ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 6, с. 939–962

УДК 519.63

# ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ КОШИ[1)]

**© 2020 г. А. Б. Бакушинский[1,*], М. Ю. Кокурин[2,**], М. М. Кокурин[2,***]**

*[1] 117312 Москва, пр-т 60-летия Октября, 9, ФИЦ ”Информатика и управление” РАН Институт системного анализа, Россия*

*[2] 424001 Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский государственный университет, Россия*

**e-mail: bakush@isa.ru*

***e-mail: kokurinm@yandex.ru*

****e-mail: kokurin@nextmail.ru*

Поступила в редакцию 24.10.2019 г.
Переработанный вариант 24.10.2019 г.
Принята к публикации 11.02.2020 г.

Приводится обзор результатов исследований последних лет по необходимым и достаточным условиям сходимости с заданной скоростью методов аппроксимации решений нерегулярных операторных уравнений. Изложение ведется в контексте классических прямых и обратных теорем теории приближений. Близость получаемых необходимых и достаточных условий позволяет дать почти полную характеристику решений, на которых достигается та или иная скорость сходимости исследуемых методов. В числе рассматриваемых задач нерегулярные линейные и нелинейные операторные уравнения, а также некорректные задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядка. Рассматриваются процедуры устойчивой аппроксимации решений нерегулярных линейных уравнений общего вида, классы разностных методов регуляризации и метод квазиобращения для решения некорректных задач Коши, а также класс итеративно регуляризованных методов типа Гаусса–Ньютона для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений. Библ. 61.

**Ключевые слова:** нерегулярное уравнение, нелинейное уравнение, итерационные методы, регуляризация, некорректная задача Коши, конечно-разностные методы, скорость сходимости, условие истокопредставимости.

**DOI:** 10.31857/S0044466920060022

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Объектом рассмотрения в работе являются итерационные и конечно-разностные процедуры решения нерегулярных операторных уравнений вида

$$F(x) = f, \quad x \in X. \tag{1.1}$$

Оператор $F : X \to Y$ в (1.1) действует между гильбертовыми или банаховыми пространствами $X$, $Y$; $f \in Y$. В типичных для приложений случаях в качестве $X$, $Y$ выступают функциональные пространства Лебега, Соболева и т.п. Предполагается, что оператор $F$ дифференцируем по Фреше и производная $F'(x)$ удовлетворяет условию Липшица для точек $x$ из окрестности искомого решения $x^*$. Как показывает многолетний опыт построения и исследования численных методов решения уравнений (1.1), перечисленные условия близки к минимально необходимым для создания содержательной теории этих методов. В теории классических методов решения нелинейных уравнений (методы Гаусса–Ньютона, Ньютона–Канторовича, градиентный метод [1], [2]) дополнительно предполагается, что оператор задачи обладает свойством регулярности, по крайней

[1)]Работа выполнена в рамках государственного задания (проект 1.5420.2017/8.9), поддержана стипендией Президента РФ молодым ученым и аспирантам (СП-5252.2018.5).

мере, в окрестности решения. Уравнение (1.1) и определяющий его оператор $F$ называются регулярными в окрестности $x^*$, если оператор $F'(x^*)^{-1} \in L(Y, X)$, либо $(F'^*(x^*)F'(x^*))^{-1} \in L(X, X)$. В этом случае оператор $F'(x)$, либо $F^*(x)F'(x)$ непрерывно обратим также и для всех $x$ из подходящей окрестности точки $x^*$. Если (1.1) есть линейное уравнение с оператором $F(x) = Ax - f$, $A \in L(X, Y)$, то указанные требования сводятся к непрерывной обратимости $A$ или $A^*A$ соответственно. Значительное внимание в литературе уделяется также различным ослабленным вариантам требования регулярности, среди которых отметим условие $p$-регулярности [3], условие касательного конуса (tangential cone condition) и условие образа (range invariance condition) [4, pp. 6, 78], [5, Ch. 7]. Предметом анализа в настоящей работе являются методы решения различных классов уравнений (1.1) при отсутствии у оператора задачи свойства регулярности в классическом или ослабленном виде. Такая ситуация возникает, например, если оператор $F'(x)$ является вполне непрерывным для точек $x$ из окрестности $x^*$. Уравнения такого типа часто возникают в качестве математических моделей прикладных обратных задач, в т.ч. обратных задач для уравнений математической физики, см., например, [6]. При отсутствии свойства регулярности уравнение (1.1), как правило, представляет собой некорректную задачу в том смысле, что решение (1.1) существует не для всех элементов $f$, если же $F^{-1}(f) \neq \emptyset$, то отсутствует непрерывная зависимость решения $x = F^{-1}(f)$ от вариаций элемента $f$. В то же время в приложениях указанный элемент обычно бывает задан с погрешностью, так что вместо него доступно приближение $\tilde{f}$, $\|\tilde{f} - f\|_Y \le \delta$. Уровень погрешности $\delta$ также обычно предполагается заданным. Здесь и далее $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ есть норма в гильбертовом или банаховом пространстве $\mathscr{X}$. Вычислительные трудности, связанные с отсутствием непрерывной обратимости оператора $F$ в нерегулярном случае, преодолеваются путем построения регуляризующих алгоритмов $R_\delta$, ставящих в соответствие паре $(\delta, \tilde{f})$ аппроксимацию $R_\delta(\tilde{f})$ элемента $x^*$. При конструировании $R_\delta$ на первом этапе для разрывного оператора $F^{-1} : F(X) \subset Y \to X$ тем или иным образом строится аппроксимация семейством непрерывных отображений $\mathscr{G}_\alpha : Y \to X$ с параметром регуляризации $\alpha \in (0, \alpha_0]$ так, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \|\mathscr{G}_\alpha(f) - F^{-1}(f)\|_X = 0 \quad \forall f \in F(X). \tag{1.2}$$

Затем выбирается зависимость $\alpha = \alpha(\delta, \tilde{f})$ так, чтобы равномерно относительно выбора $\tilde{f} \in Y$ из условия $\|\tilde{f} - f\|_Y \le \delta$ выполнялось

$$\lim_{\delta \to 0} \|\mathscr{G}_{\alpha(\delta, \tilde{f})}(\tilde{f}) - \mathscr{G}_{\alpha(\delta, \tilde{f})}(f)\|_X = 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta, \tilde{f}) = 0. \tag{1.3}$$

В частности, зависимость $\alpha = \alpha(\delta, \tilde{f})$ может иметь более простой вид $\alpha = \alpha(\delta)$. Из (1.2) и (1.3) следует, что элемент $R_\delta(\tilde{f}) = \mathscr{G}_{\alpha(\delta, \tilde{f})}(\tilde{f})$ является аппроксимацией решения $x^* = F^{-1}(f)$, адекватной имеющемуся приближению $\tilde{f}$ с погрешностью $\delta$. Примеры реализации описанной общей схемы и возникающие на этом пути проблемы подробно освещены в литературе по методам регуляризации [4]–[10]. Если решение уравнения (1.1) неединственно, то в качестве $F^{-1}(f)$ выбирается элемент, выделяемый из множества решений некоторым фиксированным правилом, см., например, (2.1.3). Ключевым элементом этой схемы является построение непрерывных аппроксимации $\mathscr{G}_\alpha$, удовлетворяющей условию (1.2). Особый интерес представляют оценки точности приближения $\|\mathscr{G}_\alpha(f) - F^{-1}(f)\|_X$ в терминах параметра регуляризации $\alpha$ на тех или иных классах элементов $f \in F(X)$. Такие оценки вместе с оценками нормы в (1.3) доставляют в итоге оценки точности процедуры регуляризации $R_\delta$ в терминах уровня погрешности $\delta$.

В настоящем обзоре мы сосредоточим внимание именно на проблеме оценки точности аппроксимации $F^{-1}$ семействами непрерывных отображений $\mathscr{G}_\alpha$ в применении к различным классам линейных и нелинейных операторов $F$. Нас интересуют по возможности близкие друг к другу необходимые и достаточные условия на элемент $f \in F(X)$, обеспечивающие выполнение оценки

$$\|\mathscr{G}_\alpha(f) - F^{-1}(f)\|_X \le \varphi(\alpha), \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{1.4}$$

для тех или иных функций $\varphi : (0, \alpha_0] \to \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha) = 0$. Такая постановка близка к классической проблематике прямых и обратных теорем теории приближения функций, см., например, [11], [12] и указанные там ссылки. Центральным вопросом этой теории является получение конструктивных оценок погрешности получаемого приближения в зависимости от характеристик приближаемой функции, в т.ч. параметров, характеризующих ее гладкость. В концентрированном виде имеющийся здесь обширный массив результатов находит выражение в так называемых прямых и обратных теоремах теории приближений. Теоремы первого типа имеют вид достаточных утверждений о точности приближения и доставляют оценки погрешности аппроксимации в данной норме, в зависимости от параметров, характеризующих гладкость приближаемой функции в подходящей шкале. Теоремы второго типа имеют вид необходимых утверждений о скорости сходимости аппроксимаций и утверждают, что сходимость аппроксимаций с заданной скоростью в соответствующей норме влечет некоторый уровень гладкости приближаемой функции в той же шкале. В классической теории приближений в качестве приближаемых функций рассматриваются непрерывные (периодические) функции на отрезке, а в качестве инструмента аппроксимации используются тригонометрические, либо алгебраические полиномы. В этом случае упомянутые прямые и обратные теоремы были впервые получены Д. Джексоном и С.Н. Бернштейном соответственно. Как правило, указанные необходимые условия оказываются весьма близкими к достаточным условиям, либо совпадают с ними. В последнем случае эти условия доставляют исчерпывающее описание класса функций, на которых достигается данная скорость сходимости аппроксимаций. Характерным примером является вытекающее из теорем Д. Джексона и С.Н. Бернштейна описание семейства $2\pi$-периодических непрерывных функций $f$, для которых $E_n(f)$, величина погрешности наилучшей равномерной аппроксимации тригонометрическими полиномами степени $n$, допускает степенную оценку: $E_n(f) = O(n^{-(p+\varepsilon)})$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varepsilon \in (0,1)$. Это семейство в точности совпадает с классом всех $2\pi$-периодических функций $f \in C^{(p)}[0, 2\pi]$, для которых производная $f^{(p)}$ гёльдерова с показателем $\varepsilon$. Статья посвящена аналогам прямых и обратных теорем теории приближений функций для различных процедур аппроксимации решения $F^{-1}(f)$ уравнения (1.1) на различных классах операторов $F$.

Дальнейшее содержание статьи следующее. В разд. 2 приведен обзор результатов относительно необходимых и достаточных условий сходимости с заданной скоростью процедур аппроксимации решений нерегулярных линейных уравнений общего вида. Раздел 3 посвящен нерегулярным линейным уравнениям специального вида, связанным с некорректными задачами Коши для дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядка. В качестве процедур аппроксимации рассматриваются классы конечно-разностных схем полудискретизации задач по времени, а также метод квазиобращения. Наконец, разд. 4 посвящен обзору результатов об условиях, необходимых и достаточных для сходимости с данной скоростью итеративно регуляризованных методов типа Гаусса–Ньютона. Указанные методы предназначены для решения нерегулярных нелинейных уравнений вида (1.1) с произвольным вырождением. Разделы 1, 2, 4 написаны А.Б. Бакушинским и М.Ю. Кокуриным, разд. 3 написал М.М. Кокурин.

## 2. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

### *2.1. Методы аппроксимации решений нерегулярных линейных уравнений. Прямые теоремы*

Рассмотрим линейное уравнение

$$Ax = f, \quad x \in X, \tag{2.1.1}$$

с оператором $A \in L(X, X)$, предполагая, что $A^* = A \geq O$, пространство $X$ гильбертово. Непрерывная обратимость оператора $A$ не предполагается. Считаем, что $f \in \mathcal{R}(A)$, поэтому множество $X_* = A^{-1}(f)$ решений задачи (2.1.1) непусто и замкнуто. Здесь и далее через $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ обозначаются соответственно образ и область определения линейного в общем случае неограниченного оператора $\mathcal{A}$. Пусть $M \geq \|A\|_{L(X,X)}$, тогда $\sigma(A) \subset [0, M]$. Через $\sigma(\mathcal{A})$ в статье обозначается спектр оператора $\mathcal{A}$. Зафиксируем начальное приближение $\xi \in X$ и вещественно- или комплекснозначную функцию $\Theta(\lambda, \alpha)$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$ такую, что при каждом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ функция $\Theta(\cdot, \alpha)$ измерима по Борелю на отрезке $[0, M]$. Выбор $\Theta$ подчиним следующему основному условию.

**Условие 2.1.1.** *Существует такая константа $p_0 > 0$, что для всех $p \in [0, p_0]$ имеет место оценка*

$$\sup_{\lambda\in[0,M]} \left|1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda\right| \lambda^p \le C_1\alpha^p \qquad \forall\alpha \in (0,\alpha_0],$$

*где $C_1 = C_1(p_0) > 0$.*

Здесь и далее $C_1, C_2, \ldots$ — положительные константы, в необходимых случаях указываются параметры, от которых эти константы могут зависеть. В разделах статьи принята независимая нумерация констант.

Для фиксированной функции $\Theta$ определим семейство элементов

$$x_\alpha = x_\alpha(f) = (E - \Theta(A,\alpha)A)\xi + \Theta(A,\alpha)f, \quad \alpha \in (0,\alpha_0], \tag{2.1.2}$$

аппроксимирующих решение уравнения (2.1.1) или, иначе, метод приближенного решения этого уравнения. Через $E$ в статье обозначается единичный оператор пространства $X$. Функция $\Theta$ называется порождающей функцией для метода (2.1.2). Точная верхняя грань $p^* \in (0,\infty]$ возможных значений величины $p_0$ в условии 2.1.1 называется квалификацией метода (2.1.2). В данном случае аппроксимационная конструкция $\mathcal{G}_\alpha(f)$ в (1.2) имеет вид $\mathcal{G}_\alpha(f) = x_\alpha(f)$, $\alpha \in (0,\alpha_0]$.

Через $P_D$ далее обозначаем оператор метрического проектирования из $X$ на выпуклое замкнутое множество $D \subset X$. Аппроксимационные свойства семейства (2.1.2) в отношении решения уравнения (2.1.1) устанавливает следующая теорема [8, с. 33–37], [13, с. 42].

**Теорема 2.1.1.** *Пусть выполняется условие* 2.1.1*, тогда*

1) *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\alpha\to 0}\|x_\alpha - x^*\|_X = 0, \quad x^* = P_{X_*}(\xi). \tag{2.1.3}$$

2) *Если при этом начальная погрешность имеет вид*

$$x^* - \xi = A^p v, \quad v \in X, \tag{2.1.4}$$

*и $p, s \ge 0$, $p + s \in (0, p_0]$, то в дополнение к* (2.1.3) *справедлива оценка скорости сходимости приближений $x_\alpha$:*

$$\left\|A^s(x_\alpha - x^*)\right\|_X \le l\alpha^{p+s}, \quad \alpha \in (0,\alpha_0]. \tag{2.1.5}$$

Соотношения (2.1.3) и (2.1.5) при $s = 0$ означают, что агрегат (2.1.2) удовлетворяет условиям (1.2) и (1.4) с $\varphi(\alpha) = l\alpha^p$. В данном случае аппроксимируемый однозначный разрывный оператор $F^{-1}$ имеет вид $F^{-1}(f) = P_{A^{-1}(f)}(\xi)$.

Представления, подобные (2.1.4), носят название условий истокопредставимости и являются типичными требованиями на искомое решение, вводимыми для получения оценок скорости сходимости методов решения уравнений (2.1.1). Ввиду той роли, которую указанные условия играют в теории методов решения уравнений (2.1.1), они неоднократно анализировались как в общем виде, так и применительно к операторам $A$ частного вида (см., например, [14]–[17]). Во многих практически интересных случаях представление (2.1.4) содержательно интерпретируется как условие повышенной гладкости элемента $x^* - \xi$ по сравнению с гладкостью, предписываемой исходным пространством $X$. Из сказанного ясна роль квалификации как одной из основных характеристик сходимости процедур аппроксимации (2.1.2). В частности, конечность или бесконечность $p^*$ определяет насыщаемость, либо ее отсутствие у рассматриваемой процедуры. Насыщаемость процедуры (2.1.2) означает, что увеличение значения $p$ (в типичном случае — "показателя гладкости") начальной невязки сверх некоторого порогового значения не гарантирует в силу теоремы 2.1.1 аналогичного увеличения показателя в правой части (2.1.5), определяющего скорость сходимости приближений $x_\alpha$. Такой эффект возникает, когда показатель истокопредставимости в (2.1.4) превышает квалификацию процедуры. Напротив, процедуры, имеющие бесконечную квалификацию, свободны от эффекта насыщения и в силу (2.1.5) обладают сколь угодно быстрой степенной сходимостью, лишь бы начальная невязка $x^* - \xi$ была достаточно "гладкой" в смысле представления (2.1.4).

Обратимся теперь к уравнению (2.1.1) с произвольным оператором $A \in L(X, Y)$, где $X$, $Y$ – гильбертовы пространства. Применяя к обеим частям (2.1.1) оператор $A^*$, приходим к уравнению

$$A^*Ax = A^*f, \quad x \in X, \tag{2.1.6}$$

оператор которого самосопряжен и неотрицателен. Применяя схему (2.1.2) к (2.1.6), получаем семейство процедур аппроксимации решения уравнения (2.1.1):

$$x_\alpha = (E - \Theta(A^*A, \alpha)A^*A)\xi + \Theta(A^*A, \alpha)A^*f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{2.1.7}$$

Как и выше, пусть $X_*$ – множество решений уравнения (2.1.1). Предположим, что $M \ge \|A\|_{L(X,Y)}$. Аппроксимационные свойства агрегата (2.1.7) устанавливает следующая теорема [8, с. 33–37], [13, с. 45].

**Теорема 2.1.2.** *Пусть выполняется условие* 2.1.1 *с заменой* $M$ *на* $M^2$. *Тогда*

1) *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\alpha \to 0} \|x_\alpha - x^*\|_X = 0, \quad x^* = P_{X_*}(\xi).$$

2) *Если при этом начальная невязка имеет вид*

$$x^* - \xi = (A^*A)^p v, \quad v \in X, \tag{2.1.8}$$

*и* $p, s \ge 0$, $p + s \in (0, p_0]$, *то справедлива оценка*

$$\left\|(A^*A)^s (x_\alpha - x^*)\right\|_X \le l\alpha^{p+s}, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{2.1.9}$$

Если $s = 0$, то (2.1.5) и (2.1.9) сводятся к оценке $\|x_\alpha - x^*\|_X = O(\alpha^p)$ с тем же показателем $p$, что и в соответствующем условии истокопредставимости (2.1.4) и (2.1.8).

Приведем несколько наиболее распространенных в вычислительной практике порождающих функций $\Theta$ и конкретизируем для них вид схемы (2.1.7).

**Пример 2.1.1.** Функция

$$\Theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1} \tag{2.1.10}$$

удовлетворяет условию 2.1.1 при $p_0 \in (0, 1]$, так что $p^* = 1$. Схема (2.1.7), (2.1.10) приводит к методу А.Н. Тихонова

$$(A^*A + \alpha E)x_\alpha = \alpha\xi + A^*f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0].$$

**Пример 2.1.2.** Зафиксируем произвольно $N \in \mathbb{N}$. Функция

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\lambda + \alpha}\right)^N\right] \tag{2.1.11}$$

удовлетворяет условию 2.1.1 при $p_0 \in (0, N]$, поэтому $p^* = N$. Функция (2.1.10) содержится в семействе (2.1.11) при $N = 1$. Процедура (2.1.7), (2.1.11) реализуется в виде $N$-шагового итерационного процесса

$$\begin{gathered} x_\alpha = x_\alpha^{(N)}, \\ x_\alpha^{(0)} = \xi; \quad (A^*A + \alpha E)x_\alpha^{(k+1)} = \alpha x_\alpha^{(k)} + A^*f, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \end{gathered} \tag{2.1.12}$$

Метод (2.1.12) называется итерированным методом А.Н. Тихонова.

**Пример 2.1.3.** Функция

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda^{-1}(1 - \exp(-\lambda/\alpha)), & \lambda \ne 0, \\ \alpha^{-1}, & \lambda = 0, \end{cases} \tag{2.1.13}$$

удовлетворяет условию 2.1.1 при любом $p_0 > 0$. Схема (2.1.7), (2.1.13) реализуется следующим образом:

$$\begin{gathered} x_\alpha = u(\alpha^{-1}), \quad \alpha \in (0, \alpha_0]; \\ \frac{du(t)}{dt} + A^*Au(t) = A^*f, \quad u(0) = \xi. \end{gathered} \tag{2.1.14}$$

Метод (2.1.14) принято называть методом установления.

**Пример 2.1.4.** Пусть $g\colon [0, M^2] \to \mathbb{R}$ – измеримая по Борелю, ограниченная и непрерывная в точке $\lambda = 0$ функция такая, что

$$\sup_{\lambda\in[\varepsilon, M^2]} |1 - g(\lambda)\lambda| < 1 \quad \forall \varepsilon \in (0, M^2]. \tag{2.1.15}$$

Тогда функция

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda^{-1}[1 - (1 - g(\lambda)\lambda)^{1/\alpha}], & \lambda \neq 0; \\ \alpha^{-1} g(0), & \lambda = 0, \end{cases} \tag{2.1.16}$$

определенная для дискретного множества значений $\alpha = n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию 2.1.1 при всех $p_0 > 0$. Процедура (2.1.7), (2.1.16) допускает реализацию в виде конечного итерационного процесса [13, с. 37]: если $\alpha = n^{-1}$, то

$$\begin{gathered} x_\alpha = x^{(n)}, \\ x^{(0)} = \xi; \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - g(A^*A)A^*(Ax^{(k)} - f), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{2.1.17}$$

Указанным выше требованиям на функцию $g$, в том числе условию (2.1.15), удовлетворяют, например, функции $g(\lambda) \equiv \gamma \in (0, 2M^{-2})$ и $g(\lambda) = (\lambda + \gamma)^{-1}$, $\gamma > 0$. Им отвечают соответственно простейшая явная и неявная итерационные схемы решения (2.1.1).

Поскольку порождающие функции из примеров 2.1.3 и 2.1.4 удовлетворяют условию 2.1.1 без ограничений сверху на величину $p_0$, соответствующие процедуры (2.1.14), (2.1.17) являются ненасыщаемыми, так что $p^* = \infty$.

### *2.2. Обратные теоремы для методов аппроксимации решений нерегулярных линейных уравнений*

Следуя [18], обратимся к обратным теоремам о скорости сходимости аппроксимаций (2.1.7). Рассмотрим вначале случай, когда параметр регуляризации $\alpha$ непрерывно меняется на $(0, \alpha_0]$. В дополнение к условию 2.1.1 введем следующее

**Условие 2.2.1.** *Имеет место соотношение*

$$\int_0^{\alpha_0} \alpha^{-2\tau-1} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|^2 \, d\alpha \geq \frac{C_2}{\lambda^{2\tau}} \quad \forall \lambda \in (0, M^2] \quad \forall \tau \in (0, p_0),$$

*где константа* $C_2 = C_2(\tau) > 0$.

**Теорема 2.2.1.** *Пусть выполняется условие* 2.2.1. *Предположим, что для заданных* $p$, $s$ *таких, что* $p > 0$, $s \geq 0$, $p + s \in (0, p_0]$ *справедлива оценка*

$$\left\| (A^*A)^s (x_\alpha - x^*) \right\|_X \leq l\alpha^{p+s}, \quad \alpha \in (0, \alpha_0],$$

*где приближения* $x_\alpha$ *определены согласно* (2.1.7), $x^* = P_{X_*}(\xi)$. *Тогда для любого* $q \in (0, p)$ *имеет место включение*

$$x^* - \xi \in \mathcal{R}((A^*A)^q). \tag{2.2.1}$$

В случае итерационных методов (2.1.17) с дискретным параметром регуляризации $\alpha = n^{-1}$ нам потребуется дискретный аналог условия 2.2.1.

**Условие 2.2.2.** *Функция* $g$ *удовлетворяет условиям примера* 2.1.4, *и, кроме того, выполняется соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\tau-1} |1 - g(\lambda)\lambda|^{2n} \geq \frac{C_3}{\lambda^{2\tau}} \quad \forall \lambda \in (0, M^2], \quad \forall \tau > 0,$$

*где константа* $C_3 = C_3(\tau) > 0$.

**Теорема 2.2.2.** *Пусть выполняется условие* 2.2.2. *Предположим, что для заданных* $p$, $s$ *таких, что* $p > 0$, $s \geq 0$ *выполняется оценка*

$$\left\|(A^* A)^s(x^{(n)} - x^*)\right\|_X \leq l \cdot n^{-(p+s)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*где приближения* $x^{(n)}$ *определены в* (2.1.17), $x^* = P_{X_*}(\xi)$. *Тогда для любого* $q \in (0, p)$ *имеет место включение* (2.2.1).

Согласно теоремам 2.1.2, 2.2.1, 2.2.2, условие истокопредставимости (2.1.8) с показателем $p$, достаточное для выполнения степенной оценки (2.1.9), включающей тот же показатель, близко к необходимому.

**Замечание 2.2.1.** Как показывает пример из [20, с. 138], включение $q \in (0, p)$ в теоремах 2.2.1, 2.2.2 не может быть в общем случае заменено равенством $q = p$. В то же время такая замена возможна в случае $p = p^*$, где $p^* < \infty$ – квалификация рассматриваемого метода [19, p. 81].

Альтернативный способ получения обратных теорем с заменой условий 2.2.1, 2.2.2 нижеприведенным неравенством (2.2.4) развит в [19].

Предыдущие результаты обобщаются на схемы вида (2.1.2) для аппроксимации решений нерегулярных уравнений (2.1.1) с оператором $A \in L(X, X)$, действующим в произвольном банаховом пространстве $X$ [9, гл. 1]. Ключевым условием на оператор $A$ в этом круге вопросов является следующее условие секториальности.

**Условие 2.2.3.** *Справедливо включение* $\sigma(A) \subset K(\varphi_0) \cup \{0\}$, $\varphi_0 \in (0, \pi)$ *и имеет место оценка*

$$\|R(\lambda, A)\|_{L(X,X)} \leq \frac{c_0}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{K(\varphi_0) \cup \{0\}\},$$

$$K(\varphi_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \,|\, |\arg \lambda| < \varphi_0\},$$

*где постоянная* $c_0$ *не зависит от* $\lambda$.

Здесь и далее через $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda E - \mathcal{A})^{-1}$ обозначается резольвента в общем случае неограниченного оператора $\mathcal{A}$.

Аналогично теоремам 2.2.1, 2.2.2 с заменой $A^*A$ на $A$ и условия (2.2.1) на (2.1.4) формулируются обратные утверждения для теоремы 2.1.1.

В заключительной части раздела приведем условия, необходимые и достаточные для выполнения логарифмических оценок вида

$$\|x_\alpha - x^*\|_X \leq l(-\ln \alpha)^{-p} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0] \quad (p > 0). \tag{2.2.2}$$

Ограничимся рассмотрением процесса (2.1.2) для уравнения (2.1.1) с оператором $A = A^* \geq O$. Ниже считаем, что $\alpha_0 < 1$ и $\|A\|_{L(X,X)} \leq M < 1$. Последнее предположение не является ограничительным, поскольку всегда может быть обеспечено умножением обеих частей уравнения на достаточно малую постоянную. Введем следующее условие на порождающую функцию $\Theta$ (ср. с условием 2.1.1).

**Условие 2.2.4.** *Для всех* $p \geq 0$ *имеет место оценка*

$$\sup_{\lambda \in (0, M]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| (-\ln \lambda)^{-p} \leq C_4 (-\ln \alpha)^{-p} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0],$$

*где* $C_4 = C_4(p) > 0$.

В [16] показано, что условие 2.2.4 выполняется для любой функции $\Theta$, удовлетворяющей условию 2.1.1. Поскольку $\|A\|_{L(X,X)} \leq M < 1$ и функция $\varphi(\lambda) = (-\ln \lambda)^{-p}$, доопределенная по непрерывности при $\lambda = 0$, ограничена на $[0, M]$, оператор $(-\ln A)^{-p} \in L(X, X)$. Достаточное условие для (2.2.2) в виде требования логарифмической истокопредставимости с тем же показателем $p$ устанавливает следующая теорема [16].

**Теорема 2.2.3.** *Пусть выполняются условие* 2.2.4 *и истокообразное представление*

$$x^* - \xi = (-\ln A)^{-p} v, \quad v \in X, \tag{2.2.3}$$

*где* $x^* = P_{X_*}(\xi)$, $p > 0$. *Тогда справедлива оценка* (2.2.2).

Следующая теорема [16] показывает, что представление (2.2.3), достаточное для выполнения оценки (2.2.2), близко к необходимому и не может быть существенно ослаблено.

**Теорема 2.2.4.** *Пусть выполняется условие* 2.1.1 *и*

$$\sup_{\lambda\in[0,M]}|\Theta(\lambda,\alpha)| \le \frac{C_5}{\alpha}, \quad \alpha\in(0,\alpha_0]. \tag{2.2.4}$$

*Предположим, что для заданного* $p > 0$ *выполняется оценка*

$$\|x_\alpha - x^*\|_X \le l(-\ln\alpha)^{-p} \quad \forall\alpha\in(0,\alpha_0], \tag{2.2.5}$$

*где* $x_\alpha$ *определены в* (2.1.2), $x^* = P_{X_*}(\xi)$. *Тогда для любого* $q\in(0,p)$ *имеет место включение*

$$x^* - \xi \in \mathcal{R}((-\ln A)^{-q}). \tag{2.2.6}$$

Непосредственно проверяется, что условию (2.2.4) удовлетворяют все порождающие функции из примеров 2.1.1–2.1.4. Теорема 2.2.4 допускает обобщение на случай произвольного числа логарифмов в оценке (2.2.5) и представлениях (2.2.3), (2.2.6), см. [22].

В следующем примере дополнительно прокомментируем условие (2.2.6).

**Пример 2.2.1.** Пусть $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ есть самосопряженный неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $X; \overline{D(\mathcal{A})} = X$. Предположим, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset [a,\infty)$, $a > 0$. Рассмотрим задачу Коши для абстрактного параболического уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} + \mathcal{A}x(t) = 0, \quad x(0) = x_0.$$

Как известно [21, с. 104], обобщенное решение этой задачи существует для любого $x_0 \in X$ и имеет вид $x(t) = U_{-\mathcal{A}}(t)x_0$, $t \ge 0$, где $U_{-\mathcal{A}}(t) = \exp(-t\mathcal{A})$. При сделанных предположениях записанная выше задача Коши равномерно корректна на каждом промежутке $[0,T]$. Поставим обратную задачу о восстановлении начального условия $x_0 = x$ по известному значению решения в момент $t = T$: $x(T) = U_{-\mathcal{A}}(T)x_0$. Хорошо известно, что в нетривиальных случаях эта задача некорректна. Положим $A = U_{-\mathcal{A}}(T)$, $f = x(T)$ и представим последнюю задачу в виде (2.1.1). В этом случае условие логарифмической истокопредставимости $x^* - \xi \in \mathcal{R}((-\ln A)^{-p})$ эквивалентно включению $x^* - \xi \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^{-p}) = D(\mathcal{A}^p)$. Полученное соотношение трактуется как требование повышенной гладкости представляемого элемента $x^* - \xi$, определяемое областью задания оператора $\mathcal{A}$.

Нетрудно видеть, что обратная задача из примера 2.2.1 эквивалентна прямой задаче для уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathcal{A}x(t), \quad x(0) = f,$$

где дан начальный элемент $f$ и требуется определить $x(T)$. Именно в такой постановке эта задача подробно обсуждается в следующем разделе.

## 3. НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

### *3.1. Прямые и обратные теоремы о скорости сходимости разностных методов решения некорректных задач Коши первого порядка*

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathcal{A}x(t), \quad t\in[0,T], \quad x(0) = f. \tag{3.1.1}$$

Предположим вначале, что $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$, $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ – неограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $X$, со спектром $\sigma(\mathcal{A}) \subset [a,+\infty)$, где $a > 0$. Требуется определить $x(T)$, значение классического решения $x = x(t)$ задачи (3.1.1) в точке $t = T$. Под классическим решением (3.1.1) понимается функция $x : [0,T] \to X$, где $x(0) = f$, $x(t) \in D(\mathcal{A})$, $t \in [0,T]$, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,T]$ в смысле нормы $X$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению из (3.1.1) при $t \in [0,T]$. Далее предполагается, что классическое решение (3.1.1) существует. Задача (3.1.1) в общем случае поставлена некорректно. Однако для любого $f \in D(\mathcal{A})$ она имеет не более одного классического решения [21], [23], [24]. К виду (3.1.1) приводятся некорректные задачи Коши для параболических уравнений и систем с частными производными. Вопросам корректной разрешимости задач типа (3.1.1) с различными классами операторов в гильбертовых и банаховых пространствах, конструированию методов решения этих задач и их приложениям посвящены работы [21], [23]–[32].

Из условий на $\mathcal{A}$ следует существование непрерывного обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$, при этом $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы ограниченных операторов $(U_{-\mathcal{A}}(t))_{t\geq 0}$. Справедливо представление $x(t) = U_{-\mathcal{A}}(T-t)x(T)$. Отсюда следует, что задача (3.1.1) может быть записана в виде операторного уравнения $U_{-\mathcal{A}}(T)x(T) = f$. К этому уравнению могут далее применяться общие методы решения нерегулярных линейных уравнений, описанные в разд. 2. Однако в результате обычно получаются весьма громоздкие и трудно реализуемые на практике конструкции (см., например, [33, с. 105–107]). Более привлекательными представляются подходы к конструированию методов аппроксимации решений (3.1.1), учитывающие дифференциальную структуру этой задачи.

В настоящем разделе речь идет о классе разностных методов решения задачи (3.1.1)

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{n+j} = \Delta t\sum_{j=0}^{k}\beta_j \mathcal{A}x_{n+j}, \quad 0 \le n \le N-k, \quad x_0 = f. \tag{3.1.2}$$

Здесь $\Delta t = T/N$ есть шаг временной дискретизации, $t_n = n\Delta t$, $0 \le n \le N$ суть узлы дискретизации на отрезке $[0, T]$, а элементы $x_n \in X$, $0 \le n \le N$ суть приближения к значениям $x(t_n)$ классического решения в узлах дискретизации. Каждая разностная схема (3.1.2) характеризуется значением $k \ge 1$ и коэффициентами $\alpha_j$, $\beta_j$, $0 \le j \le k$, $\alpha_k = 1$. Если, кроме того, задать начальные элементы $x_1, \dots, x_{k-1}$ разностной схемы, т.е. приближения к значениям искомого решения в начальных узлах дискретизации, то схема (3.1.2) позволяет найти приближения $x_n$ для всех $0 \le n \le N$ по рекуррентной формуле

$$x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1}(\beta_j\Delta t\mathcal{A} - \alpha_j E)(E - \beta_k\Delta t\mathcal{A})^{-1}x_{n+j}.$$

Как и в разд. 2, $E$ есть единичный оператор пространства $X$. Элемент $x_N = x_N(f)$ является приближением к искомому элементу $x(T)$. Таким образом, аппроксимационная конструкция (1.2) для решения рассматриваемой здесь задачи имеет вид $\mathcal{G}_{\Delta t}(f) = x_N(f)$, а роль параметра регуляризации $\alpha$ играет шаг временной дискретизации $\Delta t = T/N$. В [45] на основе описанного аппроксимирующего семейства $\mathcal{G}_{\Delta t}$ строится регуляризующий алгоритм $R_\delta$ для устойчивого решения (3.1.1) при наличии погрешностей в задании начального элемента $f$.

Методы вида (3.1.2) широко применяются для решения задач Коши для скалярных дифференциальных уравнений [34]–[37]. Разностные методы в применении к корректным абстрактным задачам Коши первого порядка в банаховых пространствах подробно изучены в [30, гл. 11]. Применение одной схемы класса (3.1.2) к некорректным задачам Коши впервые обсуждалось в [38]. Изучение регуляризующих свойств разностных методов для некорректных задач Коши было начато в [39], [40]. Первые оценки скорости сходимости и погрешности методов класса (3.1.2) в применении к некорректным задачам Коши для дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядка по времени в гильбертовом и банаховом пространствах были получены в [41]–[44]. Однако в указанных работах рассматривался лишь простейший выбор $x_0 = \ldots = x_{k-1} = f$ начальных элементов разностных схем, что не позволяло достичь максимальной возможной точности методов. В дальнейшем в работах [45], [46] был обоснован оптимальный выбор начальных элементов $x_1, \ldots, x_{k-1}$ многошаговых разностных методов (3.1.2), а также выделены подклассы одношаговых и многошаговых методов, допускающие получение близких друг к другу необходимых и достаточных условий квалифицированной сходимости. Результаты указанных работ охватывают и более общий класс некорректных задач Коши с секториальным оператором $\mathcal{A}$, действующим в произвольном банаховом пространстве, см. условие 3.1.1.

Значительное распространение в последние годы получили подходы к решению некорректных задач Коши, согласно которым вначале вносится малое возмущение в уравнение или начальное условие с целью регуляризации задачи, а уже для корректной возмущенной задачи строятся разностные схемы (см., например, [27]). Параметром регуляризации в указанных вспомогательных задачах является малый параметр, входящий в видоизмененное уравнение, либо в модифицированное начальное условие. Данный параметр наследуется и конструируемыми конечно-разностными схемами регуляризации, реализация которых предполагает надлежащее согласование параметра регуляризации не только с погрешностью, но и с шагами пространственно-временной дискретизации. В частности, к этому типу методов принадлежат разностные схемы на основе широко известного метода квазиобращения и метода вспомогательных граничных условий [23], [26], [27]. Авторы следуют другому подходу к построению разностных методов, согласно которому возмущение уравнения не производится, а параметром регуляризации является сам шаг разностной схемы, что снимает вопрос об их дополнительном согласовании. Этот подход аналогичен применяющемуся в известных методах численного дифференцирования (см., например, [35, с. 84]) и методе $h$-регуляризации для уравнений Вольтерра I рода [47, с. 112], где параметром регуляризации также служит шаг дискретизации.

Для численной реализации изучаемых методов необходимо дополнить полудискретизацию по времени, реализованную в (3.1.2), дискретизацией по пространственным переменным, т.е. конечномерной аппроксимацией пространства $X$ и оператора $\mathcal{A}$. Общий подход к построению таких схем полной дискретизации изложен в [48].

Мы будем рассматривать два подкласса разностных методов (3.1.2), выделенные в [45], [46] и описываемые следующими наборами параметров:

$$R^{(1,1)}:\ k = 1,\quad \alpha_0 = -1,\quad \alpha_1 = 1,\quad \beta_0 = 1-\beta_1,\quad \beta_1 < 0; \tag{3.1.3}$$

$$\begin{gathered} R^{(2,2)}:\ k = 2,\quad \alpha_0 = 1-2A,\quad \alpha_1 = 2A-2,\quad \alpha_2 = 1,\quad \beta_0 = A-B-1, \\ \beta_1 = A+2B+1,\quad \beta_2 = -B,\quad A\in(0,1],\quad B>0, \\ x_1 = 2f-(E+\Delta t\mathcal{A})^{-1}f. \end{gathered} \tag{3.1.4}$$

Здесь под $R^{(k_0,m_0)}$ понимается класс разностных методов с $k = k_0$ и порядком аппроксимации $m \ge m_0$, удовлетворяющих ряду условий, делающих возможным получение оценок точности. Таким образом, $R^{(1,1)}$ есть однопараметрическое семейство двухслойных разностных схем, а $R^{(2,2)}$ является двупараметрическим семейством трехслойных схем.

Схемы класса $R^{(1,1)}$ изучались в [27, с. 306] в рамках анализа более общего класса схем, получающегося путем внесения регуляризующих возмущений в дискретизированный вариант уравнения (3.1.1) и содержащего также разностные схемы на основе метода квазиобращения.

Если $x(t)$ – классическое решение задачи (3.1.1), то элемент $x(T)$ допускает истокообразное представление $x(T) = \mathcal{A}^{-p}w$ с некоторыми $p \ge 1$, $w \in X$. Следующие теоремы [45], [49], [50] устанавливают достаточные условия степенной по $\Delta t$ сходимости методов (3.1.3), (3.1.4) в зависимости от показателя истокопредставимости $p$ соответствующего решения в условиях точных данных.

**Теорема 3.1.1.** *Для разностных методов класса* $R^{(1,1)}$ *в применении к задаче* (3.1.1) *справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_N - x(T)\|_X \le \varphi(\Delta t) \equiv \begin{Bmatrix} C_1(\Delta t)^{p/2}, & 1 \le p < 2 \\ C_1\Delta t, & p \ge 2 \end{Bmatrix},$$

*где* $C_1 = C_1\left(p, \|w\|_X\right)$.

**Теорема 3.1.2.** *Для разностных методов класса* $R^{(2,2)}$ *в применении к задаче* (3.1.1) *имеет место оценка скорости сходимости*

$$\|x_N - x(T)\|_X \le \varphi(\Delta t) \equiv \begin{Bmatrix} C_2(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \le p < 3 \\ C_2(\Delta t)^2, & p \ge 3 \end{Bmatrix},$$

*где* $C_2 = C_2\left(p, \|w\|_X\right)$.

Теоремы 3.1.1 и 3.1.2 показывают, что для агрегата $\mathcal{G}_{\Delta t}(f) = x_N(f)$, определяемого схемами (3.1.2), (3.1.3) и (3.1.2), (3.1.4) соответственно, при условии истокопредставимости элемента $f$ справедливо соотношение (1.4) с $\alpha = \Delta t$ и указанными функциями $\varphi(\Delta t)$.

Для доказательства теорем 3.1.1, 3.1.2 используется единый подход, согласно которому каждому методу класса (3.1.3) или (3.1.4) сопоставляется класс скалярных разностных уравнений, в которых оператор $\mathcal{A}$ заменен на комплексный параметр $\lambda$, с последующим явным решением этих вспомогательных уравнений. Утверждения о сходимости скалярных разностных схем к решениям соответствующих скалярных задач Коши переносятся на случай гильбертова пространства с помощью исчисления самосопряженных операторов.

В [46], [49], [50] с использованием аппарата интерполяции банаховых пространств доказаны следующие теоремы, обратные к теоремам 3.1.1 и 3.1.2.

**Теорема 3.1.3.** *Пусть для решения задачи* (3.1.1) *с некоторым элементом $f$ применяется разностный метод класса $R^{(1,1)}$, и для него справедлива оценка $\|x_N - x(T)\|_X \le C_3(\Delta t)^q$. Тогда для любого $p \in (0, 2q)$ справедливо истокообразное представление $x(T) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^{-p})$. Более того, если $q > 1$, то $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$.*

**Теорема 3.1.4.** *Пусть для решения задачи* (3.1.1) *с некоторым элементом $f$ применяется разностный метод класса $R^{(2,2)}$, и для него справедлива оценка $\|x_N - x(T)\|_X \le C_4(\Delta t)^q$. Тогда для любого $p \in (0, 3q/2)$ справедливо истокообразное представление $x(T) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^{-p})$ . Более того, если $q > 2$, то $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$.*

Таким образом, имеют место близкие друг к другу необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости методов классов $R^{(1,1)}$ и $R^{(2,2)}$ в применении к некорректным задачам Коши (3.1.1), аналогичные результатам разд. 2 для методов решения нерегулярных линейных уравнений общего вида.

В [45], [46], [49], [50] показано, что изложенные результаты допускают частичное распространение на случай некорректных задач Коши для дифференциально-операторных уравнений с секториальными операторами в банаховых пространствах. Оператор $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$, $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ в банаховом пространстве $X$ называется секториальным, если он удовлетворяет следующему условию (ср. с условием 2.2.3).

**Условие 3.1.1.** *Справедливо включение $\sigma(\mathcal{A}) \subset K(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ и имеет место оценка*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{L(X,X)} \le \frac{c_1}{1 + |\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \backslash K(\varphi_0),$$

*где постоянная $c_1$ не зависит от $\lambda$.*

Сектор $K(\varphi_0)$ определен в условии 2.2.3. При выполнении условия 3.1.1 оператор $-\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы $\{U_{-\mathcal{A}}(t)\}_{t \ge 0}$, см. [21], [23]. Условие 3.1.1 позволяет при получении прямых и обратных теорем о квалифицированной сходимости разностных методов и метода квазиобращения использовать исчисление секториальных операторов.

### *3.2. Прямые и обратные теоремы о скорости сходимости метода квазиобращения для некорректных задач Коши первого порядка*

Будем предполагать, что неограниченный плотно определенный оператор $\mathcal{A}$ действует в произвольном банаховом пространстве $X$ и удовлетворяет условию секториальности 3.1.1.

Развитая в [46], [49], [50] техника доказательства теорем о степенной сходимости разностных методов применима также к изучению метода квазиобращения для задачи (3.1.1), см. [23], [26]. Образуем регуляризованную корректную задачу Коши

$$\frac{dx_\varepsilon(t)}{dt} = (\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}^2)x_\varepsilon(t), \quad x_\varepsilon(0) = f, \tag{3.2.1}$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$. Обобщенное решение задачи (3.2.1) имеет вид

$$x_\varepsilon(t) = U_{\mathcal{A} - \varepsilon\mathcal{A}^2}(t)f, \quad 0 \le t \le T.$$

Здесь $\{U_{\mathcal{A}-\varepsilon\mathcal{A}^2}(t)\}_{t\ge 0}$ — аналитическая полугруппа непрерывных операторов в $X$, порожденная оператором $\mathcal{A}-\varepsilon\mathcal{A}^2$. В методе квазиобращения в качестве приближения к значению $x(T)$ классического решения задачи (3.1.1) при $t = T$ выбирается элемент $x_\varepsilon(T)$. Таким образом, в данном случае аппроксимационная конструкция в (1.2) имеет вид

$$\mathcal{G}_\varepsilon(f) = x_\varepsilon(T) = U_{\mathcal{A}-\varepsilon\mathcal{A}^2}(T)f.$$

Для скорости сходимости метода квазиобращения при условии истокопредставимости $x(T) = \mathcal{A}^{-p}w$, $p \ge 1$, $w \in X$, в [46], [49], [50] установлены прямая и обратная теоремы, аналогичные теоремам 3.1.1–3.1.4.

**Теорема 3.2.1.** *Пусть выполнено условие* 3.1.1. *Тогда для метода квазиобращения* (3.2.1) *в применении к задаче* (3.1.1) *справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_\varepsilon(T) - x(T)\|_X \le \varphi(\varepsilon) \equiv \begin{cases} C_5\varepsilon^{p/2}, & 1 \le p < 2 \\ C_5\varepsilon\ln\dfrac{1}{\varepsilon}, & p = 2 \\ C_5\varepsilon, & p > 2 \end{cases}, \quad C_5 = C_5\left(p, \|w\|_X\right).$$

**Теорема 3.2.2.** *Пусть выполнено условие* 3.1.1 *и для скорости сходимости метода квазиобращения* (3.2.1) *в применении к задаче* (3.1.1) *с некоторым элементом $f$ справедлива оценка*

$$\|x_\varepsilon(T) - x(T)\|_X \le C_6\varepsilon^q. \tag{3.2.2}$$

*Тогда для любого $p \in (0, 2q)$ справедливо истокообразное представление $x(T) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^{-p})$.*

Таким образом, имеют место близкие друг к другу необходимые и достаточные условия квалифицированной сходимости метода квазиобращения в терминах показателя истокопредставимости искомого решения. В прямой теореме 3.2.1 установлена оценка вида (1.4) для аппроксимирующего семейства $\mathcal{G}_\varepsilon$.

В [23, гл. III, § 10] для случая истокопредставимости с показателем $p = 4$ получена оценка $\|x_\varepsilon(T) - x(T)\|_X \le C_7\varepsilon$. Теорема 3.2.1 показывает, что условие $p = 4$ здесь завышено и может быть заменено на $p > 2$. Наконец, в [50] установлено, что если пространство $X$ гильбертово, а оператор $\mathcal{A}$ самосопряженный со строго положительным спектром, то теорема 3.2.2 допускает следующее усиление: оценка (3.2.2) с $q > 1$ влечет $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$, как и в теореме 3.1.3.

### *3.3. Разностные методы решения некорректных задач Коши второго порядка. Постановка задачи*

Рассмотрим теперь некорректную задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка по времени:

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = f \in D(\mathcal{A}), \quad \dot{x}(0) = 0. \end{gathered} \tag{3.3.1}$$

Здесь, как и в разд. 3.1, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$, $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ есть неограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $X$, со спектром $\sigma(\mathcal{A}) \subset [a, +\infty)$, где $a > 0$.Требуется определить элемент $x(T)$, представляющий собой значение классического решения $x = x(t)$ задачи (3.3.1) в точке $t = T$. Под классическим решением (3.3.1) понимается функция $x : [0, T] \to X$, дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, T]$ в смысле нормы $X$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению и начальным условиям из (3.3.1) [21, с. 291–292]. Существование классического решения предполагается. Как и задача (3.1.1), задача (3.3.1) в общем случае поставлена некорректно, но для любого $f \in D(\mathcal{A})$ имеет не более одного классического решения [21, с. 320–321], [23, с. 105].

Рассмотрим следующий однопараметрический класс разностных методов решения задачи (3.3.1):

$$\begin{gathered} x_n - x_{n+1} + x_{n+2} = (\Delta t)^2(-Bx_n + (2B+1)x_{n+1} - Bx_{n+2}), \quad B > 0, \\ 0 \le n \le N-2; \quad x_0 = f, \quad x_1 = \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}(E + (\Delta t)^2\mathcal{A})^{-1}f. \end{gathered} \tag{3.3.2}$$

В [52] установлены регуляризующие свойства методов (3.3.2) при подходящем выборе шага временной дискретизации в зависимости от уровня погрешности $\delta$ начального элемента $f$ задачи (3.3.1) и найдены оценки точности соответствующего регуляризующего алгоритма. В [52] сходимость разностных методов изучалась при наложении на искомое решение $x(t)$ условия продолжимости последнего на отрезок $[0, T_1]$, где $T_1 > T$. Ниже доказываются прямые и обратные теоремы о степенной сходимости методов (3.3.2) при более слабом условии истокопредставимости элемента $x(T)$, аналогичные теоремам 3.1.1–3.1.4.

Задача (3.3.1) является частным случаем некорректной задачи Коши второго порядка с общими краевыми условиями:

$$\ddot{x}(t) = \mathcal{A}x(t), \quad t \in [0,T]; \quad x(0) = f \in D(\mathcal{A}), \quad \dot{x}(0) = g \in D(\mathcal{A}^{1/2}). \tag{3.3.3}$$

Вопрос о возможности непосредственного применения разностных методов к задаче (3.3.3) общего вида выходит за рамки настоящей работы. Вместе с тем задача (3.3.3) с произвольным элементом $g \in D(\mathcal{A}^{1/2})$ может быть приведена к виду (3.3.1). Для этого наряду с (3.3.3) рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\ddot{y}(t) = \mathcal{A}y(t), \quad t \in [0,T]; \quad \dot{y}(0) = g, \quad y(T) = h, \tag{3.3.4}$$

с произвольным $h \in D(\mathcal{A})$; например, можно положить $h = 0$. Согласно [21, гл. 3], задача (3.3.4) является равномерно корректной и ее решение имеет вид

$$y(t) = U_{-\mathcal{A}^{1/2}}(t)z_0 + U_{-\mathcal{A}^{1/2}}(T-t)w_T,$$

где

$$z_0 = (E + U_{-\mathcal{A}^{1/2}}(2T))^{-1}(U_{-\mathcal{A}^{1/2}}(T)h - \mathcal{A}^{-1/2}g) \in D(\mathcal{A}),$$

$$w_T = (E + U_{-\mathcal{A}^{1/2}}(2T))^{-1}(h + U_{-\mathcal{A}^{1/2}}(T)\mathcal{A}^{-1/2}g) \in D(\mathcal{A}).$$

Находя $y(0)$ и вычитая уравнение (3.3.4) из (3.3.3), приходим к следующей задаче для $u(t) = x(t) - y(t)$, имеющей вид (3.3.1):

$$\ddot{u}(t) = \mathcal{A}u(t); \quad t \in [0,T], \quad u(0) = f - y(0), \quad \dot{u}(0) = 0. \tag{3.3.5}$$

Отметим также, что если искомое решение исходной задачи (3.3.3) с $g \neq 0$ допускает истокообразное представление $x(T) \in D(\mathcal{A}^p)$ с некоторым $p \geq 1$, то соответствующую задачу (3.3.5) можно построить так, чтобы ее решение также удовлетворяло данному условию. Для этого в (3.3.4) следует взять $h \in D(\mathcal{A}^p)$.

### *3.4. Прямая теорема о скорости сходимости разностных методов решения некорректной задачи Коши второго порядка*

Настоящий раздел посвящен получению оценок скорости сходимости разностных методов (3.3.2) в применении к задаче (3.3.1) в условиях точных входных данных. Как и в разд. 3.1 и 3.2, через $p$ будем обозначать показатель истокопредставимости элемента $x(T)$: $x(T) = \mathcal{A}^{-p}w$, $p \geq 1$, $w \in X$. В [51] получено следующее представление для погрешности $x_N - x(T)$, доставляемой методами данного класса:

$$x_N - x(T) = (E + V(2T))^{-1}(2v_N(\mathcal{A})V(T) - V(2T) - E)\mathcal{A}^{-p}w = (E + V(2T))^{-1}G_p(\mathcal{A})w. \tag{3.4.1}$$

Здесь

$$v_N(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{X}(\lambda(\Delta t)^2) + \frac{1}{2}\tilde{Y}(\lambda(\Delta t)^2) + \frac{1}{2}\tilde{M}(\lambda(\Delta t)^2)(\tilde{X}(\lambda(\Delta t)^2) - \tilde{Y}(\lambda(\Delta t)^2)),$$

$$\begin{gathered}\tilde{M}(x) = \frac{(B-1)x^2}{(1+x)\sqrt{x(4+(1+4B)x)}},\\ \tilde{X}(x) = \left(\frac{2+(1+2B)x+\sqrt{x(4+(1+4B)x)}}{2(1+Bx)}\right)^N,\end{gathered} \tag{3.4.2}$$

$$\tilde{Y}(x) = \left(\frac{2 + (1 + 2B)x - \sqrt{x(4 + (1 + 4B)x)}}{2(1 + Bx)}\right)^N,$$

$V(t) = U_{-\mathcal{A}^{1/2}}(t)$ есть аналитическая полугруппа, порождаемая оператором $-\mathcal{A}^{1/2}$, и

$$G_p(\lambda) = 2(v_N(\lambda) - \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}T)e^{-\sqrt{\lambda}T}\lambda^{-p} = \frac{2v_N(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}T} - e^{-2\sqrt{\lambda}T} - 1}{\lambda^p}.$$

Ввиду ограниченности оператора $(E + V(2T))^{-1}$ справедлива оценка

$$\|x_N - x(T)\|_X \le C_8 \max_{\lambda\in[a,+\infty)} \frac{\left|2v_N(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}T} - e^{-2\sqrt{\lambda}T} - 1\right|}{\lambda^p}. \tag{3.4.3}$$

Здесь и далее до конца разд. 3 $C_j$ – положительные константы, которые могут зависеть от значений $B$, $p$, $T$, $\|w\|_X$, но не от $\lambda$ или $\Delta t$. Указанную зависимость для краткости не отмечаем.

Пользуясь представлением (3.4.2), запишем по аналогии с [51] оценку

$$\begin{gathered}\left|2v_N(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}T} - e^{-2\sqrt{\lambda}T} - 1\right| \le \left|\tilde{X}(\lambda(\Delta t)^2)e^{-\sqrt{\lambda}T} - 1\right| + \left|\tilde{Y}(\lambda(\Delta t)^2)e^{-\sqrt{\lambda}T} - e^{-2\sqrt{\lambda}T}\right| + \\ + \left|\tilde{M}(\lambda(\Delta t)^2)(\tilde{X}(\lambda(\Delta t)^2) - \tilde{Y}(\lambda(\Delta t)^2))e^{-\sqrt{\lambda}T}\right| = \left|e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)} - 1\right| + e^{Nh_2(\lambda(\Delta t)^2)}\left|e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)} - 1\right| + \\ + \tilde{M}(\lambda(\Delta t)^2)\cdot e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)}\cdot\left|e^{Nh_2(\lambda(\Delta t)^2) - Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)} - 1\right|.\end{gathered} \tag{3.4.4}$$

В (3.4.4) введены обозначения

$$\begin{gathered}h_1(x) = \ln\frac{2 + (1 + 2B)x + \sqrt{x(4 + (1 + 4B)x)}}{2(1 + Bx)} - \sqrt{x}, \\ h_2(x) = \ln\frac{2 + (1 + 2B)x - \sqrt{x(4 + (1 + 4B)x)}}{2(1 + Bx)} - \sqrt{x} = -\ln\frac{2 + (1 + 2B)x + \sqrt{x(4 + (1 + 4B)x)}}{2(1 + Bx)} - \sqrt{x}.\end{gathered} \tag{3.4.5}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 3.4.1.** *При любом* $B > 0$ *справедливо* $h_1(x) \le 0$ *для всех* $x \ge 0$.

**Доказательство.** Имеем $h_1(0) = 0$. Покажем, что $h_1'(x) \le 0$ при $x \ge 0$. Дифференцирование дает:

$$h_1'(x) = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + B\right)x + \left(\frac{1}{2} + B\right)\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x}}{x + \left(\frac{1}{4} + B\right)x^2 + \left(1 + \left(\frac{1}{2} + B\right)x\right)\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x}} - \frac{B}{1 + Bx} - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Элементарно проверяется, что при $x \ge 0$,

$$h_1'(x) \le -\frac{B}{1 + Bx} + \frac{B\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\left(\left(\frac{1}{2} + 2B\right) - \left(\frac{1}{2} + B\right)\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x} - \frac{\frac{1}{4} + B}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x\right) + \left(1 + \left(\frac{1}{2} + B\right)x\right)\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x}} \le$$

$$\le -\frac{B}{1 + Bx} + \frac{B\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x} + B\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + Bx) + (1 + Bx)\sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} + B\right)x}} = 0.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Отметим, что функции $\tilde{M}(x)$, $h_1(x)$ и $h_2(x)$ совпадают с одноименными функциями из [51] при $\varphi_0 = 0$. В частности, в терминах [51] утверждение леммы 3.4.1 означает, что $\Omega(0) = (0,+\infty)$. Рассуждения из [51] приводят к следующим соотношениям:

$$e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)} \le 1, \quad e^{Nh_2(\lambda(\Delta t)^2)} \le 1,$$
$$e^{Nh_2(\lambda(\Delta t)^2) - Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)} \le 1 \quad \forall\lambda \in [a,+\infty),$$
$$\left|e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)} - 1\right| \le C_9\lambda^{3/2}(\Delta t)^2 \quad \forall\lambda \in [a,(\Delta t)^{-4/3}], \tag{3.4.6}$$
$$0 < \tilde{M}(\lambda(\Delta t)^2) \le C_{10} \quad \forall\lambda \in [a,+\infty),$$
$$0 < \tilde{M}(\lambda(\Delta t)^2) \le C_{11}\lambda^{3/2}(\Delta t)^3 \quad \forall\lambda \in [a,(\Delta t)^{-2}].$$

Комбинируя эти оценки с (3.4.3) и (3.4.4), получаем

$$\|x_N - x(T)\|_X \le C_{12}\left(\max\left\{(\Delta t)^2 \max_{\lambda\in[a,(\Delta t)^{-4/3}]}\lambda^{3/2-p}, \max_{\lambda\in[(\Delta t)^{-4/3},+\infty)}\lambda^{-p}\right\} + \right.$$
$$\left. + \max\left\{(\Delta t)^3 \max_{\lambda\in[a,(\Delta t)^{-2}]}\lambda^{3/2-p}, \max_{\lambda\in[(\Delta t)^{-2},+\infty)}\lambda^{-p}\right\}\right).$$

В окончательном виде

$$\|x_N - x(T)\|_X \le \varphi(\Delta t) \equiv \begin{cases} C_{13}(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \le p < \dfrac{3}{2} \\ C_{13}(\Delta t)^2, & p \ge \dfrac{3}{2}. \end{cases} \tag{3.4.7}$$

Мы доказали следующую теорему.

**Теорема 3.4.1.** *Для разностных методов класса* (3.3.2) *в применении к задаче* (3.3.1) *справедлива оценка скорости сходимости* (3.4.7).

Теорема 3.4.1 устанавливает справедливость оценки вида (1.4) для аппроксимирующего семейства $\mathcal{G}_{\Delta t}(f) = x_N(f)$, определенного схемой (3.3.2). Для более общего случая некорректных задач Коши с секториальными операторами в банаховом пространстве аналог теоремы 3.4.1 был установлен в [51]. Условие соответствующей теоремы из [51] содержит труднопроверяемое ограничение на коэффициент $B$, в теореме 3.4.1 это условие снято. Оценка (3.4.7) совпадает с соответствующей оценкой из [51] при $p \ne 3/2$ и усиливает последнюю при $p = 3/2$.

### *3.5. Обратная теорема о скорости сходимости разностных методов решения некорректных задач Коши второго порядка*

Теорема 3.4.1 устанавливает достаточные условия квалифицированной сходимости разностных методов класса (3.3.2) в терминах показателя истокопредставимости искомого решения. Настоящий раздел посвящен получению необходимых условий, близких к достаточным и выраженным в виде обратных теорем. Теорема о необходимых условиях степенной сходимости методов класса (3.3.2), обратная к теореме 3.4.1, формулируется следующим образом.

**Теорема 3.5.1.** *Пусть для решения задачи* (3.3.1) *с некоторым элементом $f$ применяется метод класса* (3.3.2)*, и для него справедлива оценка* $\|x_N - x(T)\|_X \le C_{14}(\Delta t)^q$. *Тогда для любого* $p \in (0, 3q/4)$ *имеет место истокообразное представление* $x(T) \in \mathcal{R}(\mathcal{A}^{-p})$.

**Доказательство.** Зафиксируем $s > 1$. Следуя схеме рассуждений из [46], [51], будем искать значения $p \in (0,s)$, для которых элемент $x(T)$ принадлежит интерполяционному пространству $(X, D(\mathcal{A}^s))_{p/s,1}$. Здесь $D(\mathcal{A}^s)$ рассматривается как банахово пространство с нормой $\|v\|_{D(\mathcal{A}^s)} = \|\mathcal{A}^s v\|_X$. Тогда с помощью теоремы вложения непосредственно выводится справедливость условия истокопредставимости с этими значениями $p$. Мы будем использовать $K$-метод построения интерполяционных пространств [53]. Согласно этому методу, для проверки включения $x(T)\in(X,D(\mathcal{A}^s))_{p/s,1}$ достаточно установить сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty}\sigma^{-\frac{p}{s}-1}K(\sigma,x(T))d\sigma, \tag{3.5.1}$$

где

$$K(\sigma,x(T))=\inf_{x(T)=a_0+a_1,a_0\in X,a_1\in D(\mathcal{A}^s)}\left(\|a_0\|_X+\sigma\left\|\mathcal{A}^s a_1\right\|_X\right).$$

По аналогии с [46] нетрудно показать, что $x_N\in D(\mathcal{A}^s)$ с любым $s>1$, что позволяет с помощью разложений $x(T)=x(T)+0$, $x(T)=(x(T)-x_N)+x_N$ получить оценки

$$\begin{gathered}K(\sigma,x(T))\le C_{15},\\ K(\sigma,x(T))\le C_{16}N^{-q}+\sigma\left\|\mathcal{A}^s x_N\right\|_X\quad\forall\sigma\in[0,+\infty),\quad\forall N\in\mathbb{N}.\end{gathered} \tag{3.5.2}$$

Оценим величину $\left\|\mathcal{A}^s x_N\right\|_X$. В [51] установлено, что

$$x_N=v_N(\mathcal{A})f=2v_N(\mathcal{A})(E+V(2T))^{-1}V(T)x(T). \tag{3.5.3}$$

Далее, в силу определения классического решения, $x(T)\in D(\mathcal{A})$, так что $x(T)=\mathcal{A}^{-1}w$ с некоторым элементом $w\in X$. Учитывая, что операторы $v_N(\mathcal{A})$, $(E+V(2T))^{-1}$, $V(T)$ и $\mathcal{A}^{-1}$ являются ограниченными функциями оператора $\mathcal{A}^{1/2}$ и поэтому перестановочны, приходим к равенству

$$\mathcal{A}^s x_N=2\mathcal{A}^{s-1}v_N(\mathcal{A})(E+V(2T))^{-1}V(T)w.$$

Используя свойства функций самосопряженного оператора [54, гл. 7–9], приходим к оценке

$$\left\|\mathcal{A}^s x_N\right\|_X\le 2\|w\|_X\max_{\zeta\in[\sqrt{a},+\infty)}\zeta^{2s-2}\left|v_N(\zeta^2)\right|(1+e^{-2\zeta T})^{-1}e^{-\zeta T}\le C_{17}\max_{\lambda\in[a,+\infty)}\left|v_N(\lambda)\right|\lambda^{s-1}e^{-\sqrt{\lambda}T}.$$

Подставим в полученную оценку представление (3.4.2) с учетом (3.4.5) и воспользуемся ограниченностью функции $\tilde{M}(x)$ при $x\ge 0$:

$$\left\|\mathcal{A}^s x_N\right\|_X\le\frac{C_{18}}{(\Delta t)^{2s-2}}\left(\max_{x\ge 0}e^{Nh_1(x)}x^{s-1}+\max_{x\ge 0}e^{Nh_2(x)}x^{s-1}\right).$$

Элементарный анализ функций (3.4.5) приводит к оценкам

$$h_1(x)\le-\frac{C_{19}x^{3/2}}{1+x},\quad h_2(x)\le -C_{20}\sqrt{x},\quad x\ge 0. \tag{3.5.4}$$

Проведя с использованием (3.5.4) рассуждения из [51], получаем неравенство

$$\left\|\mathcal{A}^s x_N\right\|_X\le C_{21}N^{\frac{4}{3}(s-1)}. \tag{3.5.5}$$

Из (3.5.2) и (3.5.5) следует, что $K(\sigma,x(T))\le C_{16}N^{-q}+C_{21}\sigma N^{\frac{4}{3}(s-1)}$ при всех $N\in\mathbb{N}$. Выбирая здесь $N=\left[\sigma^{-\frac{1}{\frac{4}{3}(s-1)+q}}\right]$, получаем оценку

$$\forall\sigma\in[0,+\infty),\quad K(\sigma,x(T))\le C_{22}\sigma^{\frac{q}{\frac{4}{3}(s-1)+q}}.$$

Используя ее вместе с соотношением $K(\sigma,x(T))\le C_{15}$ из (3.5.2), оценим интеграл (3.5.1):

$$\int\limits_0^{+\infty}\sigma^{-\frac{p}{s}-1}K(\sigma,x(T))d\sigma=\int\limits_0^{1}\sigma^{-\frac{p}{s}-1}K(\sigma,x(T))d\sigma+\int\limits_1^{+\infty}\sigma^{-\frac{p}{s}-1}K(\sigma,x(T))d\sigma\le C_{22}\int\limits_0^{1}\sigma^{\frac{q}{\frac{4}{3}(s-1)+q}-\frac{p}{s}-1}d\sigma+C_{23}.$$

Мы видим, что при $p \in \left(0, \dfrac{qs}{\frac{4}{3}(s-1)+q}\right)$ этот интеграл конечен и выполнено $p < s$, а значит, условие истокопредставимости справедливо со всеми такими показателями $p$. В силу произвольности $s$, отсюда вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Аналогичная теорема была доказана в [51] применительно к более общему случаю некорректных задач Коши с секториальными операторами в банаховом пространстве, однако с дополнительным труднопроверяемым условием на коэффициенты разностной схемы, требующим компьютерного вычисления. Мы видим, что в частном случае некорректных задач Коши с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве подобные условия не требуются. Другим интересным отличием от [51] является тот факт, что нам здесь пришлось применить теорему вложения однократно, в то время как в [51] ключевым моментом доказательства являлось ее итеративное применение.

### *3.6. Усиленная обратная теорема о скорости сходимости разностных методов решения некорректных задач Коши второго порядка*

Сопоставим прямую теорему о степенной сходимости разностных методов, доказанную в разд. 3.4, с обратной теоремой из разд. 3.5. Теорема 3.4.1 показывает, что для степенной сходимости методов класса (3.3.2) с показателем $q \le 2$ достаточно условие истокопредставимости с показателем $p = 3q/4$. В то же время, согласно теореме 3.5.1, необходимым является условие истокопредставимости с любым показателем $p \in (0, 3q/4)$. Возникает вопрос, каковы условия степенной сходимости методов класса (3.3.2) с показателем $q > 2$. Следующая теорема показывает, что сходимость с такой скоростью возможна лишь в тривиальном случае.

**Теорема 3.6.1.** *Разностные методы класса* (3.3.2) *в применении к задаче* (3.3.1) *допускают оценку скорости сходимости*

$$\|x_N - x(T)\|_X \le C_{24}(\Delta t)^q, \quad q > 2, \tag{3.6.1}$$

*тогда и только тогда, когда* $f = 0$.

**Доказательство.** При $f = 0$ имеем $x(t) \equiv 0$ в силу единственности классического решения задачи (3.3.1), и в частности $x(T) = 0$; кроме того, $x_N = v_N(\mathscr{A})f = 0$ при любом $N$, откуда следует $\|x_N - x(T)\|_X = 0$ и оценка (3.6.1) выполнена.

Докажем обратное утверждение: если справедлива оценка (3.6.1), то $f = 0$. Согласно (3.4.1), определению функции от оператора и свойствам спектрального семейства $\{E_\lambda\}$, имеем

$$\begin{gathered}(E + V(2T))(x_N - x(T)) = G_1(\mathscr{A})w = \int\limits_{a-0}^{+\infty} G_1(\lambda)dE_\lambda w;\\ \|(E + V(2T))(x_N - x(T))\|_X^2 = \int\limits_{a-0}^{+\infty} G_1^2(\lambda)d\|E_\lambda w\|_X^2.\end{gathered} \tag{3.6.2}$$

Здесь учтено, что условие истокопредставимости автоматически выполняется с параметром $p = 1$. Поэтому вместо функции $G_p(\lambda)$ из (3.4.1) используется функция

$$\begin{gathered}G_1(\lambda) = \lambda^{-1}(2v_N(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda}T} - e^{-2\sqrt{\lambda}T} - 1) = \lambda^{-1}((e^{Nh_2(\lambda(\Delta t)^2)} + 1)(e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)} - 1) + \\ + \tilde{M}(\lambda(\Delta t)^2)e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)}(e^{N(h_2(\lambda(\Delta t)^2) - h_1(\lambda(\Delta t)^2))} - 1))\end{gathered}$$

и соответственно $w = \mathscr{A}x(T)$.

Нашей ближайшей целью является получение нижней оценки для $\|(E + V(2T))(x_N - x(T))\|_X$. Покажем, что для любого $M \ge a$ найдется $K_M > 0$ такое, что

$$|G_1(\lambda)| \ge K_M(\Delta t)^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in [a, M]. \tag{3.6.3}$$

В самом деле, с учетом неравенств (3.4.6) и (3.5.4), имеем

$$|G_1(\lambda)| = \lambda^{-1}((e^{Nh_2(\lambda(\Delta t)^2)}+1)(1-e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)}) + \tilde{M}(\lambda(\Delta t)^2)e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)}(1-e^{N(h_2(\lambda(\Delta t)^2)-h_1(\lambda(\Delta t)^2))})) \ge$$
$$\ge M^{-1}(1-e^{Nh_1(\lambda(\Delta t)^2)}) \ge M^{-1}\left(1-e^{-\frac{C_{19}T\lambda^{3/2}(\Delta t)^2}{1+\lambda(\Delta t)^2}}\right) \ge K_M(\Delta t)^2, \quad \lambda\in[a,M],$$

и оценка (3.6.3) доказана.

Из (3.6.2), (3.6.3) вытекает, что для всех $M \ge a$, $N\in\mathbb{N}$ справедливо

$$\begin{gathered}\|(E+V(2T))(x_N - x(T))\|_X^2 \ge \int\limits_{a-0}^{M} G_1^2(\lambda)d\|E_\lambda w\|_X^2 \ge K_M^2(\Delta t)^4\int\limits_{a-0}^{M} d\|E_\lambda w\|_X^2;\\ \|(E+V(2T))(x_N - x(T))\|_X \ge K_M\|P_{[a,M]}w\|_X(\Delta t)^2.\end{gathered} \tag{3.6.4}$$

Здесь $P_{[a,M]} = \int_{a-0}^{M} dE_\lambda$ – ортопроектор из $X$ на собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее части спектра в $[a, M]$.

С другой стороны, из (3.6.1) в силу ограниченности оператора $E+V(2T)$ вытекает

$$\|(E+V(2T))(x_N - x(T))\|_X \le C_{25}(\Delta t)^q, \quad q>2.$$

Сравнивая это соотношение с (3.6.4), получаем

$$K_M\|P_{[a,M]}w\|_X \le C_{25}(\Delta t)^{q-2}, \quad q>2.$$

Произвольно зафиксировав $M \ge a$ и переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta t\to 0$, приходим к выводу, что $P_{[a,M]}w = 0$ для всех $M\ge a$. Это возможно, только если $w = 0$, а значит, в силу (3.5.3), и $f = 2(E+V(2T))^{-1}V(T)x(T) = 2(E+V(2T))^{-1}V(T)\mathcal{A}^{-1}w = 0$. Теорема доказана.

Доказательства теорем 3.4.1, 3.5.1 и 3.6.1 реализуют относительно завершенную программу исследования группы разностных методов (3.3.2) решения линейных некорректных задач Коши второго порядка (3.3.1) с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. Аналогичная программа была ранее реализована в применении к линейным некорректным задачам Коши первого порядка, см. разд. 3.1.

## 4. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### *4.1. Итеративно регуляризованные процессы типа Гаусса–Ньютона. Прямые теоремы*

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x) = f, \quad x\in X, \tag{4.1.1}$$

с оператором $F: X\to Y$, действующим в паре гильбертовых пространств $X$, $Y$. Обозначим через $x^*$ некоторое решение уравнения (4.1.1) и пусть

$$\Omega_R(x^*) = \{x\in X : \|x - x^*\|_X \le R\}, \quad R>0.$$

Будем предполагать, что оператор $F$ дифференцируем по Фреше в шаре $\Omega_R(x^*)$, и производная $F'$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|F'(x) - F'(y)\|_{L(X,Y)} \le L\|x-y\|_X \quad \forall x,y\in\Omega_R(x^*). \tag{4.1.2}$$

Из (4.1.2) следует, что для подходящей константы $M$ выполняется

$$\|F'(x)\|_{L(X,Y)} \le M \quad \forall x\in\Omega_R(x^*).$$

Никакие условия относительно непрерывной обратимости на производную $F'(x)$ не налагаются. Таким образом, в (4.1.1) имеем дело с нерегулярным операторным уравнением общего вида.

Зафиксируем последовательность параметров регуляризации $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, и выберем начальное приближение $x_0 \in \Omega_R(x^*)$. Линеаризация уравнения (4.1.1) в текущей итерационной точке $x_n \in \Omega_R(x^*)$ приводит к уравнению

$$F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) = f, \quad x \in X. \tag{4.1.3}$$

В регулярном случае оператор $F'(x_n)$ непрерывно обратим, по крайней мере, для точек $x_n$, достаточно близких к $x^*$. Поэтому для указанных $x_n$ уравнение (4.1.3) устойчиво разрешимо. Принимая его решение в качестве следующей итерационной точки,приходим к классическому процессу Ньютона–Канторовича $x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}(F(x_n) - f)$. В интересующей нас нерегулярной ситуации уравнение (4.1.3) может не иметь решений, поэтому к нему необходим иной подход. Применяя для аппроксимации решения линейного уравнения (4.1.3) схему (2.1.7) при $\alpha = \alpha_n$ и принимая полученную точку в качестве следующего приближения $x_{n+1}$, приходим к основному итерационному процессу [55]–[58]

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)\big(F(x_n) - f - F'(x_n)(x_n - \xi)\big). \tag{4.1.4}$$

Итерации (4.1.4) носят название итеративно регуляризованного процесса типа Гаусса–Ньютона. Если уравнение (4.1.1) является регулярным, то оператор $F^*(x)F'(x)$ непрерывно обратим в окрестности $x^*$. В этом случае выбор $\Theta(\lambda, \alpha) = \lambda^{-1}$ приводит к классическому методу Гаусса–Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - (F'^*(x_n)F'(x_n))^{-1}F'^*(x_n)(F(x_n) - f),$$

обладающего локальной квадратичной сходимостью.

При построении методов решения нерегулярных уравнений функция $\Theta(\lambda, \alpha)$ предполагается аналитической по $\lambda$ в области $D_\alpha \subset \mathbb{C}$, где $D_\alpha \supset [0, M^2]$ $\forall \alpha \in (0, \alpha_0]$. Сделанное предположение носит технический характер и не приводит фактически к уменьшению общности построений по сравнению с разд. 2.1, поскольку все наиболее популярные в вычислительной практике порождающие функции $\Theta$ (см. примеры 2.1.1–2.1.4) аналитичны в нужной части $\mathbb{C}$. Элемент $\xi \in X$ играет роль вспомогательного параметра, предоставляющего дополнительные возможности управления сходимостью итераций (4.1.4).

Наложим на последовательность параметров регуляризации $\{\alpha_n\}$ следующее ограничение.

**Условие 4.1.1.** *Имеют место соотношения*

$$0 < \alpha_{n+1} \le \alpha_n, \quad n = 0, 1, \ldots; \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad r \triangleq \sup_{n \in \mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} < \infty.$$

Исследование аппроксимационных свойств последовательности $\{x_n\}$ будем проводить в предположении, что начальная невязка $x^* - \xi$ удовлетворяет условию истокопредставимости

$$x^* - \xi = (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v, \quad v \in X, \quad p \ge 1/2. \tag{4.1.5}$$

Оказывается, что при выполнении условия (4.1.5) и соответствующих дополнительных ограничений на параметры процесса (4.1.4) выполняется степенная оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\|_X \le l\alpha_n^p, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1.6}$$

с тем же показателем $p$, что и в (4.1.5). Нам потребуются следующие условия на порождающую функцию в (4.1.4).

**Условие 4.1.2.** *Существует константа* $C_1 > 0$ *такая, что*

$$\sup_{\lambda \in [0, M^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)| \le \frac{C_1}{\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0].$$

**Условие 4.1.3.** *Существует такая константа* $p_0 \ge 1/2$, *что для каждого* $p \in [0, p_0]$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{\lambda \in [0, M^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \lambda^p \le C_2 \alpha^p \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Всюду далее считаем, что участвующий в (4.1.5) показатель истокопредставимости $p \in [1/2, p_0]$. Как и в разд. 2, величину $p^* = \sup p_0$ в условии 4.1.3 называем квалификацией процесса (4.1.4).

Определим семейство контуров $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0]} \subset \mathbb{C}$ таких, что $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$ и $\Gamma_\alpha$ содержит внутри отрезок $[0, M^2]$ действительной оси, $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Семейство $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0]}$ подчиним следующему условию.

**Условие 4.1.4.** *Выполняются соотношения*

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]} \sup_{\lambda\in\Gamma_\alpha} |\lambda| < \infty, \qquad \sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]} \sup_{\lambda\in\Gamma_\alpha, \mu\in[0,M^2]} \frac{|\lambda| + \mu}{|\lambda - \mu|} < \infty.$$

Наложим на порождающую функцию $\Theta$ также следующее дополнительное условие.

**Условие 4.1.5.** *Справедливо соотношение*

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha_0]} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda|}{|\lambda|} |d\lambda| < \infty.$$

Основным результатом этого раздела является прямая теорема о скорости сходимости процесса (4.1.4), см. [59].

**Теорема 4.1.1.** *Пусть выполняются условия* 4.1.1–4.1.5, *имеет место представление* (4.1.5) *и* $p \in [1/2, p_0]$. *Найдутся такие постоянные* $C_3$, $C_4$, *что если*

$$\|x_0 - x^*\|_X \le l\alpha_0^p,$$

$$0 < l \le \min\left\{\frac{C_3}{r^p\alpha_0^{p-1/2}}, \frac{R}{\alpha_0^p}\right\}, \quad \|v\|_X \le d = \frac{1}{r^p}\min\{C_4, l\},$$

*то выполняется оценка* (4.1.6).

Теорема 4.1.1 устанавливает локальную сходимость последовательности $\{x_n\}$ при выборе управляющего параметра $\xi$ из множества

$$\mathcal{M}(x^*) = \{x^* + (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v : \|v\|_X \le d\}.$$

В типичном для приложений случае вполне непрерывного оператора $F(x^*)$ множество $\mathcal{M}(x^*)$ представляет собой эллипсоид с центром в точке $x^*$, не имеющий внутренних точек.

Непосредственные вычисления показывают, что все функции $\Theta$, упоминаемые в следующих далее примерах 4.1.1–4.1.5, удовлетворяют условиям 4.1.2, 4.1.3, 4.1.5 при подходящем выборе контуров $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in(0,\alpha_0]}$.

**Пример 4.1.1.** В случае порождающей функции (2.1.10) основной итерационный процесс (4.1.4) принимает вид

$$(F'^*(x_n)F'(x_n) + \alpha_n E)x_{n+1} = \alpha_n\xi + F'^*(x_n)(F'(x_n)x_n - F(x_n) + f). \tag{4.1.7}$$

Условие 4.1.3 выполняется при $p_0 \in [1/2, 1]$, поэтому $p^* = 1$. Процесс (4.1.7) носит название итеративно регуляризованного метода Гаусса–Ньютона.

**Пример 4.1.2.** Шаг метода (4.1.4), (2.1.11) представляет собой конечный итерационный процесс: $x_{n+1} = x_{n+1}^{(N)}$, где $x_{n+1}^{(0)} = \xi$ и $x_{n+1}^{(k)}$ определяются последовательно из уравнения

$$(F'^*(x_n)F'(x_n) + \alpha_n E)x_{n+1}^{(k+1)} = \alpha_n x_{n+1}^{(k)} + F'^*(x_n)(F'(x_n)x_n - F(x_n) + f),$$
$$k = 0, 1, \ldots, N - 1.$$

В этом случае условие 4.1.3 выполняется при $p_0 \in [1/2, N]$, следовательно, $p^* = N$.

**Пример 4.1.3.** Итерация метода (4.1.4), (2.1.13) может быть реализована следующим образом: $x_{n+1} = u(\alpha_n^{-1})$, где $u = u(t)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} + F'^*(x_n)F'(x_n)u(t) = F'^*(x_n)(F'(x_n)x_n - F(x_n) + f), \quad u(0) = \xi.$$

**Пример 4.1.4.** Пусть функция $\Theta$ имеет вид (2.1.16) при $g(\lambda) \equiv \gamma$, $0 < \gamma < M^{-2}$, параметр регуляризации $\alpha$ принимает значения $n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Итерация метода (4.1.4), (2.1.16) при $\alpha_n = n^{-1}$ имеет вид $x_{n+1} = x_{n+1}^{(n)}$, где $x_{n+1}^{(0)} = \xi$ и $x_{n+1}^{(k)}$ определяются в ходе $n$-шагового итерационного процесса:

$$x_{n+1}^{(k+1)} = (E - \gamma F'^*(x_n)F'(x_n))x_{n+1}^{(k)} + \gamma F'^*(x_n)(F'(x_n)x_n - F(x_n) + f),$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

**Пример 4.1.5.** Пусть функция $\Theta$ имеет вид (2.1.16) при $g(\lambda) = (\lambda + \gamma)^{-1}$, $\gamma > 0$ и $\alpha_n = n^{-1}$. Итерация метода (4.1.4), (2.1.16) в этом случае имеет вид $x_{n+1} = x_{n+1}^{(n)}$, где $x_{n+1}^{(0)} = \xi$ и

$$(\gamma E + F'^*(x_n)F'(x_n))x_{n+1}^{(k+1)} = \gamma x_{n+1}^{(k)} + F'^*(x_n)(F'(x_n)x_n - F(x_n) + f),$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Функции $\Theta$ в примерах 4.1.3–4.1.5 удовлетворяют условию 4.1.3 при любом $p_0 \geq 1/2$, поэтому здесь $p^* = \infty$. Таким образом, итерационные процессы, представленные в этих примерах, свободны от эффекта насыщения. В качестве семейства контуров $\Gamma_\alpha$, обеспечивающих выполнение условий 4.1.4, 4.1.5, можно выбрать

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^{(1)} \cup \Gamma_\alpha^{(2)} \cup \Gamma_\alpha^{(3+)} \cup \Gamma_\alpha^{(3-)}, \quad \alpha \in (0, \alpha_0], \tag{4.1.8}$$

где обозначено

$$\Gamma_\alpha^{(1)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \alpha/2,\ \varphi_0 \leq \arg\lambda \leq 2\pi - \varphi_0\}, \quad \varphi_0 \in (0, \pi/2),$$
$$\Gamma_\alpha^{(2)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R_0,\ -\varphi_0 \leq \arg\lambda \leq \varphi_0\}, \quad R_0 > M^2,$$
$$\Gamma_\alpha^{(3\pm)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pm\varphi_0,\ \alpha/2 \leq |\lambda| \leq R_0\}.$$

### *4.2. Итеративно регуляризованные процессы типа Гаусса—Ньютона. Обратная теорема*

При выполнении подходящих условий на порождающую функцию $\Theta$ истокообразное представление (4.1.5) близко к необходимому для справедливости степенной оценки скорости сходимости (4.1.6). Более точно, устанавливается, что оценка

$$\|x_n - x^*\|_X \leq l\alpha_n^p, \quad n = 0, 1, \ldots \quad (l > 0, \quad p > 1/2), \tag{4.2.1}$$

влечет включение $x^* - \xi \in \mathcal{R}((F'^*(x^*)F'(x^*))^q)$ для любого $q \in (0, p)$ (ср. с теоремами 2.2.1 и 2.2.2 при $s = 0$).

Будем предполагать выполненным следующее обобщение условия 4.1.5.

**Условие 4.2.1.** *Для любого* $\kappa \in [1, 3/2]$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \alpha^{\kappa - 1} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|}{|\lambda|^\kappa} |d\lambda| < \infty. \tag{4.2.2}$$

В случае $\kappa = 1$ неравенство (4.2.2) сводится к условию 4.1.5.

Нам потребуется также следующее условие.

**Условие 4.2.2.** *Для каждого* $\lambda \in [0, M^2]$ *функция* $\eta(\lambda, \alpha) = |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|$ *является неубывающей по* $\alpha \in (0, \alpha_0]$.

Имеет место следующая обратная теорема относительно скорости сходимости аппроксимаций (4.1.4), см. [60], [61].

**Теорема 4.2.1.** *Пусть выполняются условия* 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 (*при* $p = 0$), 4.1.4, 4.2.1 *и* 4.2.2. *Если итерационный процесс* (4.1.4) *порождает последовательность* $\{x_n\}$, *для которой справедлива оценка* (4.2.1), *то для каждого* $q \in (0, p)$ *имеет место включение*

$$x^* - \xi \in \mathcal{R}((F'^*(x^*)F'(x^*))^q).$$

Введенным в этом разделе условиям 4.2.1, 4.2.2 удовлетворяют все порождающие функции из примеров 4.1.1–4.1.5. Контуры $\Gamma_\alpha$ можно выбирать согласно (4.1.8).

Теоремы 4.1.1, 4.2.1 допускают перенос на класс итеративно регуляризованных методов типа Ньютона–Канторовича

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(F'(x_n), \alpha_n)(F(x_n) - f - F'(x_n)(x_n - \xi))$$

для решения нерегулярных уравнений (4.1.1) в случае, когда $Y = X$ есть произвольное банахово пространство [9, гл. 4]. Ключевым условием на оператор $F$ и решение $x^*$ здесь является требование секториальности оператора $A = F'(x^*)$ в смысле условия 2.2.3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
2. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения нерегулярных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2006. 112 с.
3. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. М.: ФМЛ, 1999. 336 с.
4. *Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O.* Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems. Berlin: Walter de Gruyter, 2008. 194 p.
5. *Schuster T., Kaltenbacher B., Hofmann B., Kazimierski K.* Regularization Methods in Banach Spaces. Berlin: Walter de Gruyter, 2012. 284 p.
6. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008. 460 с.
7. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. Физматлит, 1995. 312 с.
8. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
9. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. М.: УРСС, 2002. 192 с.
10. *Bakushinsky A., Kokurin M.M., Kokurin M.Yu.* Regularization Algorithms for Ill-Posed Problems. Berlin: Walter de Gruyter, 2018. 326 p.
11. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
12. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
13. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986. 182 с.
14. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.
15. *Hohage T.* Logarithmic convergence rates of the iteratively regularized Gauss–Newton method for an inverse potential and inverse scattering problem // Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 1279–1299.
16. *Hohage T.* Regularization of exponentially ill-posed problems // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2000. V. 21. № 3–4. P. 439–464.
17. *Hohage T., Schormann C.* A Newton-type method for a transmission problem in inverse scattering // Inverse Problems. 1998. V. 14. P. 1207–1227.
18. *Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* О необходимых условиях квалифицированной сходимости методов решения линейных некорректных задач // Известия вузов. Математика. 2001. № 2. С. 39–47.
19. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer, 2000. 322 p.
20. *Кокурин М.Ю.* Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. Йошкар-Ола: Изд-во МарГУ, 1998. 292 с.
21. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
22. *Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* О необходимых и достаточных условиях медленной сходимости методов решения линейных некорректных задач // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 81–84.
23. *Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995. 176 с.
24. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Ключев В.В.* Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Вычисл. методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 163–171.

25. *Васильев В.В., Пискарев С.И., Селиванова Н.Ю.* Проинтегрированные полугруппы, C-полугруппы и их приложения // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 131. С. 3–109.
26. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М: Мир, 1970. 336 с.
27. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
28. *Соломяк М.З.* Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122. № 5. С. 766–770.
29. *Arendt W.* Semigroups and evolution equations: Functional calculus, regularity and kernel estimates. Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations. Amsterdam: Elsevier, 2004. V. 1. P. 1–85.
30. *Bakaev N.Yu.* Linear Discrete Parabolic Problems. Amsterdam: Elsevier, 2006. 286 p.
31. *Crouzeix M., Larsson S., Piskarev S., Thomee V.* The stability of rational approximations of analytic semigroups. BIT Numerical Mathematics. 1993. V. 33. № 1. P. 74–84.
32. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983. 279 p.
33. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
34. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969. 368 с.
35. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 636 с.
36. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
37. *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1978. 464 с.
38. *Крейн С.Г., Прозоровская О.И.* О приближенных методах решения некорректных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 1. С. 120–130.
39. *Бакушинский А.Б.* Разностные методы решения некорректных задач Коши для эволюционных уравнений в комплексном B-пространстве // Дифференц. ур-ния. 1972. Т. 8. № 9. С. 1661–1668.
40. *Бакушинский А.Б.* Разностные схемы для решения некорректных абстрактных задач Коши // Дифференц. ур-ния. 1971. Т. 7. № 10. С. 1876–1885.
41. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.М., Кокурин М.Ю.* Об одном классе разностных схем решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 3. С. 483–498.
42. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Ключев В.В.* Об оценке скорости сходимости разностных методов решения некорректной задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Вычисл. методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 25–31.
43. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu., Paymerov S.K.* On error estimates of difference solution methods for ill-posed Cauchy problems in a Hilbert space // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. V. 16. № 6. P. 553–565.
44. *Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu., Kokurin M.M.* On a class of finite difference methods for ill-posed Cauchy problems with noisy data // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. V. 18. № 9. P. 959–977.
45. *Кокурин М.М.* Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши // Вычисл. методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 58–76.
46. *Кокурин М.М.* Необходимые и достаточные условия степенной сходимости метода квазиобращения и разностных методов решения некорректной задачи Коши в условиях точных данных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 12. С. 2027–2041.
47. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.
48. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.М., Кокурин М.Ю.* О схеме полной дискретизации некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 1. С. 96–108.
49. *Кокурин М.М.* Оценки скорости сходимости и погрешности разностных методов решения некорректных задач Коши в банаховом пространстве. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 Вычислительная математика. Йошкар-Ола, 2018.
50. *Кокурин М.М.* Об условиях квалифицированной сходимости разностных методов и метода квазиобращения для решения линейных некорректных задач Коши в гильбертовом пространстве // Известия вузов. Математика. 2019. № 10. С. 46–61.

51. *Кокурин М.М.* Оценки скорости сходимости и погрешности разностных схем решения линейной некорректной задачи Коши второго порядка // Вычисл. методы и программирование. 2017. Т. 18. С. 322–347.
52. *Кокурин М.М.* Разностные схемы решения задачи Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 569–584.
53. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.
54. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 588 с.
55. *Бакушинский А.Б.* К проблеме сходимости итеративно регуляризованного метода Гаусса–Ньютона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 9. С. 1503–1509.
56. *Бакушинский А.Б.* Итерационные методы без насыщения для решения вырожденных нелинейных операторных уравнений // Докл. АН. 1995. Т. 344. № 1. С. 7–8.
57. *Бакушинский А.Б.* Итеративные методы для решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // Фундаментальная и прикл. матем. 1997. Т. 3. № 3. С. 685–692.
58. *Bakushinskii A.* Universal linear approximations of solutions to nonlinear operator equations and their applications // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 1998. V. 5. № 6. P. 507–522.
59. *Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* О невырожденных оценках скорости сходимости итерационных методов решения некорректных нелинейных операторных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 832–837.
60. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А.* Необходимые условия сходимости итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений без свойства регулярности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 7. С. 986–996.
61. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2012. 312 с.