турбулентных пятен и интрузии в устойчиво-стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14. № 2. С. 195–205.
8. *Schooley A.H., Stewart R.W.* Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with a vertical density gradient // J. Fluid Mech. 1963. V. 15. 83.
9. *Wu J.* Mixed region collapse with internal wave generation in a density-stratified medium // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. № 3. P. 531–544.
10. *Зацепин А.Г., Федоров К.Н., Воропаев С.И., Павлов А.М.* Экспериментальное исследование растекания перемешанного пятна в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14. № 2. С. 234–237.
11. *Кузнецов Б.Г., Черных Г.Г.* Численное исследование поведения однородного “пятна” в идеальной стратифицированной по плотности жидкости // Ж. прикл. механ. и теор. физ. 1973. № 3. С. 120–126.
12. *Wessel W.R.* Numerical study of the collapse of a perturbation in an infinite density stratified fluid // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 12. P. 170–176.
13. *Joung J.A., Hirt C.W.* Numerical calculation of internal wave motions // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. № 2. P. 265–276.
14. *Гущин В.А.* Метод расщепления для задач динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 4. С. 1003–1017.
15. *Гущин В.А., Копысов А.Н.* Динамика сферической зоны смешения в стратифицированной жидкости и ее акустическое излучение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 6. С. 850–863.
16. *Гущин В.А., Миткин В.В., Рождественская Т.И., Чашечкин Ю.Д.* Численное и экспериментальное исследование тонкой структуры течения стратифицированной жидкости вблизи кругового цилиндра // Ж. прикл. механ. и техн. физ. 2007. Т. 48. № 1. С. 43–54.
17. *Гущин В.А., Матюшин П.В.* Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1049–1063.
18. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Коньшин В.Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
19. *Гущин В.А.* Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 2. С. 6–18.