ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 5, с. 767–783

УДК 519.63

ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В МЕРАХ БОЛЕЕ СИЛЬНЫХ, ЧЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ НОРМА

© 2020 г. С. И. Репин

191023 Санкт-Петербург, Фонтанка, 27, Санкт-Петербургское отделение Математического Института им. В.А. Стеклова РАН, Россия

e-mail: repin@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 28.10.2019 г.
Переработанный вариант 28.10.2019 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Изучаются оценки величины отклонения заданной функции от точного решения краевой задачи эллиптического типа. Для тех случаев, когда оценки строятся в терминах естественной энергетической нормы, такие оценки были получены ранее. В данной работе предлагается подход к получению более сильных мер отклонения и соответствующих оценок, которые применимы, если точное решение и аппроксимация имеют повышенную регулярность (в отношении порядка интегрируемости). Эти меры включают стандартную энергетическую норму как простой специальный случай. В статье предлагается общий подход к конструированию различных мер, основанный на использовании вспомогательной вариационной задачи. Более подробно исследуются два класса мер, близких по своим свойствам к нормам пространств L^q и L^∞. Устанавливаются их свойства и для них строятся двусторонние оценки (миноранты и мажоранты), которые содержат только известные функции и могут быть явно вычислены. Библ. 28.

Ключевые слова: уравнения эллиптического типа, оценки отклонения от точного решения, апостериорные оценки.

DOI: 10.31857/S0044466920050142

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема получения явно вычисляемых оценок отклонения от точного решения краевой (начально-краевой) задачи имеет важное значение для количественного анализа различных математических моделей, основанных на дифференциальных уравнениях. В общей форме постановка задачи состоит в следующем. Пусть $\mathcal{A} : V \to V^*$ – дифференциальный оператор, областью определения которого является банахово пространство V, а областью значений – банахово пространство V^*. Предположим, что задача

$$\mathcal{A}u = f, \quad f \in V^*, \tag{1.1}$$

корректна и имеет единственное решение u. Требуется оценить расстояние между u и функцией $v \in V$ в норме пространства V так, чтобы эта оценка была верна для любой функции $v \in V$, не содержала явно неизвестное точное решение u, и обеспечивала достаточно хорошую оценку. Другими словами, необходимо построить функционал $M_\oplus : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ такой, что $M_\oplus(v)$ зависит только от известных данных (геометрии области, коэффициентов уравнения, краевых условий и т.п.), $M_\oplus(u) = 0$ и, кроме того,

$$\|u - v\|_V \leq M_\oplus(v) \quad \forall v \in V, \tag{1.2}$$

$$M_\oplus(v_k) \to 0 \quad \text{для любой последовательности } v_k \to u \in V. \tag{1.3}$$

Для того, чтобы количественный анализ задачи соответствовал всем требованиям *вычислений с гарантированной точностью* (в зарубежной терминологии *fully reliable computations*), необходимо также построить вычисляемую миноранту $M_\ominus(v)$ с аналогичными свойствами. Величина $I_{\text{eff}} := M_\oplus(v)/M_\ominus(v)$ называется индексом эффективности и дает представление о качестве оценок и величине реальной погрешности.

Заметим, что как правило, v рассматривается как численная аппроксимация u и в этом случае речь идет об *апостериорной* оценке погрешности. При этом, в отличие от априорной оценки, нас интересует не скорость асимптотического убывания погрешности при увеличении размерности аппроксимирующего пространства, а возможность явно оценить погрешность конкретного приближенного решения. Однако есть и другие, не менее важные проблемы, когда функция v является решением другой математической проблемы, или возникает как результат обработки экспериментальных данных. Задача построения функционалов (мажорант отклонения от точного решения), удовлетворяющих (1.2) и (1.3) для вариационных задач с выпуклыми коэрцитивными функционалами была поставлена и решена в [1], [2]. В настоящее время методы построения таких функционалов (мажорант отклонения от точного решения) для уравнений эллиптического и параболического типа в терминах энергетической нормы хорошо разработаны (см. монографию [3], а также статьи [4], [5]–[10] и другие публикации, упомянутые в этих работах). Существует два метода построения $M(v)$: первый основан на использовании теории двойственности вариационного исчисления, а второй (невариационный) использует специальные преобразования интегральных тождеств, определяющих обобщенное решение задачи. Первый метод подробно изложен в [2], а второй в [3]. Ниже мы рассмотрим некоторые оценки, полученные этими методами.

Однако есть и другой не менее важный вопрос:

В терминах какой меры оценивается отклонение от u?

Если $\mathcal{A}$ является линейным сильно эллиптическим оператором, то выбор в качестве меры энергетической нормы $\|u - v\|_V$ представляется вполне естественным. Обычно именно эту норму стараются оценить различными методами при анализе конечноэлементных аппроксимаций (см., например [11], [12]). Однако часто возникает потребность в других оценках. В последние годы широкое распространение получили оценки в терминах специально сконструированных линейных функционалов (в зарубежной литературе они называются *goal oriented quantities*, см., например, [13], [14]). В этом случае рассматриваются меры существенно более слабые, чем энергетическая. Более того, обычно меры такого рода не являются метриками и могут обращаться в ноль на функциях, не являющихся точным решением задачи. Тем не менее соответствующие оценки оказались востребованными, поскольку дают представление о качестве аппроксимации специально выбранных характеристик решения. В данной работе предлагается метод получения оценок отклонения от точного решения в терминах мер более сильных, чем энергетическая норма. Для того, чтобы яснее изложить основную идею этого метода, необходимо вначале кратко напомнить некоторые принципиальные факты, лежащие в основе анализа погрешности приближенных решений уравнений в частных производных (подробное изложение этих вопросов содержится в [3]).

Рассмотрим простейший пример уравнения Пуассона $\Delta u + f = 0$ в липшицевой области Ω с $f \in L^2(\Omega)$ и краевыми условиями Дирихле $u = u_0$ на границе $\partial\Omega$. Соответствующее обобщенное решение удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx = \int_\Omega fw dx \quad \forall w \in V_0 := \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{1.4}$$

где $\cdot$ обозначает скалярное произведение в пространстве векторов, а $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ обозначает подпространство $H^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в ноль на границе. В этом случае

$$\int_\Omega \nabla e \cdot \nabla w dx = \mathcal{F}_v(w) \quad \forall w \in V_0, \tag{1.5}$$

где $e := u - v$, а

$$\mathcal{F}_v(w) := \int_\Omega (fw - \nabla v \times \nabla w) dx$$

это линейный непрерывный функционал, определенный на V_0 (здесь и далее символ := означает “равно по определению”). Нетрудно видеть, что функционал $\mathcal{F}_v$ тождественно равен нулю, если

v совпадает с точным решением u. Во всех остальных случаях его норма, задаваемая соотношением

$$|\mathcal{F}_v| := \sup_{w \in V_0 \setminus \{0\}} \frac{|\mathcal{F}_v(w)|}{\|\nabla w\|}, \tag{1.6}$$

будет больше нуля. Здесь и далее $\|\cdot\|$ (или $\|\cdot\|_{2,\Omega}$) обозначает норму в пространстве $L^2(\Omega)$ для скалярных и векторных функций. Из (1.3) следует, что

$$\int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 dx = \mathcal{F}_v(u - v) \le |\mathcal{F}_v| \|\nabla(u - v)\|.$$

Поэтому $\|\nabla(u - v)\| \le |\mathcal{F}_v|$ так, что $|\mathcal{F}_v|$ контролирует отклонение v от u. Более того, так как $|\mathcal{F}_v(w)| \le \|\nabla(u - v)\| \|\nabla w\|$, то (1.6) влечет обратное неравенство. Таким образом, в данном простом случае энергетическая норма отклонения $\|\nabla e\|_\Omega$ совпадает с $|\mathcal{F}_v|$, определенной как супремум в (1.6). Во многих более сложных задачах удается доказать, что норма отклонения эквивалентна $|\mathcal{F}_v|$, так что с математической точки зрения проблема сводится к получению вычисляемых оценок этой величины. Поскольку норма $|\mathcal{F}_v|$ определяется как супремум по бесконечному множеству функций, на практике ее вряд ли возможно вычислить (за исключением некоторых специальных случаев, когда супремум можно найти аналитическими методами). Поэтому для построения функционала $M_\oplus(v)$ (удовлетворяющего (1.2) и (1.3)) необходимо получить мажоранту $|\mathcal{F}_v|$ в терминах интегральных норм. Для этого существуют два различных подхода.

В 80-е годы прошлого века среди вычислителей, использующих метод конечных элементов, получил широкое распространение т.н. метод невязок (*residual method*). Он был предложен в статьях [15], [16] и изучен в многочисленных публикациях других авторов (см., например, [11], [17]–[21], [12] и цитируемые там работы). Основная идея этого метода заключается в том, чтобы использовать свойство ортогональности галеркинских аппроксимаций и оценить сверху $|\mathcal{F}_{u_h}|$ в том случае, когда v совпадает с галеркинским решением u_h, полученным как точное решение конечномерной задачи на подпространстве $V_h \subset V_0$. Естественно, что при этом множество функций, сравниваемых с u, существенно ограничивается (так что важное свойство (1.2) не выполняется). У метода есть и ряд других недостатков, которые могут приводить к сильной переоценке величины ошибки (подробный сравнительный анализ различных апостериорных оценок погрешности в контексте метода конечных элементов содержится в монографии [22]). В вычислительной практике этот метод в основном используется для генерации индикаторов локальных ошибок, на основе которых производится адаптация сеток.

Для получения функционала $M_\oplus(v)$, удовлетворяющего условиям (1.2), (1.3), надо использовать другой метод оценки $|\mathcal{F}_v|$, который основан на декомпозиции этого функционала при помощи вспомогательных интегральных тождеств. Этот метод был предложен в [6] (заметим, что для вариационных задач функционалы $M_\oplus(v)$ были уже получены ранее в [1], [2] при помощи методов теории двойственности вариационного исчисления). В частности, для задачи (1.4) можно применить тождество

$$\int_\Omega (\nabla w \cdot y + w \operatorname{div} y) dx = 0 \quad \forall w \in V_0, \quad \forall y \in H(\Omega, \operatorname{div}), \tag{1.7}$$

где $H(\Omega, \operatorname{div}) := \{y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d) | \operatorname{div} y \in L^2(\Omega)\}$ обозначает гильбертово пространство со скалярным произведением $(y, z)_{\operatorname{div}} := \int_\Omega (y \cdot z + \operatorname{div} y \operatorname{div} z) dx$ и соответствующей нормой $\|y\|_{\operatorname{div}}$. При помощи (1.7) мы получаем следующее представление функционала $\mathcal{F}_v$:

$$\mathcal{F}_v(w) = \int_\Omega ((\nabla v - y) \cdot \nabla w + w(\operatorname{div} y + f)) dx. \tag{1.8}$$

Используя (1.5), (1.8), и неравенство Фридрихса, нетрудно получить оценку

$$\|\nabla e\| \le \|\nabla v - y\| + C^F(\Omega) \|\operatorname{div} y + f\| \quad \forall y \in H(\Omega, \operatorname{div}), \tag{1.9}$$

где $C^F(\Omega)$ обозначает постоянную в неравенстве Фридрихса для области Ω. Понятно, что вместо точного значения $C^F(\Omega)$ можно использовать любую оценку этой постоянной сверху (которую для случая однородных краевых условий легко построить).

Для общей задачи (1.1) с монотонным и положительно-определенным оператором $\mathcal{A}$ естественно определить меру (норму) отклонения от точного решения как

$$|||e|||_{\mathcal{A}} := \sup_{w\in V\setminus\{0\}} \frac{|\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, w\rangle|}{|w|_{\mathcal{A}}} = \sup_{w\in V\setminus\{0\}} \frac{|\mathcal{F}_v(w)|}{|w|_{\mathcal{A}}}, \tag{1.10}$$

где $|w|^2_{\mathcal{A}} := \langle \mathcal{A}w, w\rangle$, а скобки обозначают спаривание V' и V. Мера (1.10) характеризует величину функционала $\mathcal{F}_v(w) := \langle f - \mathcal{A}v, w\rangle$. Легко видеть, что если $u_v \in V$ удовлетворяет уравнению

$$\langle \mathcal{A}u_v, w\rangle = \mathcal{F}_v(w) \quad \forall w \in V, \tag{1.11}$$

то

$$|||e|||_{\mathcal{A}} \geq \frac{|\mathcal{F}_v(u_v)|}{|u_v|_{\mathcal{A}}} = |u_v|_{\mathcal{A}}.$$

С другой стороны, $|\mathcal{F}_v(w)| \leq \|\mathcal{A}u_v\|_{V'}\|w\|_V$. Если норма $\|w\|_V$ подчинена $|w|_{\mathcal{A}}$, то можно оценить $|||e|||_{\mathcal{A}}$ сверху через $\|\mathcal{A}u_v\|_{V'}$. Таким образом, величина $|||e|||_{\mathcal{A}}$ оценивается той или иной нормой решения задачи (1.11), в которой правая часть задается функционалом невязки $\mathcal{F}_v$ (заметим, что в случае уравнения Пуассона u_v в (1.11) совпадает с e). Изложенную выше схему можно обобщить и построить различные меры отклонения от точного решения в нормах более сильных, чем энергетическая.

В общем виде основная идея заключается в следующем. Допустим, что мы имеем дополнительную информацию о точном решении: например, известно что u принадлежит более узкому функциональному классу $\widehat{V}$. Кроме того, функция v также принадлежит $\widehat{V}$. Мы можем использовать этот факт и получить оценку ошибки $e = u - v$ в терминах более сильной меры, если в (1.10) взять супремум по более широкому классу функций w, для которого можно корректно доопределить произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

В частности, предположим, что в задаче (1.4) $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$, $q > 2$. При этом в качестве меры отклонения v от u можно взять

$$|||e|||_{q,\Omega} := \sup_{w\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\mathcal{F}_v(w)|}{\|\nabla w\|_{q^*,\Omega}} \leq \|\nabla e\|_{q,\Omega}, \tag{1.12}$$

где $q^* = \dfrac{q}{q-1}$. Пусть $2 \leq p < q$, тогда $q^* < p^*$. Поскольку $e \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ и для любой функции $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p^*}(\Omega)$ выполнено $\|\nabla w\|_{q^*,\Omega} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{p^*}}\|\nabla w\|_{p^*,\Omega}$, то

$$|||\nabla e|||_{q,\Omega} = \sup_{w\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \nabla e\cdot\nabla w dx}{\|\nabla w\|_{q^*,\Omega}} \geq |\Omega|^{\frac{1}{p^*}-\frac{1}{q^*}} \sup_{w\in \overset{\circ}{W}{}^{1,p^*}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \nabla e\cdot\nabla w dx}{\|\nabla w\|_{p^*,\Omega}} = |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|||\nabla e|||_{p,\Omega}. \tag{1.13}$$

Таким образом, с ростом показателя эти нормы ведут себя точно так же, как и обычные L^q-нормы. Заметим, что $|||\nabla w|||_{2,\Omega} = \|\nabla w\|_{2,\Omega}$ и поэтому $|||\nabla w|||_{q,\Omega}$ оценивается снизу величиной $|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\nabla e\|_{2,\Omega}$. Нормы (1.12) обладают и другими сходными свойствами. Например, для $q \geq 2$ имеют место неравенства

$$\|w\|_{q^*,\Omega} \leq \hat{C}^F_{q^*,q}(\Omega)|||\nabla w|||_{q,\Omega} \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega), \tag{1.14}$$

$$\|w\|_{q^*,\Omega} \leq \hat{C}^P_{q^*,q}(\Omega)|||\nabla w|||_{q,\Omega} \quad \forall w \in W^{1,q}(\Omega), \quad \{\{w\}\}_\Omega = 0, \tag{1.15}$$

причем $\hat{C}^F_{q^*,q}(\Omega) \le c_q(\Omega)C^F(\Omega)$ и $\hat{C}^P_{q^*,q}(\Omega) \le c_q(\Omega)C^P(\Omega)$. Здесь $C^F(\Omega)$ и $C^F(\Omega)$ – это постоянные в соответствующих неравенствах Фридрихса и Пуанкаре, а $c_q(\Omega) = |\Omega|^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{q}}$. Доказательство (1.14) следует непосредственно из оценок

$$\|w\|_{q^*,\Omega} \le |\Omega|^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{2}}\|\hat{w}\|_{2,\Omega} \le C^F(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{2}}\|\nabla w\|_{2,\Omega} \le C^F(\Omega)c_q(\Omega)\|\!|\nabla w|\!\|_{q,\Omega}.$$

Точно так же устанавливается (1.15).

В 2.4 показано, что для $d = 1$ нормы (1.13) эквивалентны стандартным нормам в пространствах Лебега с такими же показателями суммируемости. Вопрос об эквивалентности норм такого типа нормам градиента в соответствующем пространстве L^q (для $d > 1$) рассматривался в [23], [24], где изучалась разрешимость задачи (1.4) в пространствах L^q и соответствующие варианты разложения Гельмгольца для векторных полей. Однако в этих работах использовалось более широкое множество тест-функций, а явно вычисляемые оценки константы в соответствующем неравенстве эквивалентности не приводятся. Можно показать, что нормы (1.13) также эквивалентны нормам градиента в L^q, однако, вопрос о соответствующих константах эквивалентности требует дальнейшего исследования, которое выходит за рамки настоящей статьи.

Другое определение меры отклонения от точного решения можно ввести при помощи подходящей вариационной формулировки. В простейшем случае (1.4) мы определили меру погрешности как норму решения вспомогательной краевой задачи (1.5), в которой правая часть задается функционалом $\mathcal{F}_v$. Эта задача эквивалентна минимизации функционала

$$\inf_{w\in V_0} J_v(w), \qquad J_v(w) := \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2 - \mathcal{F}_v(w),$$

причем $\inf J_v = -\frac{1}{2}\|\nabla e\|^2$. Таким образом, норму отклонения можно определить при помощи равенства

$$\sup_{w\in V_0}\left\{\mathcal{F}_v(w) - \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2\right\} = \frac{1}{2}\|\nabla e\|^2. \tag{1.16}$$

Как будет показано далее, это определение допускает широкие обобщения, которые приводят к множеству различных мер отклонения от точного решения. В соответствии с принятыми в разд. 2 обозначениями (1.16) определяет меру $\mathbf{m}_2(e)$ (см. (2.3)). Там же показано, что норма $\|\!|\nabla e|\!\|_{q,\Omega}$ связана с мерой вариационного типа $\mathbf{m}_q(e)$, которая является обобщением (1.16). Аналогичная мера $\|\!|\nabla e|\!\|_{\infty,\Omega}$ может быть построена и для случая $q = \infty$. Эти меры являются частными случаями обобщенной меры $\mathbf{m}_G$, определенной в (2.1).

В разд. 3 даны двусторонние оценки $\mathbf{m}_q(e)$ и показано, что эта величина оценивается сверху величиной, аналогичной (1.9), в которой слагаемые задаются нормами $\|\nabla v - y\|_{q,\Omega}$ и $\|\operatorname{div} y + f\|_{q,\Omega}$. Далее показано, что надлежащим образом взвешенная сумма этих слагаемых с показателем $q = \infty$ образует мажоранту меры $\mathbf{m}_\infty(e)$. Также показано, что в случае если $q = 2$, а Ω заменена на подобласть ω, сумма этих слагаемых мажорирует некоторую локальную меру e. Основные идеи сначала подробно обсуждаются на самом простом примере задачи для уравнения Пуассона с краевыми условиями Дирихле. В разд. 4 мы кратко рассматриваем их обобщения для уравнений более общего вида.

2. МЕРЫ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Обобщенная мера отклонения от точного решения

В определении (1.5) функционал $\mathcal{F}_v(w)$ был задан на функциях $w \in V_0$. Однако, если решение u и функция v принадлежат более узкому функциональному классу так, что $e = u - v \in \hat{V}_0 \subset V_0$, то мы можем доопределить его на более широком множестве $\hat{V}_0'$ тест-функций w (предполагается, что эти функции обращаются в ноль на границе области), так что значение $\mathcal{F}_v(w) = \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla w dx$ определено.

Пусть $G : \hat{V}_0' \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ – выпуклый полунепрерывный снизу функционал, такой что $G(w) = 0$, если $w \equiv 0$ и G коэрцитивен на функциях из $\hat{V}_0'$. Для $e \in \hat{V}_0$ введем меру

$$\mathbf{m}_G(e) := \sup_{w \in \hat{V}_0'} \{\mathcal{F}_v(w) - G(w)\} \geq 0. \tag{2.1}$$

В зависимости от выбора функционала G, мы получаем различные меры для функции e. В частности, если задана неотрицательная выпуклая функция g такая, что $g(0) = 0$, то функционал можно определить в интегральной форме

$$G(w) := \int_\Omega g(|\nabla w|)dx. \tag{2.2}$$

При этом равенство (1.8) оказывается простейшей формой (2.1), соответствующей выбору $g(t) = \frac{1}{2}t^2$. В этом случае $\hat{V}_0 = \hat{V}_0' = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Нетрудно видеть, что $\mathbf{m}_G(e) \geq 0$, причем если $v = u$, то $\mathcal{F}_v(w) \equiv 0$ и мера обращается в ноль. Если вариационная задача в (2.1) всегда имеет единственное решение (например для строго выпуклой функции g), то $\mathbf{m}_G(e) = 0$ означает $e = 0$.

Действительно, предположим что $e \not\equiv 0$ и при этом $\mathbf{m}_G(e) = 0$. Супремум в (2.1) достигается на единственной функции и эта функция $w \equiv 0$. Заметим, что если $e \not\equiv 0$, то всегда найдется функция $\overline{w} \in V_0$ такая, что

$$\mathcal{F}_v(w) = \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla \overline{w} dx > 0.$$

Отсутствие такой функции означало бы, что тождество

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w dx = \int_\Omega f w dx$$

выполняется для любой функции $w \in V_0$, но в этом случае $v = u$ и $e = 0$. Поскольку g строго выпукла, то $g(|\nabla \overline{w}|) > g(0) = 0$, и мы заключаем, что

$$\sup_{w \in \hat{V}_0'} \int_\Omega (\nabla e \cdot \nabla w - g(\nabla w))dx > \int_\Omega (\nabla e \cdot \nabla \overline{w})dx > 0.$$

Следовательно, супремум больше нуля и $w \equiv 0$ не может быть решением вариационной задачи. Мы пришли к противоречию, которое доказывает, что $\mathbf{m}_G(e) = 0$ тогда и только тогда, когда $e = 0$.

Мера $\mathbf{m}_G(e)$ определяет множество

$$\mathcal{N}_u^\epsilon := \{e \in \hat{V}_0 \,|\, \mathbf{m}_G(e) < \epsilon\},$$

которое является ε-окрестностью точного решения u. Нетрудно показать, что множество $\mathcal{N}_u^\epsilon$ является выпуклым. Пусть $e_1 = v_1 - u$ и $e_2 = v_2 - u$ принадлежат $\mathcal{N}_u^\epsilon$. Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ выполнено

$$\sup_{w \in \hat{V}_0'} \int_\Omega (\nabla(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \cdot \nabla w - g(\nabla w))dx \leq \lambda_1 \sup_{w \in \hat{V}_0'} \int_\Omega (\nabla e_1 \cdot \nabla w - g(\nabla w))dx +$$
$$+ \lambda_2 \sup_{w \in \hat{V}_0'} \int_\Omega (\nabla e_2 \cdot \nabla w - g(\nabla w))dx = \lambda_1 \mathbf{m}_g(e_1) + \lambda_2 \mathbf{m}_g(e_2) \leq \epsilon.$$

Таким образом, меняя функцию g, можно генерировать различные множества выпуклых окрестностей точного решения, т.е. задавать ту или иную локальную топологию в окрестности точного решения краевой задачи. Далее мы рассмотрим некоторые примеры, в которых (2.1) определяет меры, более сильные, чем энергетическая норма. При этом не исключаются такие ситуации, где мера может принимать бесконечные значения.

2.2. *Мера* $\mathbf{m}_q$

Пусть $e \in \hat{V}_0 = \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$. В этом случае $\hat{V}_0' = \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)$, где $q^* := \dfrac{q}{q-1}$, и мы можем определить следующую меру степенного типа:

$$\mathbf{m}_q(e) := \sup_{w \in \hat{V}_0'} \int_\Omega \left(\nabla e \cdot \nabla w - \frac{1}{q^*} |\nabla w|^{q^*} \right) dx. \tag{2.3}$$

Формально все изложение ниже верно при любом $q > 1$, но поскольку нас интересуют меры более сильные, чем энергетическая норма, мы будем предполагать что $q \geq 2$. Максимайзер $w_{q^*} \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)$ в (2.3) существует и удовлетворяет уравнению

$$\int_\Omega |\nabla w_{q^*}|^{q^*-2} (\nabla w_{q^*} \cdot \nabla) dx = \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla w dx \qquad \forall w \in \hat{V}_0'. \tag{2.4}$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{m}_q(e) = \int_\Omega \left(\nabla e \cdot \nabla w_{q^*} - \frac{1}{q^*} |\nabla w_{q^*}|^{q^*} \right) dx = \left(1 - \frac{1}{q^*} \right) \int_\Omega |\nabla w_{q^*}|^{q^*} dx = \frac{1}{q} \|\nabla w_{q^*}\|_{q^*,\Omega}^{q^*}, \tag{2.5}$$

т.е. мера отклонения от точного решения определяется нормой ∇w_{q^*}, где w_{q^*} — это решение нелинейной вспомогательной задачи (2.4), в которой правая часть задана функционалом $\mathcal{F}_v$.

Другое представление меры $\mathbf{m}_q(e)$ следует из равенства

$$\mathbf{m}_q(e) = \sup_{\substack{w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega) \\ \|w\|_{q^*} = 1}} \sup_{\mu \geq 0} \mu \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla w dx - \frac{\mu^{q^*}}{q^*}. \tag{2.6}$$

Если $e \not\equiv 0$, то супремум по μ достигается на $\bar{\mu} = \left(\int_\Omega \nabla e \cdot \nabla w dx \right)^{\frac{1}{q^*-1}}$ (ясно, что при вычислении супремума в (2.6) те функции w, на которых интеграл отрицателен, можно исключить). Подставляя это значение $\bar{\mu}$ и проводя формальные преобразования, получаем (с учетом (1.12)), что

$$\mathbf{m}_q(e) = \frac{1}{q} \sup_{\substack{w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega) \\ \|w\|_{q^*} = 1}} \left(\int_\Omega \nabla e \cdot \nabla w dx \right)^q = \frac{1}{q} |\|\nabla e\||_{q,\Omega}^q \leq \frac{1}{q} \|\nabla e\|_{q,\Omega}^q. \tag{2.7}$$

Чтобы оценить меру снизу, заметим, что для любого $\mu > 0$,

$$\mathbf{m}_g(e) \geq \int_\Omega \left(\mu \nabla e \cdot \nabla e - \frac{\mu^q}{q} |\nabla e|^q \right) dx.$$

Положим $\mu = \bar{\mu} := \left(\dfrac{\|\nabla e\|^2}{\|\nabla e\|_{q,\Omega}^q} \right)^{\frac{1}{q-1}}$. Тогда

$$\mathbf{m}_g(e) \geq \frac{1}{q^*} \left(\frac{\|\nabla e\|^2}{\|\nabla e\|_{q,\Omega}} \right)^{q^*}. \tag{2.8}$$

Эту оценку можно переписать в виде

$$\mathbf{m}_g(e) \geq \frac{1}{q} C(q,e) \|\nabla e\|_{q,\Omega}^q, \qquad \text{где} \qquad C(q,e) = \frac{q}{q^*} \frac{\|\nabla e\|^{2q^*}}{\|\nabla e\|_{q,\Omega}^{q^*+q}}. \tag{2.9}$$

В некоторых случаях величину $C(q,e)$ можно оценить снизу. Например, если известно, что $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ и что аппроксимация v также принадлежит $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ (это условие обычно выполняется), то $\|\nabla e\|_\infty = \kappa_\infty < \infty$. Более того, имеется (грубая) оценка $\kappa \le \|\nabla u\|_\infty + \|\nabla v\|_\infty$ и величину $C(q,e)$ можно оценить снизу величиной $\frac{q}{q^*}\kappa^{q^*(2-q)}$ поскольку $\|\nabla e\|_q^q \le \kappa^{q-2}\|\nabla e\|^2$. Таким образом,

$$\mathbf{m}_g(e) \ge \frac{1}{q^*}\kappa_\infty^{q^*(2-q)}\|\nabla e\|_q^q. \tag{2.10}$$

Предположим, что известна более слабая априорная оценка точного решения $\|\nabla v\|_{t,\Omega} \le \kappa_t$, где $q < t < \infty$. Используем интерполяционное неравенство (см., например, [25], [26])

$$\|\nabla e\|_q \le \|\nabla e\|_{2,\Omega}^{\theta}\|\nabla e\|_{t,\Omega}^{1-\theta}, \quad \frac{1}{q} - \frac{\theta}{2} = \frac{1-\theta}{t}$$

и оценим правую часть (2.8). В этом случае мы приходим к оценке

$$\mathbf{m}_g(e) \ge \frac{1}{q^*}\kappa_t^{(1-\theta)\mu q^*}\|\nabla e\|_{q,\Omega}^{\beta}, \tag{2.11}$$

где $\beta = (\mu - 1)q^*$, $\theta = \frac{2}{q}\frac{t-q}{t-2} < 1$ и $\mu = q\frac{t-2}{t-q}$.

2.3. Мера $\mathbf{m}_\infty$

Мера, определенная (2.1), тем сильнее, чем шире пространство тест-функций $\hat{V}_0'$. Если u и функция v принадлежат $\overset{\circ}{W}{}^{1,\infty}(\Omega) + u_0$, то $\hat{V}_0'$ можно определить как $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. Положим в (2.1)

$$g(\nabla w) = \kappa|\nabla w|,$$

где κ – это положительная постоянная (анализ нетрудно обобщить на случай, когда κ – это функция x такая, что $\kappa(x) \in [\kappa_-, \kappa_+]$). В этом случае

$$\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = \sup_{w \in \hat{V}_0' \setminus \{0\}} \int_\Omega (\nabla e \cdot \nabla w - \kappa|\nabla w|)dx. \tag{2.12}$$

В отличие от предыдущего случая, максимайзер в (2.12) может не существовать (как функция из $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$), а сама мера может принимать бесконечное значение. Тем не менее ее можно использовать для определенной характеристики величины e. Нетрудно видеть, что если $|\nabla e| \le \kappa$ почти везде в Ω, то

$$\mathbf{m}_\infty(\nabla e) \le \sup_{w \in \hat{V}_0' \setminus \{0\}} \int_\Omega (|\nabla e| - \kappa)|\nabla w|\,dx = 0.$$

Определим величину

$$|\!|\!|\nabla e|\!|\!|_\infty := \sup_{w \in V_0' \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega \nabla e \cdot \nabla w dx}{\|\nabla w\|_{1,\Omega}} \le \|\nabla w\|_\infty. \tag{2.13}$$

Эта норма является более сильной, чем $|\!|\!|\nabla e|\!|\!|_{q,\Omega}$ для любого $q < +\infty$. Действительно, так как $\|\nabla w\|_{1,\Omega} \le |\Omega|^{1/q}\|\nabla w\|_{q^*,\Omega}$, то

$$|\!|\!|\nabla e|\!|\!|_\infty \ge \frac{1}{|\Omega|^{1/q}} \sup_{w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)} \frac{\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w dx}{\|\nabla w\|_{q^*,\Omega}} = \frac{1}{|\Omega|^{1/q}}|\!|\!|\nabla e|\!|\!|_q. \tag{2.14}$$

Теперь мы покажем, что

$$\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = \begin{cases} 0, & |||\nabla e|||_{\infty,\Omega} \le \kappa, \\ +\infty, & |||\nabla e|||_{\infty,\Omega} \ge \kappa. \end{cases} \tag{2.15}$$

Для этого заметим, что любую функцию $\hat{V}_0'$ можно представить в виде $\lambda\overline{w}$, где $\lambda \ge 0$, а $\overline{w} \in \hat{V}_0'$ и $\|\nabla\overline{w}\|_{1,\Omega} = 1$. Поэтому

$$\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = \sup_{\lambda\ge 0} \sup_{\substack{\overline{w}\in\hat{V}_0',\\ \|\nabla\overline{w}\|_{1,\Omega}=1}} \left(\int_\Omega \nabla e\cdot\nabla\lambda\overline{w}dx - \kappa\right) = \sup_{\lambda\ge 0}\lambda\left(\sup_{\substack{\overline{w}\in\hat{V}_0',\\ \|\nabla\overline{w}\|_{1,\Omega}=1}} \int_\Omega \nabla e\cdot\nabla\overline{w}dx - \kappa\right) = \sup_{\lambda\ge 0}\lambda\left(|||\nabla e|||_\infty - \kappa\right)$$

и мы приходим к (2.15).

Рассмотрим некоторые другие свойства этой меры. Предположим, что $\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = 0$. В этом случае

$$0 = \mathbf{m}_\infty(\nabla e) \ge \sup_{\lambda>0}\lambda\int_\Omega (|\nabla e| - \kappa)|\nabla e|\,dx$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega (|\nabla e| - \kappa)|\nabla e|\,dx \le 0. \tag{2.16}$$

Эта оценка, конечно, не означает, что $|\nabla e| \le \kappa$ почти всюду в Ω. Однако мы можем достаточно просто оценить величину

$$\{|\nabla e| - \kappa\}_\oplus := \max_{x\in\Omega}\{|\nabla e| - \kappa, 0\}.$$

Определим множества

$$\Omega_-^\kappa := \{x\in\Omega \,|\, |\nabla e| \le \kappa\} \quad \text{и} \quad \Omega_+^\kappa = \Omega\backslash\Omega_-^\kappa.$$

В соответствии с (2.16) имеем

$$\kappa\int_{\Omega_+^\kappa}(|\nabla e| - \kappa)dx \le \int_{\Omega_+^\kappa}(|\nabla e| - \kappa)|\nabla e|\,dx \le \int_{\Omega_-^\kappa}(\kappa - |\nabla e|)|\nabla e|\,dx \le \int_{\Omega_-^\kappa}\kappa(\kappa - |\nabla e|)\,dx \le \kappa^2|\Omega|.$$

Отсюда мы заключаем, что если $\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = 0$, то

$$\int_\Omega \{|\nabla e| - \kappa\}_\oplus dx \le \kappa|\Omega|. \tag{2.17}$$

Далее будет построен критерий, позволяющий установить, что для функции v действительно $\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = 0$. В соответствии с (2.17) это дает определенную информацию о том, насколько существенно $|\nabla e|$ превышает κ.

2.4. Случай $d = 1$

В случае $d = 1$ можно установить простую зависимость между $|||\cdot|||_\infty$ и $|||\cdot|||_q$ и обычными нормами $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_q$. Пусть $\Omega = (0, l)$, тогда

$$|||e'|||_\infty = \sup_{w\in W^{1,1}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_0^l e'w'dx}{\int_0^l |w'|dx}.$$

Рассмотрим функции вида

$$w(x) = \int_0^x \phi dx - x\{\{\phi\}\}_\Omega, \quad w' = \phi - \{\{\phi\}\}_\Omega, \tag{2.18}$$

где $\phi \in L^1(\Omega)$, а $\{\{\phi\}\}_\Omega := \frac{1}{l}\int_0^l \phi dx$. Нетрудно видеть, что $w(0) = w(l) = 0$ и

$$\int_0^l |w'|dx \le \int_0^l |\phi|\,dx + \left|\int_0^l |\varphi| dx\right| \le 2\int_0^l |\phi| dx.$$

Так как

$$\int_0^l e'dx = 0, \quad \text{то} \quad \int_0^l e'w'dx = \int_0^l e'\phi dx$$

и, следовательно,

$$|\!|\!| e' |\!|\!|_\infty \ge \sup_{\phi\in L^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^l e'\phi dx}{2\int_0^l |\phi| dx} = \frac{1}{2}\|e'\|_\infty. \tag{2.19}$$

Пример ниже показывает, что в общем случае постоянную 1/2 увеличить нельзя. Пусть $l = 1$, $\xi \in [0.5, 1)$ и

$$e(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\xi}, & x \in [0,\xi), \\ \dfrac{1-x}{1-\xi}, & x \in [\xi, 1], \end{cases} \quad \|e'\|_\infty = \frac{1}{1-\xi}.$$

При этом $\int_0^l e'w'dx = \frac{w(\xi)}{\xi(1-\xi)}$. Таким образом, при вычислении супремума в (2.19) мы приходим к задаче: найти непрерывную функцию w такую, что $w(\xi) = 1$ и $w(0) = w(1) = 0$ с минимальным интегралом $\int_0^1 |w'|\,dx$. Ясно, что эта функция должна быть монотонна на каждом из интервалов $(0,\xi)$ и $(\xi,1)$ и должна сохранять знак. В этом случае $\int_0^1 |w'|\,dx = 2w(\xi)$, а супремум равен $\frac{1}{2\xi(1-\xi)}$, так что $|\!|\!| e' |\!|\!|_\infty = \frac{1}{2\xi(1-\xi)}$ и $\frac{|\!|\!| e' |\!|\!|_\infty}{\|e'\|_\infty} = \frac{1}{2\xi}$. При $\xi = \frac{1}{2}$ две нормы совпадают, но если ξ стремится к 1, то коэффициент пропорциональности между нормами стремится к 1/2.

Аналогичную оценку можно получить для $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_q$ с $q \in (1,+\infty)$. Для этого используем представление (2.18) с $\phi \in L^{q^*}(\Omega)$. Тогда

$$|\!|\!| e' |\!|\!|_{q,\Omega} = \sup_{w\in W^{1,q^*}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^l e'w'dx}{\|w'\|_{q^*,\Omega,}} \ge \sup_{\phi\in L^{q^*}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_0^l e'\phi dx}{\|\phi\|_{q^*\Omega} + |\{\{\phi\}\}_\Omega|\, l^{1/q^*}}.$$

Поскольку

$$\left|\int_0^l \phi dx\right| \le l^{1/q}\|\phi\|_{q^*,\Omega} \quad \text{и} \quad |\{\{\phi\}\}_\Omega|\, l^{1/q^*} \le l^{1/q+1/q^*-1}\|\phi\|_{q^*,\Omega},$$

то мы заключаем что $|\!|\!| e' |\!|\!|_{q,\Omega} \ge \frac{1}{2}\|e'\|_{q,\Omega}$.

3. МАЖОРАНТА $\mathbf{m}_G(e)$

3.1. Общий случай

Перейдем к двусторонним оценкам величины $\mathbf{m}_G(e)$. Оценка снизу вытекает непосредственно из определения (2.1). Действительно, для любого конечномерного пространства W_0^k ($\dim W_0^k = k$) такого, что $W_0^k \subset \hat{V}_0'$

$$\mathbf{m}_G(e) \geq \sup_{w \in W_0^k} \{ \mathcal{F}_v(w) - G(w) \} = M_{G,\ominus}^k(v). \tag{3.1}$$

Для получения этой миноранты надо решить конечномерную задачу, так что величина $M_{G,\ominus}^k(e)$ практически вычисляема. Более того, точное решение этой вспомогательной задачи не обязательно и можно использовать и любое приближенное решение при условии, что оно не сильно отличается по функционалу от точного. Если в совокупности подпространства W_0^k предельно плотны в $\hat{V}_0'$, то последовательность $M_{G,\ominus}^k(v)$ стремится (снизу) к $\mathbf{m}_G(v)$ при $k \to +\infty$. Таким образом, вычисление оценки снизу не сопряжено с какими-то принципиальными трудностями.

Ситуация с оценкой сверху сложнее. Вычислить супремум по бесконечному набору функций в общем случае не представляется возможным. Поэтому надо найти другой метод, позволяющий оценить этот супремум сверху. Рассмотрим случай, когда функционал G задан соотношением (2.2). Используя тождество (1.7), мы получаем

$$\mathbf{m}_G(e) = \sup_{w \in \hat{V}_0'} \int_\Omega (\nabla e \cdot \nabla w - g(|\nabla w|))dx = \int_\Omega (\nabla v - y) \cdot \nabla w dx + \int_\Omega (\operatorname{div} y + f) w dx - \int_\Omega g(|\nabla w|)\, dx, \tag{3.2}$$

где $y \in Y_{\rm div} := \left\{ y \in \nabla \hat{V}_0, \operatorname{div} y \in L^\mu(\Omega) \right\}$. Здесь $\nabla \hat{V}_0$ обозначает векторнозначные функции, являющиеся градиентами функций из $\hat{V}_0$, а μ определяется регулярностью f так, чтобы $(\operatorname{div} y + f) w \in L^1(\Omega)$ для любого w. В этом случае

$$\int_\Omega (\operatorname{div} y + f) w dx \leq \|\operatorname{div} y + f\|_{\mu,\Omega} \|w\|_{\mu^*,\Omega}. \tag{3.3}$$

Величина μ^* ограничивается условием вложения $W_\Omega^{1,1} \hookrightarrow L^{\mu^*}(\Omega)$ и определяется соотношением $\mu^* \leq \dfrac{d}{d-1}$ при $d \geq 2$ (для $d = 1$ можно взять любое конечное μ^*). При выполнении этих условий имеет место обобщенное неравенство Фридрихса

$$\|w\|_{\mu^*,\Omega} \leq C_{\mu^*,1}^F(\Omega, d) \|\nabla w\|_{1,\Omega} \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega), \tag{3.4}$$

где $C_{\mu^*,1}^F$ обозначает соответствующую константу. Оценив при помощи (3.2) и (3.3) правую часть (3.4), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_G(e) &\leq \sup_{w \in V_0'} \left\{ \int_\Omega |\nabla v - y| |\nabla w|\, dx + C_{\mu^*,1}^F \|\operatorname{div} y + f\|_{\mu,\Omega} \int_\Omega |\nabla w| dx - \int_\Omega g(|\nabla w|) dx \right\} \leq \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \int_\Omega \left(\left(|\nabla v - y| + C_{\mu^*,1}^F \|\operatorname{div} y + f\|_{\mu,\Omega} \right) t - g(t) \right) dx \leq \\ &\leq \int_\Omega g^* \left(|\nabla v - y| + C_{\mu^*,1}^F \|\operatorname{div} y + f\|_{\mu,\Omega} \right) dx =: M_{G,\oplus}^1(v). \end{aligned} \tag{3.5}$$

В частности, если $\operatorname{div} y + f = 0$, то

$$\mathbf{m}_G(e) \leq \int_\Omega g^* (|\nabla v - y|)\, dx. \tag{3.6}$$

Заметим, что если g задается квадратичной функцией, то (3.6) переходит в известную оценку Прагера-Синга.

Использование (3.6) требует оценки постоянной $C^{F}_{\mu^*,1}$, что в общем случае может вызвать затруднения. Поэтому имеет смысл модифицировать эту оценку, введя некоторые (незначительные) ограничения на вектор-функцию y, предположив, что $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{\Omega}_i$, где Ω_i – выпуклые непересекающиеся подобласти и

$$\int_{\Omega_i} (\operatorname{div} y + f)dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{3.7}$$

В этом случае при оценке интеграла (3.3) можно применить метод, предложенный в [3], в котором для подобластей вместо неравенства Фридрихса используются неравенства Пуанкаре

$$\left\| w - \{\{w\}\}_{\Omega_i} \right\|_{\mu^*,\Omega_i} \le C^{P}_{\mu^*,1} \|\nabla w\|_{1,\Omega_i}, \tag{3.8}$$

где $\mu^* < \dfrac{d}{d-1}$, $\{\{w\}\}_{\Omega_i}$ обозначает среднее значение функции в Ω_i, а постоянная $C^{P}_{\mu^*,1}$ для выпуклых областей вычислена в [27]. Введем обозначение

$$\mathcal{R}_{\Omega_i} := C^{P}_{\mu^*,1}(\Omega_i) \|\operatorname{div} y + f\|_{\mu,\Omega_i}.$$

Тогда

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} y + f) w dx \le \sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}_{\Omega_i} \|\nabla w\|_{1,\Omega_i}$$

и мы модифицируем (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_G(e) &\le \sup_{w \in \hat{V}_0'} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} ((|\nabla v - y| + R_{\Omega_i}) |\nabla w| - g(|\nabla w|)) dx \right\} \le \sum_{i=1}^{N} \sup_{t_i \ge 0} \int_{\Omega_i} ((|\nabla v - y| + R_{\Omega_i}) t_i - g(t_i)) dx \le \\ &\le \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} g^*(|\nabla v - y| + R_{\Omega_i}) dx =: M^{N}_{G,\oplus}(v). \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2. Мажоранта $\mathbf{m}_q(e)$

Пусть $f \in L^q(\Omega)$ и известно, что точное решение обладает повышенной суммируемостью, так что

$$u \in K_q(\Omega) := W^{1,q}(\Omega) \cap (V_0 + u_0), \quad 2 < q < +\infty.$$

Мы хотим получить явно вычисляемые оценки меры $\mathbf{m}_q(e)$, введенной в п. 2.2 . Естественно, мы должны потребовать, чтобы функция v также принадлежала множеству $K_q(\Omega)$. Заметим, что последнее условие обычно выполняется автоматически, так как в большинстве численных методов аппроксимации строятся при помощи кусочно гладких функций (например полиномов). Введем множество вектор-функций

$$H_{\operatorname{div},q} := \{ y \in L^q(\Omega, \mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{div} y \in L^q(\Omega) \}.$$

Учитывая (1.9), мы заключаем, что для любой функции $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)$ и любой вектор-функции $y \in H_{\operatorname{div},q}$ выполнено тождество

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\nabla e \cdot \nabla w - \frac{1}{q^*} |\nabla w|^{q^*} \right) dx &= \int_{\Omega} (y - \nabla v) \cdot \nabla w dx + \int_{\Omega} (f + \operatorname{div} y) w dx - \frac{1}{q^*} \|\nabla w\|^{q^*}_{q^*,\Omega} \le \\ &\le \left(\|\nabla v - y\|_{q,\Omega} + C_{q^*}(\Omega) \|\operatorname{div} y + f\|_{q,\Omega} \right) \|\nabla w\|_{q^*,\Omega} - \frac{1}{q^*} \|\nabla w\|^{q^*}_{q^*,\Omega}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $C^{F}_{q^*}$ является постоянной в неравенстве

$$\|w\|_{q^*,\Omega} \le C^{F}_{q^*}(\Omega) \|\nabla w\|_{q^*,\Omega} \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega). \tag{3.11}$$

Оценивая супремум по w сверху, получаем оценку

$$\mathbf{m}_q(e) \le \frac{1}{q}\left(\|\nabla v - y\|_{q,\Omega} + C^F_{q^*}(\Omega)\|\operatorname{div} y + f\|_{q,\Omega}\right)^q. \tag{3.12}$$

С учетом (2.7) приходим к следующему результату.

Утверждение 1. *Для любой функции $v \in K_q(\Omega)$ имеет место оценка*

$$\|\nabla e\|_{q,\Omega} \le \|\nabla v - y\|_{q,\Omega} + C^F_{q^*}(\Omega)\|\operatorname{div} y + f\|_{q,\Omega}, \tag{3.13}$$

где y — произвольная векторнозначная функция из $H_{\mathrm{div},q}$.

При преобразовании (3.10) можно пойти несколько иным путем и использовать вариант неравенства Юнга (см., например, [25], [26])

$$\zeta\zeta^* \le \frac{1}{q}\alpha^{\frac{q}{q^*}}\zeta^q + \frac{1}{\alpha q^*}(\zeta^*)^{q^*},$$

которое выполняется для сопряженных чисел α и α^* и любых неотрицательных ζ и ζ^*. Применив его, получаем оценки

$$\|\nabla v - y\|_{q,\Omega}\|\nabla w\|_{q^*,\Omega} \le \frac{\alpha^{\frac{q}{q^*}}}{q}\|\nabla v - y\|^q_{q,\Omega} + \frac{1}{q^*\alpha}\|\nabla w\|^{q^*}_{q^*,\Omega},$$

и

$$C^F_{q^*}(\Omega)\|\operatorname{div} y + f\|_{q,\Omega}\|\nabla w\|_{q^*,\Omega} \le \frac{(\alpha^*)^{\frac{q}{q^*}}}{q}(C^F_{q^*})^q\|\operatorname{div} y + f\|^q_{q,\Omega} + \frac{1}{q^*\alpha^*}\|\nabla w\|^{q^*}_{q^*,\Omega}.$$

Применив их в (3.10), получаем следующую мажоранту:

$$\mathbf{m}_q(e) \le M_{q,\oplus}(e) := \frac{1}{q}\left(\alpha^{\frac{q}{q^*}}\|\nabla v - y\|^q_{q,\Omega} + (\alpha^*)^{\frac{q}{q^*}}(C^F_{q^*})^q\|\operatorname{div} y + f\|^q_{q,\Omega}\right). \tag{3.14}$$

Нетрудно видеть, что правые части оценок (3.13) и (3.14) не содержат неизвестных функций, а соответствующие нормы представлены интегралами и могут быть явно вычислены.

В частности, если $q = q^* = 2$, то мы получаем известную оценку (см., [3], [2])

$$\|\nabla(u - v)\|^2 = 2\mathbf{m}_g(e) \le \alpha\|\nabla v - y\|^2 + \alpha^*(C^F)^2\|\operatorname{div} y + f\|^2, \tag{3.15}$$

где C_2 совпадает с постоянной в неравенстве Фридрихса для функций из пространства $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$.

3.2. Мажоранта $\mathbf{m}_\infty(e)$

Теперь мы считаем, что $f \in L^\infty(\Omega)$ и что точное решение u, и аппроксимация v принадлежат множеству

$$K_\infty(\Omega) := W^{1,\infty}(\Omega) \cap (V_0 + u_0).$$

В качестве $\hat{V}_0'$ используем пространство $\mathring{W}^{1,1}(\Omega)$, а вместо $H_{\mathrm{div},q}$ введем множество

$$y \in H_{\mathrm{div},\infty}(\Omega) := \{y \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{div} y \in L^\infty(\Omega)\}.$$

Преобразуем выражение для меры следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{m}_\infty(\nabla e) &= \sup_{w\in\hat{V}_0^*}\int_\Omega \big(f + \operatorname{div} y)w + (y - \nabla v)\cdot\nabla w - \kappa|\nabla w|\big)dx \le \\
&\le \sup_{w\in\hat{V}_0^*}\left\{\|f + \operatorname{div} y\|_{\infty,\Omega}\int_\Omega |w|\,dx + \int_\Omega ((y - \nabla v)\cdot\nabla w - \kappa|\nabla w|)dx\right\} \le \\
&\le \sup_{w\in\hat{V}_0^*}\int_\Omega \Big((C^F_{1,1}(\Omega)\|f + \operatorname{div} y\|_{\infty,\Omega} - \kappa)|\nabla w| + (y - \nabla v)\cdot\nabla w\Big)dx.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Здесь $C^F_{1,1}(\Omega)$ – постоянная в неравенстве Фридрихса $\|w\|_{1,\Omega} \le C^F_{1,1}(\Omega\|\nabla w\|_{1,\Omega}$ для любого $w \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$. Подынтегральное выражение имеет вид

$$
(\mathcal{R}_y - \kappa)|\nabla w| + (y - \nabla v)\cdot\nabla w,
$$

где $\mathcal{R}_y := C^F_{1,1}(\Omega)\|f + \operatorname{div} y\|_{\infty,\Omega}$ – это неотрицательная постоянная. Если на некотором открытом множестве ω с положительной мерой выполнено условие $\mathcal{R}_y - \kappa > |y - \nabla v|$, то выбрав функцию w с носителем на этом множестве, получаем $\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = +\infty$. Напротив, если для почти всех $x \in \Omega$ выполнено

$$
\kappa \ge \mathcal{R}_y + |y - \nabla v|,
$$

то подынтегральное выражение всегда неположительно и $\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = 0$. С учетом (2.15) мы приходим к следующему результату: если для $v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ существует функция $y \in H_{\operatorname{div},\infty}(\Omega)$ такая, что почти везде в Ω выполняется условие

$$
C^F_{1,1}\|f + \operatorname{div} y\|_{\infty,\Omega} + |y - \nabla v| \le \kappa,
\tag{3.17}
$$

то $\||\nabla(u - v)|\|_{\infty,\Omega} \le \kappa$.

Пример. Рассмотрим простой пример, который иллюстрирует условие (3.17). Функция $u = \frac{1}{2}x(x + 1)$ является решением уравнения $u'' = 1$ с условиями $u(0) = 0$ и $u(1) = 1$. Пусть $v = u + e(x)$, причем величина отклонения удовлетворяет условию

$$
\|e'\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)}|e'(x)| = \zeta_\oplus \quad \text{и} \quad \inf_{x\in(0,1)}|e'(x)| = 0.
\tag{3.18}
$$

Положим $y = x + b + \frac{1}{2}$, где b – произвольная постоянная. В этом случае $\operatorname{div} y + f = y' - 1 = 0$ и первое слагаемое в (3.17) обращается в ноль. Вычислим второе слагаемое

$$
|y - \nabla v| = \left|x + b + \frac{1}{2} - u' - e'\right| = |b - e'(x)|.
$$

Учитывая (3.18), мы заключаем, что $\|y - \nabla v\|_\infty = \max\{|b|, |b - \zeta_\oplus|\}$. Выбрав $b = \frac{\zeta_\oplus}{2}$, получим

$$
\|y - \nabla v\|_{\infty,\Omega} = \|y - v'\|_{\infty,(0,1)} = \frac{\zeta_\oplus}{2}.
$$

Таким образом, в (3.17) $\kappa = \frac{\zeta_\oplus}{2}$ и, следовательно, $\||e'|\|_\infty \le \frac{\zeta_\oplus}{2}$. Учитывая (2.19), заключаем, что для L^∞ нормы отклонения должно выполняться $\||e'|\|_\infty \le \zeta_\oplus$. Эта оценка действительно выполняется (см. (3.18)).

Другие мажоранты величины $\mathbf{m}_\infty(e)$ можно получить, используя принцип декомпозиции области. При этом вместо постоянной $C^F_{1,1}(\Omega)$ используются локальные постоянные в неравенствах типа Пуанкаре. Пусть Ω разделена на выпуклые непересекающиеся подобласти Ω_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, так что $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$ и

$$
\{\{\operatorname{div} y + f\}\}_{\Omega_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N.
\tag{3.19}
$$

В соответствии с [28] для любой функции $w \in W^{1,1}(\Omega)$ с нулевым средним выполняется неравенство Пуанкаре

$$\|w\|_{1,\Omega_i} \leq C^P_{1,1}(\Omega_i)\|\nabla w\|_{1,\Omega_i} \tag{3.20}$$

с постоянной $C^P_{1,1}(\Omega_i) = \dfrac{\operatorname{diam}\Omega_i}{2}$. Заметим, что условия (3.19) не создают существенных технических трудностей, если только число подобластей не слишком велико. С учетом (3.20) мы преобразуем супремум в (3.16) несколько иным способом

$$\mathbf{m}_\infty(\nabla e) = \sup_{w\in\hat{V}_0'}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\left((f + \operatorname{div} y)w + (y - \nabla v)\cdot\nabla w - \kappa|\nabla w|\right)dx \leq$$
$$\leq \sup_{w\in\hat{V}_0'}\int_{\Omega}(\mathcal{R}^N_y|\nabla w| + (y - \nabla v)\cdot\nabla w - \kappa|\nabla w|)dx.$$

Здесь $\mathcal{R}^N_y$ – это функция, определенная соотношением $\mathcal{R}^N_y(x) = \mathcal{R}_{\Omega_i}$, если $x \in \Omega_i$, где $\mathcal{R}_{\Omega_i} = C^P_{1,1}(\Omega_i)\|f + \operatorname{div} y\|_{\infty,\Omega_i}$. Ясно, что $\mathcal{R}_{\Omega_i}$ является неотрицательной постоянной, ассоциированной с Ω_i, так что $\mathcal{R}^N_y$ является кусочно-постоянной функцией. Мы приходим к следующей модификации условия (3.17): если для $v \in W^{1,\infty}_0(\Omega)$ существует функция y такая, что почти везде в Ω выполняется условие

$$\mathcal{R}^N_y + |y - \nabla v| \leq \kappa, \tag{3.21}$$

то $|\!|\!|\nabla(u - v)|\!|\!|_\infty \leq \kappa$.

3.3. Локальные меры расстояния до точного решения

Если множество пробных функций w ограничить функциями, отличными от нуля только в подобласти $\omega \subset \Omega$, то мы получим меры расстояния локального типа. Пусть $\hat{V}_0 = \{w \in W^{1,2}(\Omega)\,|\, w = 0 \text{ в } \Omega' := \Omega\backslash\overline{\omega}\}$, а $\mathcal{H}(\omega)$ обозначает множество функций, гармонических в ω, т.е.,

$$\mathcal{H}(\omega) := \left\{h(x) \in \hat{V}_0 \,|\, \int_{\Omega}\nabla h\cdot\nabla w dx = 0 \quad \forall w \in \hat{V}_0\right\}.$$

Границы областей ω и Ω' предполагаются липшицевыми. Определим величину

$$|\!|\!|\nabla e|\!|\!|_{2,\omega} := \sup_{w\in\hat{V}_0\backslash\{0\}}\frac{\int_{\Omega}\nabla e\cdot\nabla w dx}{\|\nabla w\|_{2,\omega}}, \tag{3.22}$$

которая является лишь полунормой и превращается в норму только на фактор-пространстве функций, отличающихся на гармоническую функцию. Введем соответствующую фактор-норму $\|e\|_{\hat{V}_0\backslash\mathcal{H}} := \inf_{h\in\mathcal{H}(\omega)}\|\nabla(e - h)\|_{2,\omega}$. Нетрудно видеть, что $|\!|\!|\nabla e|\!|\!|_{2,\omega} = \|e\|_{\hat{V}_0\backslash\mathcal{H}}$. Оценим эту величину сверху. Для любой функции $y \in H(\omega, \operatorname{div})$

$$\int_{\Omega}\nabla e\cdot\nabla w dx \leq \|\operatorname{div} y + f\|_{2,\omega}\|w\|_{2,\omega} + \|\nabla v - y\|_{2,\omega}\|\nabla w\|_{2,\omega}.$$

Отсюда и из (3.22) вытекает, что

$$\|e\|_{\hat{V}_0\backslash\mathcal{H}} \leq \|\nabla v - y\|_{2,\omega} + C^F(\omega)\|\operatorname{div} y + f\|_{2,\omega}, \tag{3.23}$$

где $C^F(\omega)$ – постоянная в неравенстве Фридрихса для области ω. Таким образом, сумма двух локальных норм в правой части (3.23) ограничивает только фактор-норму, которая показывает, насколько близко к v расположена функция, точно удовлетворяющая дифференциальному уравнению.

Если ввести дополнительное условие на функцию y, а именно $\{\{\operatorname{div} y + f\}\}_\omega = 0$, то $C^F(\omega)$ можно заменить на постоянную в неравенстве Пуанкаре $C^F(\omega)$. В частности, для выпуклой области ω имеем оценку

$$\|e\|_{\hat{V}_0\backslash\mathcal{H}} \leq \|\nabla v - y\|_{2,\omega} + \frac{\operatorname{diam}\omega}{\pi}\|\operatorname{div} y + f\|_{2,\omega}. \tag{3.24}$$

Оценки (3.23) и (3.24), конечно, не дают полного представления о величине локальной ошибки, но это вполне естественно. Мы не можем ожидать, что сумма локальных норм, составляющих их правые части, могла бы оценить полную норму $\|\nabla(u-v)\|_{2,\omega}$ без учета краевых условий и поведения функций в Ω'.

4. ОБОБЩЕНИЯ НА ДРУГИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотренная выше схема переносится на другие уравнения эллиптического типа, если соответствующие точные решения обладают повышенной регулярностью (в смысле степени интегрируемости). Пусть, например, уравнение

$$\operatorname{div} A\nabla u + f = 0, \tag{4.1}$$

с краевым условием $u = u_0$ имеет решение в $K_q(\Omega)$ для $q > 2$, и функция v также принадлежит этому множеству. Матрица A считается симметричной и положительно-определенной с ограниченными коэффициентами, причем

$$\lambda_1|\zeta|^2 \le A(x)\zeta\cdot\zeta \le \lambda_2|\zeta|^2, \quad 0 < \lambda_1 \le \lambda_2.$$

Для $\zeta\in\mathbb{R}^d$ определим $|\zeta|_A := |A\zeta\cdot\zeta|^{1/2}$ и норму

$$\|\nabla w\|_{A,\Omega,q} := \left(\int_\Omega |\nabla w|_A^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Аналогом меры (2.3) является

$$\mathbf{m}_q(e) = \sup_{w\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)}\left(\int_\Omega A\nabla e\cdot\nabla w - \frac{1}{q^*}\|\nabla w\|^{q^*}_{A,q^*,\Omega}\right).$$

При помощи рассуждений, аналогичных (2.6), (2.7), можно показать, что

$$\mathbf{m}_q(e) = \frac{1}{q}|\!|\!|\nabla e|\!|\!|^q_{A,q,\Omega},$$

где

$$|\!|\!|\nabla e|\!|\!|_{A,q,\Omega} := \sup_{\substack{w\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)\\ \|w\|_{A,q^*,\Omega}=1}} \int_\Omega A\nabla e\cdot\nabla w dx.$$

Нетрудно видеть, что для любой функции $y\in H_{\operatorname{div},q}$

$$\int_\Omega A\nabla e\cdot\nabla w dx - \frac{1}{q^*}\|\nabla w\|^{q^*}_{A,q^*,\Omega} = \int_\Omega(\operatorname{div} y + f)w dx + \int_\Omega(y - A\nabla v)\cdot\nabla w dx - \frac{1}{q^*}\|\nabla w\|^{q^*}_{A,q^*,\Omega}. \tag{4.2}$$

Вследствие (4.2) получаем оценку

$$\mathbf{m}_q(e) \le \sup_{w\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega)}\left\{(\mathcal{R}_y + \|A\nabla v - y\|_{A^{-1},q,\Omega})\|\nabla w\|_{A,q^*,\Omega} - \frac{1}{q^*}\|\nabla w\|^{q^*}_{A,q,\Omega}\right\},$$

где $\mathcal{R}_y := C_{A,q^*}(\Omega)\|\operatorname{div} y + f\|_{q,\Omega}$, а постоянная определяется неравенством

$$\|w\|_{q^*,\Omega} \le C_{A,q^*}(\Omega)\|\nabla w\|_{A,q^*,\Omega} \quad \forall w\in w\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q^*}(\Omega).$$

В качестве оценки этой постоянной можно взять $C_{A,q}(\Omega) \le \lambda_1^{-1/2}C_{q^*}(\Omega)$ (см. (3.11)). Оценивая супремум, получаем мажоранту для меры отклонения от u, аналогичную (3.12)

$$\mathbf{m}_q(e) \le \frac{1}{q}(\mathcal{R}_y + \|A\nabla v - y\|_{A^{-1},q,\Omega})^q.$$

Соответствующие обобщения других, ранее полученных оценок для уравнений более общего, чем (4.1) вида (и других краевых условий), можно построить при помощи аналогичных рассуждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Repin S.* A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory // Zapiski Nauchnih Seminarov, V.A. Steklov Mathematical Institute (POMI). 1997. V. 243. P. 201–214.
2. *Repin S.* A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // Math. Comp. 2000. V. 69 (230). P. 481–500.
3. *Repin S.* A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2008.
4. *Matculevich S., Repin S.* Estimates of the distance to the exact solution of parabolic problems based on local Poincaré type inequalities // Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklova. 2014. V. 425. № 1. P. 7–34.
5. *Repin S.* Estimates of deviation from exact solutions of initial-boundary value problems for the heat equation // Rend. Mat. Acc. Lincei. 2002. V. 13. P. 121–133.
6. *Репин С.И.* Двусторонние оценки отклонения от точного решения для равномерно эллиптических уравнений // Труды С.-Петербургского математического общества. 2001. Т. 9. С. 148–179 (English translation: Repin S. Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations // Amer. Math. Soc. Transl. 2003. Series 2. V. 209. P. 143–171).
7. *Repin S., Sauter S.* Functional A Posteriori Estimates for the Reaction-Diffusion Problem // C. R. Acad. Sci. Paris. 2006. Ser. 1. V. 343. P. 349–354.
8. *Репин С.И., Фролов М.Е.* Апостериорные оценки погрешности приближенных решений краевых задач эллиптического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 12. С. 1704–1716.
9. *Repin S., Sauter S., Smolianski A.* Two-sided a posteriori error estimates for mixed formulations of elliptic problems // SIAM J. Num. Analysis. 2007. V. 45. P. 928–945.
10. *Repin S., Tomar S.* Guaranteed and robust error bounds for nonconforming approximations of elliptic problems // IMA J. Numer. Anal. 2011. V. 31. № 2. P. 597–615.
11. *Ainsworth M., Oden J.T.* A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons, 2000.
12. *Verfürth R.* A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques. Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.
13. *Bangerth W., Rannacher R.* Adaptive finite element methods for differential equations. Berlin: Birkhäuser, 2003.
14. *Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C.* Introduction to adaptive methods for differential equations // Acta Numerica. 1995. P. 105–158.
15. *Babuška I., Rheinboldt W.C.* Error estimates for adaptive finite element computations // SIAM J. Numer. Anal. 1978. V. 15. P. 736–754.
16. *Babuška I., Rheinboldt W.C.* A-posteriori error estimates for the finite element method // Int. J. Numer. Meth. Engrg. 1978. V. 12. P. 1597–1615.
17. *Ainsworth M., Oden J.T.* A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods // Numer. Math. 1993. V. 65. P. 23–50.
18. *Babuška I., Strouboulis T.* The Finite Element Method and its Reliability. Oxford: Clarendon Press, 2001.
19. *Carstensen C.* A posteriori estimate for the mixed finite element method // Math. Comput. 1997. V. 66. № 218. P. 465–476.
20. *Carstensen C.* Quasi-interpolation and a posteriori error analysis of finite element methods // Mathematical Modelling in Numerical Analysis. 1999. V. 33. № 6. P. 1187–1202.
21. *Carstensen C., Verfürth R.* Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods // SIAM J. Numer. Anal. 1999. V. 36. № 5. P. 1571–1587.
22. *Mali O., Nettaanmäki P., Repin S.* Accuracy verification methods. Theory and Algorithms Berlin: Springer, 2014.
23. *Simader C.G., Sohr H.* The Dirichlet Problem for the Laplacian in bounded and unbounded domains. Pitman Research Notes in Mathematical Series. V. 360. Harlow: Addison Wesley Longman Ltd., 1996.
24. *Simader C.G., Sohr H., Varnhorn W.* Necessary and sufficient conditions for the existence of Helmholtz decompositions in general domains // Ann Univ Ferrara. 2014. V. 60. P. 245–262.
25. *Evans L.* Partial differential equations. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.
26. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics. New York: Springer-Verlag, 1985.
27. *Mizuguchi M., Tanaka K., Sekine K., Oishi S.* Estimation of Sobolev embedding constant on a domain dividable into bounded convex domains // Journal of Inequalities and Applications. 2017. V. 299.
28. *Acosta G., Durán R.G.* An optimal Poincaré inequality in L_1 for convex domains //Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. P. 195–202.