ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 5, с. 841–852

УДК 517.956:517.958

ОСОБЫЕ ТОЧКИ И АСИМПТОТИКИ В СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

С. В. Захаров

620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Россия

e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 05.12.2018 г.
Переработанный вариант 14.12.2019 г.
Принята к публикации 14.01.2020 г.

Излагаются полученные в школе академика А.М. Ильина результаты исследований асимптотического поведения решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром при старшей производной вблизи особых точек. Рассматриваемое уравнение традиционно представляет интерес в качестве модели распространения нелинейных волн в диссипативных сплошных средах, а важность изучения решений вблизи особых точек объясняется, в частности, тем, что хотя сами сингулярные события занимают малое время, но именно они во многом определяют всю последующую эволюцию решений. В данном обзоре представлены пять типов особых точек, появление которых обусловлено различными начальными данными. Библ. 50.

Ключевые слова: квазилинейное параболическое уравнение, уравнение Бюргерса, малый параметр, задача Коши, особая точка, сингулярная асимптотика, слияние ударных волн, градиентная катастрофа, сборка Уитни, преобразование Коула–Хопфа, функция Пирси, универсальное решение Ильина, лагранжева особенность, краевая особенность, слабый разрыв, автомодельность, многомасштабная асимптотика, асимптотики Пуанкаре и Эрдейи, бисингулярная задача, ренормализация, метод согласования.

DOI: 10.31857/S0044466920050166

ВВЕДЕНИЕ

Простейшей моделью движения сплошной среды, учитывающей эффекты нелинейного распространения и взаимодействие частиц вещества, является уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

рассмотренное еще Г. Бейтменом [1] – при исследовании движения жидкости и Дж. Бюргерсом [2] – в связи с вопросами турбулентности. Это уравнение используется при изучении эволюции диссипативных физических систем и вероятностных процессов, например: нелинейной диффузии, акустических волн в жидкости и газе [3]–[5], волн в радиотехнических линиях передач с высокочастотными потерями [6].

Мы будем рассматривать задачу Коши для обобщения уравнения Бюргерса – квазилинейного параболического уравнения с параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > t_0, \tag{1}$$

$$u(x, t_0) = q(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Такие модели строятся также при изучении движения автомобильных потоков [7], [8], в задаче о паводковых волнах и в некоторых других [9, гл. VI]. Интерес к данной задаче объясняется как наличием физической интерпретации, так и тем, что ее решения позволяют получить вязкостные обобщенные решения предельного уравнения первого порядка $u_t + (\varphi(u))_x = 0$, т.е. уравнения (1) при $\varepsilon = 0$, см. [10], [11].

С различных точек зрения задачу (1), (2) изучали многие математики, см. [12]–[15]. В предположении, что функция φ бесконечно дифференцируема и имеет строго положительную вторую производную, а начальная функция q является ограниченной и кусочно гладкой, доказано [16], что существует единственное ограниченное бесконечно дифференцируемое по x и t решение $u(x,t,\varepsilon)$.

Хотя при $\varepsilon > 0$ точное решение задачи Коши (1), (2) и является гладкой функцией всюду в полуплоскости $\{x \in \mathbb{R}, t > t_0\}$, могут иметься *особые точки*, вблизи которых осуществляется быстрая перестройка величины градиента и масштаба пространственной локализации пограничных слоев, или же происходит мгновенная смена типа гладкости у обобщенного решения предельного уравнения $u_t + (\varphi(u))_x = 0$, что отражается и на свойствах решения $u(x,t,\varepsilon)$, особенно заметным образом при малых значениях параметра ε. Именно в этом смысле многозначный термин "особая точка" понимается в настоящем обзоре и в других работах подобной тематики. Например, в разд. 3 мы рассмотрим случай градиентной катастрофы, когда у изначально гладкого решения предельного уравнения в некоторый момент времени возникает разрыв, и вблизи этой особой точки модуль производной диссипативно возмущенного решения $\partial u(x,t,\varepsilon)/\partial x$ за время $t \approx \varepsilon^{1/2}$ меняется от конечного значения до величины порядка $\varepsilon^{-1/2}$; наглядная визуализация решения и структуры его особенностей имеется в книге [9, гл. VI, рис. 31–35].

В данном обзоре представлены полученные в научной школе акад. Арлена Михайловича Ильина результаты исследований асимптотического поведения при $\varepsilon \to +0$ решений задачи Коши (1), (2) в окрестностях особых точек, а также обсуждаются некоторые трудности, возникающие при построении асимптотик. В случае особых точек решений предельного уравнения существует их классификация [17], [18], разумеется, дающая некоторое представление о свойствах самих решений, но построение и обоснование асимптотик решений $u(x,t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ часто представляют собой отдельную, порой весьма непростую задачу (см., например, работу [19]).

Интерес к изучению поведения решений вблизи особых точек объясняется, во-первых, необходимостью учитывать это поведение при построении согласованных асимптотических приближений, а во-вторых, существенным влиянием самих сингулярных событий – своего рода "инстантонов", локализованных в очень малых пространственно-временных областях – на поведение системы в целом, в частности, при больших значениях времени (словами из "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" И. Ньютона: "...de centro per loca singula in circuitu diffusam..."). Например, сдвиг фазы возмущенной ударной волны, которая начинается в точке градиентной катастрофы и продолжается в модели (1) до бесконечности, определяется поведением коэффициентов асимптотического решения в окрестности самой особой точки [9, гл. VI, § 6]. Немаловажно и то обстоятельство, что поведение решения в целом иногда оказывается в некотором смысле подобным его поведению вблизи особой точки. Точная математическая формулировка этого тезиса своеобразной автомодельности представляет собой технику ренормализации или ренорм-группы [20]–[22], с помощью которой было построено равномерное приближение решения задачи с большим начальным градиентом [23], [24]. С точки зрения приложений к механике сплошных сред описание поведения решений вблизи особых точек важно для понимания процессов формирования ударных волн в физических системах с малой ненулевой вязкостью [25]–[27]. Подробнее с физической стороной вопроса о начальных стадиях формирования ударных волн можно ознакомиться, например, по книгам [4, пп. 4.3, 10.4] и [28, гл. 3], а с трудностями изучения и математического моделирования реальных процессов – по [29, гл. 5] и обзорной работе [30, п. 4], где особое внимание уделено прикладному аспекту.

Далее рассматриваются результаты исследований следующих задач: 1) разрыв начальной функции, 2) слияние двух ударных волн, 3) градиентная катастрофа, 4) переход слабого разрыва в сильный, 5) особенность, порожденная большим начальным градиентом.

При изучении поведения решений краевых задач чаще всего возникает необходимость строить не один, а несколько асимптотических рядов, понимаемых в смысле Эрдейи – в разных областях независимых переменных. С целью подчеркнуть данное обстоятельство эти асимптотики традиционно называются *сингулярными*, а сами задачи – сингулярно возмущенными; см., например, введение к фундаментальной монографии [9]. Кроме того, в некоторых задачах, относимых к классу *бисингулярных*, коэффициенты асимптотических рядов стремятся к бесконечности при приближении к особой точке, или же увеличивается порядок роста старших коэффициентов [9, с. 16]. Из перечисленных выше пяти задач первые две являются сингулярными, а остальные три – бисингулярными. Здесь уместно сказать, что полное внешнее разложение – асимптотика решения $u(x,t,\varepsilon)$ вдали от его особенностей – устроено во всех случаях очень просто: оно имеет довольно стандартный вид бесконечного ряда по неотрицательным целым степеням малого параметра ε, или двух параметров в случае задачи из разд. 5, с коэффициентами, зависящими от независимых переменных (x,t). Наибольшие же трудности возникают при аналитическом исследовании тех областей, где имеется перестройка масштаба внутренних независимых переменных и размера локализации пограничных слоев. Асимптотики решений в соответствующих областях — малых окрестностях особых точек — для рассмотренных нами задач удается построить в виде рядов по рациональным степеням малых параметров и их логарифмов с коэффициентами, зависящими от растянутых пространственно-временных переменных; вне определяемых спецификой задачи малых окрестностей эти ряды становятся непригодными, вообще говоря, теряя свой смысл: высшие приближения оказываются того же порядка, что и главное приближение.

Интересно также заметить, что рассматривая результаты исследования всех задач в совокупности с точки зрения чистой математики, естественно считать дифференциальное уравнение (1) своего рода отображением, сопоставляющим классу начальных данных определенного типа гладкости аналитическую (или даже просто топологическую) структуру пограничных слоев, инвариантную относительно деформаций функции φ в рамках предполагаемых ограничений. Кроме того, следует сказать, что любая начальная задача в математической физике — это своеобразный эксперимент, результаты которого, бывая иногда непредсказуемыми, могут генерировать новые вопросы, идеи и методы.

1. РАЗРЫВ НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Самая простая структура, изученная в [31], [32], асимптотики решения уравнения (1) в окрестности особой точки, возникает в случае, когда кусочно гладкая начальная функция q в условии (2) имеет разрыв I рода, и ее значения слева от точки разрыва строго больше ее значений справа от этой же точки. При этом у обобщенного решения предельного уравнения при всех $t \geq t_0$ имеется конечный разрыв — ударная волна, распространяющаяся вдоль кривой $x = s(t)$, определяемой условием Гюгонио. Считая без ограничения общности, что начальный разрыв находится в точке $x = 0$, а $t_0 = 0$, введем "растянутые" переменные $\zeta = \varepsilon^{-\alpha}(x - s(t))$, $\tau = \varepsilon^{-\beta}t$ и подставим функцию $u(x,t,\varepsilon) = w(\zeta,\tau,\varepsilon)$ в уравнение (1), в результате чего легко получим эквивалентное соотношение

$$\varepsilon^{-\beta}\frac{\partial w}{\partial\tau} - \varepsilon^{-\alpha}s'(\varepsilon\tau)\frac{\partial w}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-\alpha}\frac{\partial\varphi(w)}{\partial\zeta} = \varepsilon^{1-2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}.$$

Чтобы уравнять порядки всех членов в левой и правой частях, естественно положить $\alpha = \beta = 1$ и ввести соответствующие внутренние переменные

$$\zeta = \frac{x - s(t)}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

в которых уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2} + s'(\varepsilon\tau)\frac{\partial w}{\partial\zeta} - \frac{\partial\varphi(w)}{\partial\zeta} - \frac{\partial w}{\partial\tau} = 0.$$

Асимптотика решения $w(\zeta,\tau,\varepsilon)$ в окрестности особой точки — а именно, в малой области $\{|x| + t < \varepsilon^{1-\delta},\ \delta > 0\}$ — строится в виде простого ряда теории возмущений

$$w(\zeta,\tau,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n w_n(\zeta,\tau),$$

коэффициенты которого находятся из рекуррентной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial\zeta^2} + s'(0)\frac{\partial w_0}{\partial\zeta} - \frac{\partial\varphi(w_0)}{\partial\zeta} - \frac{\partial w_0}{\partial\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial[(s'(0) - \varphi'(w_0))w_n]}{\partial\zeta} - \frac{\partial w_n}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\sum_{q=2}^{n}\frac{\varphi^{(q)}(w_0)}{q!}\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_q=n\\ p_m\geq 1}}\prod_{m=1}^{q}w_{p_m} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\tau^j}{j!}\frac{d^{j+1}s(0)}{dt^{j+1}}\frac{\partial w_{n-j}}{\partial\zeta}, \quad n \geq 1,$$

дополненной следующими начальными условиями:

$$w_n(\zeta,0) = \begin{cases}\dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n q(+0)}{dx^n}\zeta^n, & \zeta > 0,\\[2mm] \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n q(-0)}{dx^n}\zeta^n, & \zeta < 0.\end{cases}$$

Доказано, что существуют бесконечно дифференцируемые при $|\zeta| + \tau > 0$ решения этой системы начальных задач, что дает формальное асимптотическое решение $w(\zeta, \tau, \varepsilon)$, которое затем обосновывается, т.е. с помощью априорных оценок показывается близость частичных сумм асимптотического ряда к истинному решению $u(x, t, \varepsilon)$.

Кроме перечисленных выше работ, рассмотрение этой задачи имеется в [9, гл. VI, § 2]. Заметим еще, что данный пример не относится к числу бисингулярных, а начало кооординат является особой точкой из-за того, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ должно перестраивать разрывную начальную функцию вида ступеньки в обычную волну сжатия с пограничным слоем ширины порядка ε. Явное решение для уравнения Бюргерса имеется в [6, гл. 5, § 5.3].

2. СЛИЯНИЕ ДВУХ УДАРНЫХ ВОЛН

В [31], [32] задача (1), (2) рассмотрена также в случае, когда обобщенное решение предельной задачи на конечном отрезке времени имеет две гладких линии разрыва $x = s_1(t)$ и $x = s_2(t)$, соединяющиеся в момент $t = t^*$ в одну $x = s_3(t)$. Для уравнения Бюргерса соответствующее явное решение и некоторые дополнительные сведения, включая графические иллюстрации волновых фронтов, есть в книгах [4, гл. 4, п. 4.7] и [6, гл. 5, § 5.5].

Место соединения разрывов, физически соответствующее слиянию ударных волн, для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ является особой точкой; и в ее окрестности из тех же соображений, что и в предыдущем разд., естественно вводить внутренние переменные

$$\zeta = \frac{x - s_3(t^*)}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t - t^*}{\varepsilon},$$

в которых уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \varphi(w)}{\partial \zeta} = 0,$$

а асимптотику решения при $\{|x - s_3(t^*)| + |t - t^*| < \varepsilon^{1-\delta}, \delta > 0\}$ – строить в виде ряда

$$w(\zeta, \tau, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(\zeta, \tau),$$

коэффициенты которого находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial \varphi(w_0)}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_0}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial [\varphi'(w_0) w_n]}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_n}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \sum_{q=2}^{n} \frac{\varphi^{(q)}(w_0)}{q!} \sum_{\substack{p_1 + \ldots + p_q = n \\ p_m \geq 1}} \prod_{m=1}^{q} w_{p_m}, \quad n \geq 1.$$

Эти уравнения должны быть дополнены условиями, получающимися из соображений согласования асимптотики вблизи особой точки с составной асимптотикой, приближающей решение при $t < t^*$ и имеющей во внутренних переменных вид

$$U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n S_n(\zeta, \tau) + O\left\{\varepsilon^{N+1}\left[1 + |\tau|^{2(N+1)}\left(\left|\zeta - s_1'(t^*)\tau\right|^N + \left|\zeta - s_2'(t^*)\tau\right|^N\right)\right]\right\},$$

где функции $S_n(\zeta, \tau)$ представляют собой полиномы степени $2n$ по τ. Очевидно, что следует искать решения $w_n(\zeta, \tau)$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\tau \to -\infty} (w_n(\zeta, \tau) - S_n(\zeta, \tau)) = 0.$$

Доказано, что такие решения существуют, причем для них справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{l+m}}{\partial \zeta^l \partial \tau^m}(w_n(\zeta, \tau) - S_n(\zeta, \tau))\right| < M \exp\{\mu\tau - \gamma|\zeta|\}, \quad \tau < 0,$$

где M, μ, γ – положительные постоянные, зависящие от n, l и m. Для доказательства, которое проводится индукцией по n, рассматриваются последовательности решений $w_{n,\Gamma}$ начальных задач при $\tau \geq -\Gamma$ такие, что $w_{n,\Gamma}(\zeta,-\Gamma) = S_n(\zeta,-\Gamma)$. Далее, с помощью принципа максимума и априорных оценок производных решений доказывается равномерная сходимость функций $w_{n,\Gamma}$ при $\Gamma \to +\infty$ и справедливость приведенных выше оценок для предела.

3. ГРАДИЕНТНАЯ КАТАСТРОФА

В [19], [33] был исследован важный случай, когда в полосе

$$\Omega_T = \{(x,t) : -1 \leq t \leq T,\ x \in \mathbb{R};\ T = \text{const} > 0\}$$

обобщенное решение предельной задачи Коши (1), (2) при $\varepsilon = 0$ является функцией, гладкой всюду, кроме одной линии разрыва $x = s(t)$, возникающей спустя конечное время после начального момента времени $t_0 = -1$. Подробное изложение результатов, включающее иллюстрации, можно найти в [9, гл. VI], где асимптотика решения $u(x,t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ построена и обоснована с произвольной степенью точности равномерно в полосе Ω_T.

Здесь мы касаемся только вопроса о поведении решения $u(x,t,\varepsilon)$ в окрестности особой точки — начала линии разрыва; при подходящем выборе начальной функции, эта особая точка совпадает с началом координат. Из условия равенства порядков величин всех членов уравнения (1) и анализа главного члена внешнего разложения при приближении независимых переменных к особой точке в ее окрестности вводятся растянутые переменные (из соображений единообразия здесь мы используем обозначения, отличающиеся от оригинальных [9, гл. VI, § 4], которые получаются, если коэффициент при второй производной в правой части уравнения (1) равен ε^4)

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^{3/4}}, \qquad \tau = \frac{t}{\varepsilon^{1/2}},$$

а разложение решения в малой области $\{|x| + \varepsilon^{1/4}|t| < \varepsilon^{3/4-\delta},\ \delta > 0\}$ ищется в виде асимптотического, в смысле Эрдейи, ряда

$$w(\xi,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \sum_{j=0}^{k-1} w_{k,j}(\xi,\tau) \ln^j \varepsilon^{1/4},$$

при подстановке которого в уравнение (1) для коэффициентов $w_{k,j}$ получается рекуррентная система уравнений

$$\frac{\partial w_{1,0}}{\partial \tau} + \varphi''(0) w_{1,0} \frac{\partial w_{1,0}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{1,0}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_{k,j}}{\partial \tau} + \varphi''(0) \frac{\partial (w_{1,0} w_{k,j})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{k,j}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial E_{k,j}}{\partial \xi}, \qquad k \geq 2,$$

где

$$E_{k,j} = -\frac{\varphi''(0)}{2} \sum_{i=2}^{k-1} \sum_{m=0}^{j} w_{i,m} w_{k+1-i,j-m} - \sum_{q=3}^{k+1} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_q=k+1 \\ m_1+\ldots+m_q=j}} \prod_{p=1}^{q} w_{i_p,m_p}.$$

Эти уравнения должны быть дополнены диктуемыми методом согласования условиями

$$w_{k,j}(\xi,\tau) = W_{k,j}(\xi,\tau), \qquad \tau \to -\infty,$$

где $W_{k,j}(\xi,\tau)$ – это сумма всех коэффициентов при $\varepsilon^{k/4} \ln^j \varepsilon^{1/4}$, присутствующих в переразложении асимптотики вдали от особенностей (внешнее разложение) во внутренних переменных:

$$W_{k,j}(\xi,\tau) = \sum_{p=j}^{k-1} (\ln(3H^2(\xi,\tau) - \tau))^{p-j} \sum_{l=0}^{\infty} h_{k-3p-4l,p,k,j}(\xi,\tau),$$

где $h_{k-3p-4l,p,k,j}$ – функции, однородные степени $k-3p-4l$ относительно H, $|\tau|^{1/2}$, $(3H^2(\xi,\tau)-\tau)^{1/2}$, являющиеся полиномами от H, τ и $(3H^2(\xi,\tau)-\tau)^{-1}$,

$$H(\xi,\tau)=\sqrt[3]{-\frac{\xi}{2}+\sqrt{\frac{\xi^2}{4}-\frac{\tau^3}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{\xi}{2}+\sqrt{\frac{\xi^2}{4}-\frac{\tau^3}{27}}}$$

есть однозначная часть функции сборки Уитни, $H^3-\tau H+\xi=0$.

Изучение решений рекуррентной системы уравнений для коэффициентов $w_{k,j}(\xi,\tau)$ является центральной и наиболее трудоемкой частью всей задачи. Путем сведения каждого из уравнений к неоднородному уравнению теплопроводности доказано, что существуют решения при $k\ge 2$, $0\le j\le k-1$, бесконечно дифференцируемые при всех ξ и τ; при этом значительная трудность состоит в том, что решения $w_{k,j}(\xi,\tau)$ определены на всей плоскости ξ,τ и имеют довольно сложную асимптотику на бесконечности: в частности, соответствующие им решения уравнения теплопроводности при фиксированном τ, вообще говоря, растут как $\exp\left\{\mu^2|\xi|^{4/3}\right\}$; поэтому удобнее изучать уравнения для разностей между функциями $w_{k,j}$ и достаточно длинными частичными суммами их асимптотических рядов. Дополнительная трудность состоит в том, что даже из малости правой части $F(\xi,\tau)$ всюду при $\tau\ge -1$ не вытекает малость решения в той же области, а само решение имеет сложную асимптотическую структуру при $|\xi|\sqrt{\tau}<\text{const}$ и $\tau\to+\infty$. Эти трудности преодолеваются доказательством довольно точных априорных оценок решения линейного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}+\varphi''(0)\frac{\partial(w_{1,0}w)}{\partial\xi}-\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}=F(\xi,\tau)$$

с малой правой частью $F(\xi,\tau)$ при помощи построения барьерных функций.

Отметим особо свойства главного члена разложения $\varepsilon^{1/4}w_{1,0}(\xi,\tau)$, который находится с помощью преобразования Коула–Хопфа:

$$w_{1,0}(\xi,\tau)=-\frac{2}{\varphi''(0)\Lambda(\xi,\tau)}\frac{\partial\Lambda(\xi,\tau)}{\partial\xi},$$

где

$$\Lambda(\xi,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{8}(z^4-2z^2\tau+4z\xi)\right)dz$$

называется (вещественной) функцией Пирси и является решением уравнения теплопроводности. Функция $w_{1,0}$ удовлетворяет условию

$$w_{1,0}(\xi,\tau)=\left[\varphi''(0)\right]^{-1}H(\xi,\tau)+\sum_{l=1}^{\infty}h_{1-4l}(\xi,\tau),\quad 3\left[H(\xi,\tau)\right]^2-\tau\to\infty,$$

где $h_l(\xi,\tau)$ – однородные функции степени l относительно $H(\xi,\tau)$, $\sqrt{-\tau}$ и $\sqrt{3[H(\xi,\tau)]^2-\tau}$, являющиеся полиномами от $H(\xi,\tau)$, τ и $(3[H(\xi,\tau)]^2-\tau)^{-1}$. Кроме того, справедливы следующие формулы автомодельных асимптотик:

$$w_{1,0}(\xi,\tau)=|\tau|^{1/2}\left(Z_0(\theta)+\sum_{j=1}^{\infty}\tau^{-2j}Z_j(\theta)\right),\quad \tau\to-\infty,$$

$(\xi,\tau)\in\Omega_1=\mathbb{R}^2\backslash\{|\xi|<\tau^{\gamma_1-1/2},\ \tau>0,\ 0<\gamma_1<2\}$, где $\theta=\xi|\tau|^{-3/2}$, $Z_j\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$,

$$w_{1,0}(\xi,\tau)=\tau^{1/2}\left(-\frac{\operatorname{th}z}{\varphi''(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}\tau^{-2k}q_k(z)\right),\quad \tau\to+\infty,$$

$(\xi,\tau)\in\Omega_2=\{|\xi|\tau^{1/2}<\tau^{\gamma_2},\gamma_1<\gamma_2<2\}$, где $z=\xi\tau^{1/2}/2$, $|q_k(z)|\le M_k(1+|z|^k)$, $q_k\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Доказательство этих формул основано на вычислении асимптотики интеграла $\Lambda(\xi,\tau)$ методом Лапласа; в области Ω_1 вклад в асимптотику дает один локальный максимум, а в области Ω_2 – два локальных максимума.

Функция $w_{1,0}(\xi,\tau)$ называется универсальным решением Ильина, поскольку она одна и та же для целого класса начальных данных, определяемого асимптотическим условием $\varphi'(q(x))=-x+x^3+O(x^4)$, $x\to 0$. Приведенный результат может быть распространен на более общее уравнение для типичных начальных функций [34].

В работе [41] рассматривалось условие

$$\varphi'(q(x))=-x+x^{2n+1}+O(x^{2n+2}),\quad x\to 0,$$

с произвольным $n\ge 2$, и было найдено асимптотическое решение уравнения (1) в главном приближении

$$u(x,t,\varepsilon)\sim-2\varepsilon\left[\varphi''(0)V(x,t,\varepsilon)\right]^{-1}\frac{\partial V(x,t,\varepsilon)}{\partial x},$$

$$V(x,t,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{2^{2n}s^{2n+2}}{n+1}+\frac{ts^2}{\varepsilon^\mu}-\frac{xs}{\varepsilon^\sigma}\right)ds,$$

пригодное в окрестности особой точки, точнее при

$$\left|\frac{x}{\varepsilon^\sigma}\right|+\left|\frac{t}{\varepsilon^\mu}\right|<\varepsilon^{-\delta},\quad \sigma=\frac{2n+1}{2n+2},\quad \mu=\frac{n}{n+1},\quad \delta>0.$$

В интеграле $V(x,t,\varepsilon)$, соответствующем сечению лагранжевой особенности A_{2n+1} [17], [42], коэффициент при s^{2n+2} определяется из условия согласования асимптотики с внешним разложением

$$u_{\text{out}}\sim\frac{\varepsilon^\varkappa U_0(\eta,\theta)}{\varphi''(0)},\quad U_0^{2n+1}-\frac{t}{\varepsilon^\mu}U_0+\frac{x}{\varepsilon^\sigma}=0,$$

$$\varkappa=\frac{1}{2n+2}.$$

4. ПЕРЕХОД СЛАБОГО РАЗРЫВА В СИЛЬНЫЙ

В работе [35] задача (1), (2) исследована в случае, когда начальная функция является гладкой всюду, кроме одной точки, в которой она непрерывна, а первая производная имеет разрыв I рода; при этом в некоторой полосе $t_0\le t\le t^*$ обобщенное предельное решение $u(x,t,0)$ будет непрерывным, но у производной u_x будет разрыв I рода; т.е. у функции $u(x,t,0)$ имеется слабый разрыв, переходящий в момент t^* в сильный разрыв, когда уже сама функция $u(x,t,0)$ перестает быть непрерывной; вид же асимптотики решения по $\varepsilon\to 0$ удивительным образом напоминает асимптотическое решение уравнений Навье–Стокса с вихревой структурой тейлоровского масштаба [36].

В работах [37], [38] было исследовано поведение решения $u(x,t,\varepsilon)$ с начальной функцией

$$q(x)=-(x+ax^2)\Theta(-x)(1+q_0(x)),\quad a>0,$$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда, вблизи точки перехода слабого разрыва в сильный при $t^*=0$; предполагается, что $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, $\varphi''(0)=1$, $q_0\in C^\infty(\mathbb{R})$, $q_0(x)=0$ в некоторой окрестности нуля. Из условия равенства порядков величин всех членов уравнения (1) и анализа главного члена внешнего разложения при приближении независимых переменных к особой точке, совпадающей с началом координат ($x=0$, $t=0$), а также на основании асимптотики явного решения уравнения Бюргерса [27, утверждение 2], вводятся растянутые переменные

$$\xi=\frac{x}{\varepsilon^{2/3}},\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon^{1/3}},$$

а асимптотика решения задачи в малой области $\{|x| + \varepsilon^{1/3}|t| < \varepsilon^{2/3-\delta}, \delta > 0\}$ строится в виде ряда

$$W(\xi,\tau,\varepsilon) = \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} \ln^s \varepsilon w_{p,s}(\xi,\tau),$$

коэффициенты которого должны удовлетворять рекуррентной системе уравнений

$$\frac{\partial w_{2,0}}{\partial \tau} + w_{2,0}\frac{\partial w_{2,0}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{2,0}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_{3,0}}{\partial \tau} + \frac{\partial (w_{2,0}w_{3,0})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{3,0}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\frac{\partial w_{p,s}}{\partial \tau} + \frac{\partial (w_{2,0}w_{p,s})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{p,s}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial E_{p,s}}{\partial \xi},$$

$$E_{p,s} = -\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{p-1}\sum_{l=0}^{s} w_{m,l}w_{p+2-m,s-l} - \sum_{q=3}^{[p/2]-s+1}\frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!}\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_q=p+2\\ s_1+\ldots+s_q=s}}\prod_{j=1}^{q} w_{p_j,s_j}$$

(считается, что при $s = [p/2]-1$ сумма по q равна нулю), с асимптотическими условиями

$$w_{p,s}(\xi,\tau) = \sum_{l=s}^{[p/2]-1}\frac{l!}{s!(l-s)!3^s}\ln^{l-s}|\tau|\sum_{k=\max\{1,2l\}}^{\infty}|\tau|^{(p-3k)/2}R_{k,l,p-2l-2}(\theta), \quad \tau \to -\infty,$$

в области $X^0 = \{(\xi,\tau) : |\xi| < |\tau|^{1-\gamma}, \tau < 0,\ 0 < \gamma < 1/2\}$, где функции $R_{k,l,p-2l-2}(\theta)$ автомодельной переменной $\theta = \dfrac{\xi}{2\sqrt{-\tau}}$ получаются из условия согласования ряда W с разложением в пограничном слое в окрестности линии слабого разрыва.

С помощью преобразования Коула–Хопфа

$$w_{2,0}(\xi,\tau) = -\frac{2}{\Phi(\xi,\tau)}\frac{\partial \Phi(\xi,\tau)}{\partial \xi},$$

где

$$\Phi(\xi,\tau) = \int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\right)ds, \quad b = a - \varphi'''(0)/2 > 0,$$

находится главный член асимптотики $\varepsilon^{1/3}w_{2,0}(\xi,\tau)$, являющийся универсальным решением в окрестности градиентной катастрофы для целого класса начальных данных со слабым разрывом; также в явном виде удается получить следующий коэффициент разложения:

$$w_{3,0}(\xi,\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{[\Phi(\xi,\tau)]^2}\frac{\partial \Phi(\xi,\tau)}{\partial \xi}.$$

Поскольку для всех последующих коэффициентов $w_{p,s}$ есть только теорема существования, вычисление их асимптотик при $\tau \to +\infty$ – для согласования ряда W с асимптотикой решения вблизи линии сильного разрыва – представляет собой значительную трудность. Кроме того, в данной задаче взаимное расположение пограничных слоев нарушает аналитичность асимптотики на бесконечности, что не позволяет угадать решение возникающей "задачи рассеяния" для всех коэффициентов $w_{p,s}$, как это было сделано в случае градиентной катастрофы с гладкой начальной функцией. Ситуация усложняется неожиданным, для данной задачи, явлением многомасштабности [27] – появлением дополнительной растянутой переменной, которая определяла пограничный слой вблизи линии слабого разрыва и "пережила" градиентную катастрофу – что вносит дополнительные трудности в процедуру согласования асимптотических рядов. В работе [43] был выдвинут подход к исследованию "задачи рассеяния", т.е. к построению решений и их асимптотик при $\tau \to +\infty$ по известной асимптотике при $\tau \to -\infty$. Однако развиваемая там идея связана, по-видимому, со значительными вычислительными трудностями.

В работе [41] рассматривался случай, когда начальная функция такова, что

$$\varphi'(q(x)) = -(x + bx^{2n})\Theta(-x)(1 + q_0(x)), \quad n \geq 2,$$

и в окрестности особой точки, точнее при

$$\left|\frac{x}{\varepsilon^{\sigma}}\right| + \left|\frac{t}{\varepsilon^{\mu}}\right| < \varepsilon^{-\delta}, \quad \sigma = \frac{2n}{2n+1}, \quad \mu = \frac{2n-1}{2n+1}, \quad \delta > 0,$$

получено асимптотическое решение уравнения (1) в главном приближении:

$$u(x,t,\varepsilon) \sim -2\varepsilon\left[W(x,t,\varepsilon)\right]^{-1}\frac{\partial W(x,t,\varepsilon)}{\partial x},$$

$$W(x,t,\varepsilon) = \int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{2^{2n}b}{2n+1}s^{2n+1} + \frac{ts^2}{\varepsilon^{\mu}} - \frac{xs}{\varepsilon^{\sigma}}\right)ds.$$

В интеграле $W(x,t,\varepsilon)$, соответствующем сечению краевой особенности B_{2n+1} [17], [44], коэффициент при s^{2n+1} определяется из условия согласования асимптотики с внешним разложением

$$u_{\text{out}} \sim \frac{\varepsilon U_0(\eta,\theta)}{\varphi''(0)}, \quad bU_0^{2n} - \frac{t}{\varepsilon^{\mu}}U_0 + \frac{x}{\varepsilon^{\sigma}} = 0, \quad \varkappa = \frac{1}{2n+1}.$$

Этот результат приводит к весьма правдоподобной гипотезе об универсальности найденного асимптотического решения; для доказательства необходимо получить оценку разности между истинным и асимптотическим решениями.

Отметим также, что в работе [45] аналогичная задача о переходе слабого разрыва в сильный исследовалась для уравнения Кортевега—де Вриза.

5. ОСОБЕННОСТЬ, ПОРОЖДЕННАЯ БОЛЬШИМ НАЧАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Еще один тип особой точки решения возникает в бисингулярной задаче с двумя малыми параметрами [23], [39], [46], когда начальная функция имеет вид сглаженной ступеньки с резким изменением значений вблизи нуля:

$$q(x) = \nu(x\rho^{-1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \rho \to +0.$$

В работе [23] с помощью метода согласования [9] и принципа максимума [16] доказано, что в этом случае при выполнении асимптотических, в смысле Пуанкаре, условий

$$\nu(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu_n^{\pm}}{\sigma^n}, \quad \sigma \to \pm\infty, \quad (\nu_0^- > \nu_0^+)$$

для решения $u(x,t,\varepsilon,\rho)$ задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ и $\mu = \rho/\varepsilon \to 0$ в полосе

$$S_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq T\}, \quad T = \text{const} > 0,$$

справедлива формула

$$u(x,t,\varepsilon,\rho) = h_0\left(\frac{x}{\rho},\frac{\varepsilon t}{\rho^2}\right) - R_{0,0,0}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + \Gamma\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\mu^{1/2}\ln\mu),$$

где

$$h_0(\sigma,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(s)\exp\left[-\frac{(\sigma-s)^2}{4\omega}\right]ds, \quad \sigma = \frac{x}{\rho}, \quad \omega = \frac{\varepsilon t}{\rho^2},$$

$$R_{0,0,0}(z) = \nu_0^-\operatorname{erfc}(z) + \nu_0^+\operatorname{erfc}(-z), \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty}e^{-y^2}dy, \quad z = \frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}},$$

а функция Γ — это решение уравнения во внутренних переменных ($\eta = x/\varepsilon$, $\theta = t/\varepsilon$)

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi(\Gamma)}{\partial\eta} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial\eta^2} = 0$$

с начальным условием

$$\Gamma(\eta,0) = \begin{cases} \nu_0^-, & \eta < 0, \\ \nu_0^+, & \eta > 0. \end{cases}$$

Интересно заметить, что естественно возникающая здесь функция h_0 аналогична главному члену асимптотического решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса, получающемуся вследствие метода сглаживания (осреднения) [47, § 5].

Наличие в асимптотике двух функций с различными внутренними переменными, масштабы которых были установлены на основании детального анализа явного решения уравнения Бюргерса, свидетельствует о существовании двух пограничных слоев, предшествующих формированию пограничного слоя вблизи диссипативной ударной волны.

Кроме того, в [23] методом ренормализации получена равномерная по $(x,t) \in S_T$ асимптотическая формула

$$u(x,t,\varepsilon,\rho) = \frac{1}{\nu_0^+ - \nu_0^-}\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{x-\rho s}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon}\right)\nu'(s)ds + O(\mu^{1/4}), \quad \mu \to 0.$$

Эти результаты дают асимптотику только в главном приближении. В работе [40] внутреннее разложение вблизи особой точки ($x = 0$, $t = 0$) при $x^2 + \varepsilon t < \rho^{\delta_1}\varepsilon^{2-\delta_1}$, $0 < \delta_1 < 2$, построено в виде ряда

$$\mathcal{H}(\sigma,\omega,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu^n h_n(\sigma,\omega), \quad \sigma = \frac{x}{\rho}, \quad \omega = \frac{\varepsilon t}{\rho^2}, \quad \mu = \frac{\rho}{\varepsilon} \to 0,$$

при подстановке которого в уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial\omega} - \frac{\partial^2 h}{\partial\sigma^2} = -\mu\frac{\partial\varphi(h)}{\partial\sigma},$$

для $h(\sigma,\omega) \equiv u(\rho\sigma,\rho^2\omega/\varepsilon)$, и в начальное условие получается рекуррентная цепочка начальных задач

$$\frac{\partial h_0}{\partial\omega} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial\sigma^2} = 0, \quad h_0(\sigma,0) = \nu(\sigma),$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial\omega} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial\sigma^2} = -\frac{\partial\varphi(h_0)}{\partial\sigma}, \quad h_1(\sigma,0) = 0,$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial\omega} - \frac{\partial^2 h_n}{\partial\sigma^2} = -\frac{\partial E_n}{\partial\sigma}, \quad h_n(\sigma,0) = 0,$$

где

$$E_n = \sum_{q=1}^{n-1}\frac{\varphi^{(q)}(h_0)}{q!}\sum_{n_1+\ldots+n_q=n-1}\prod_{p=1}^{q}h_{n_p}, \quad n \ge 2,$$

определяющая все коэффициенты $h_n(\sigma,\omega)$ единственным образом:

$$h_0(\sigma,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty}\nu(s)\exp\left[-\frac{(\sigma-s)^2}{4\omega}\right]ds,$$

$$h_n(\sigma,\omega) = -\int_0^{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega-v)}}\exp\left[-\frac{(\sigma-s)^2}{4(\omega-v)}\right]\frac{\partial E_n}{\partial s}dsdv.$$

Исследование этих интегралов при $|\sigma| + \omega \to \infty$ с помощью метода произвольного параметра [48, гл. 7, § 30] (см. также [49, лемма 4.4] или [50, с. 2169]) приводит к автомодельной асимптотике

$$h_n(\sigma,\omega) = \omega^{n/2}\sum_{m=0}^{N-1}\omega^{-m/2}\sum_{l=0}^{m}(\ln\omega)^l R_{n,m,l}\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}}\right) + O((\sigma^2+\omega)^{-\gamma_n N}), \quad N \ge 1,$$

в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\left\{(\sigma^2+\omega)^{-\gamma_n N}\right\}_{N=1}^{\infty}$, где $\gamma_n > 0$, $R_{n,m,l}$ – гладкие функции автомодельной переменной $z = \dfrac{\sigma}{2\sqrt{\omega}}$; в частности, функции

$$R_{1,0,0}(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right]\frac{d\varphi(R_{0,0,0}(y))}{dy}\,dyd\beta,$$

$$R_{n,0,0}(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{\beta^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta}\right]\frac{d}{dy}\left[\sum_{q=1}^{n-1}\frac{\varphi^{(q)}(R_{0,0,0}(y))}{q!}\sum_{i_1+\ldots+i_q=n-1}\prod_{\alpha=1}^{q} R_{i_\alpha,0,0}(y)\right]dyd\beta$$

определяют асимптотику функций h_n в главном:

$$h_n(\sigma,\omega) \sim \omega^{n/2} R_{n,0,0}\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}}\right), \quad |\sigma| + \omega \to \infty.$$

Несмотря на то что структура асимптотик в данной задаче в общем уже понятна, в настоящий момент построение полного равномерного приближения решения задачи еще далеко от своего завершения в силу тех же самых трудностей, что и в предыдущей задаче о переходе слабого разрыва в сильный.

Напомним еще раз, что здесь рассматривалось малое отношение ρ/ε параметра локализации перепада начальной функции и параметра диссипации; что касается случая $\rho \approx \varepsilon$, см. [25]; а при $\rho/\varepsilon \gg 1$ с помощью растяжения независимых переменных x и t на одинаковую величину ρ мы получаем задачу для уравнения вида (1) с малым параметром ε/ρ при второй производной в приведенном выше в разд. 3 случае, исследованном А.М. Ильиным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bateman H.* Some recent researches on the motion of fluids // Monthly Weather Rev. 1915. V. 43. P. 163–170.
2. *Burgers J.M.* A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence, Advances in Applied Mechanics, (Academic Press, New York) 1948. V. 1. P. 171–199; русский перевод: Бюргерс И.М. Об одной математической модели, иллюстрирующей теорию турбулентности / сб. Проблемы механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 422–445.
3. *Lighthill M.J.* Viscosity effects in sound waves on finite amplitude, Surveys in Mechanics, Edited by Batchelor G.K. and Davies R.M. Cambridge: Cambridge University Press, 1956. P. 250–351.
4. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
5. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
6. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: ЛЕНАНД, 2017. 312 с.
7. *Lighthill M.J., Whitham G.B.* On kinematic waves: II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. of the Royal Society of London, Series A: Math. and Phys. Sci. 1955. V. 229. Issue 1178. P. 317–345.
8. *Richards P.I.* Shock waves on the highway // Opera. Research. 1956. V. 4. № 1. P. 42–51.
9. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
10. *Олейник О.А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. Вып. 3(75). С. 3–73.
11. *Олейник О.А.* О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения “исчезающей вязкости” // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. Вып. 2 (86). С. 159–164.
12. *Бахвалов Н.С.* Об асимптотике при малых ε решения уравнения $u_t + (\varphi(u))_x = \varepsilon u_{xx}$, соответствующего волне разрежения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 3. С. 521–526.
13. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 254 с.
14. *Ладыженская О.А.* Об уравнениях с малым параметром при старших производных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными // Вестн. ЛГУ. 1957. Т. 7. № 2. С. 104–120.
15. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure and Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.
16. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
17. *Арнольд В.И.* Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
18. *Богаевский И.А.* Перестройки особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. Вып. 4. С. 1–16.
19. *Ильин А.М.* Об асимптотике решений одной задачи с малым параметром // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 258–275.

20. *Bricmont J., Kupiainen A.* Renormalizing Partial Differential Equations, Lecture Notes in Phys. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
21. *Теодорович Э.В.* Метод ренормализационной группы в задачах механики // Прикл. матем. и механ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 335–367.
22. *Goldenfeld N., Veysey J.* Simple viscous flows: From boundary layers to the renormalization group // Rev. Mod. Phys. 2007. V. 79. P. 883–927.
23. *Захаров С.В.* Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 4. С. 699–706.
24. *Захаров С.В.* Ренормализация в задаче Коши с двумя малыми параметрами // Вестн. ЧелГУ. Математика. Механика. Информатика. 2011. № 27 (242). Вып. 14. С. 79–84.
25. *Маслов В.П.* Гипотеза о формировании структуры фронта ударной волны // Матем. заметки. 1989. Т. 45. Вып. 3. С. 120–123.
26. *Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И.* Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн // Прикл. матем. и механ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 456–466.
27. *Захаров С.В.* Зарождение ударной волны в одной задаче Коши для уравнения Бюргерса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 3. С. 536–542.
28. *Баженова Т.В., Гвоздева Л.Г., Лагутов Ю.П., Ляхов В.Н., Фаресов Ю.М., Фокеев В.П.* Нестационарные взаимодействия ударных волн в газах. М.: Наука, 1986. 206 с.
29. *Сысоев Н.Н., Шугаев Ф.В.* Ударные волны в газах и конденсированных средах. М.: Изд-во МГУ, 1987. 133 с.
30. *Фортов В.Е.* Мощные ударные волны и экстремальные состояния вещества // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 4. С. 347–368.
31. *Ильин А.М., Нестерова Т.Н.* Асимптотика решения задачи Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 1. С. 11–13.
32. *Нестерова Т.Н.* Об асимптотике решения уравнения Бюргерса в окрестности слияния двух линий разрыва // Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск, УНЦ АН СССР. 1980. С. 66–86.
33. *Ильин А.М.* Задача Коши для одного квазилинейного параболического уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 530–534.
34. *Dubrovin B., Elaeva M.* On the critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity // Russ. J. Math. Phys. 2012. V. 19. Issue 4. P. 449–460.
35. *Сушко В.Г.* Об асимптотических разложениях решений одного параболического уравнения с малым параметром // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 10. С. 1794–1798.
36. *Маслов В.П., Шафаревич А.И.* Асимптотические решения уравнений Навье–Стокса и топологические инварианты векторных полей и лиувиллевых слоений // Теорет. матем. физ. 2014. Т. 180. № 2. С. 245–263.
37. *Захаров С.В., Ильин А.М.* От слабого разрыва к градиентной катастрофе // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 10. С. 3–18.
38. *Захаров С.В.* Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы // Матем. сб. 2006. Т. 197. № 6. С. 47–62.
39. *Захаров С.В.* Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с двумя малыми параметрами // Докл. АН. 2008. Т. 422. № 6. С. 733–734.
40. *Захаров С.В.* Двухпараметрические асимптотики в бисингулярной задаче Коши для параболического уравнения // Труды Института матем. и механ. 2017. Т. 23. № 2. С. 94–103.
41. *Захаров С.В.* Особенности типов A и B в асимптотическом анализе решений параболического уравнения // Функц. анализ. и его приложения. 2015. Т. 49. Вып. 4. С. 82–85.
42. *Арнольд В.И.* Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функц. анализ. 1972. Т. 6. № 4. С. 3–25.
43. *Захаров С.В.* Конструкция решения уравнения Бюргерса с заданной асимптотикой // Тр. Института матем. и механ. 2007. Т. 13. № 2. С. 80–85.
44. *Арнольд В.И.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33. Вып. 5 (203). С. 91–105.
45. *Гарифуллин Р.Н., Сулейманов Б.И.* От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам // Ж. эксперим. и теор. физ. 2010. Т. 137. Вып. 1. С. 149–164.
46. *Захаров С.В.* Асимптотическое решение многомерного уравнения Бюргерса вблизи сингулярности // Ж. эксперим. и теор. физ. 2018. Т. 196. № 1. С. 42–49.
47. *Маслов В.П.* Когерентные структуры, резонансы и асимптотическая неединственность для уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса // Успехи матем. наук. 1986. Т. 41. Вып. 6 (252). С. 19–35.
48. *Ильин А.М., Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
49. *Данилин А.Р.* Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 11. С. 27–60.
50. *Данилин А.Р.* Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 12. С. 2166–2177.