

УДК 517.95.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ¹⁾

© 2020 г. С. И. Кабанихин

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, Новосибирский государственный университет,
механико-математический факультет, кафедра математических задач геофизики, Россия
e-mail: ksi52@mail.ru

Поступила в редакцию 11.02.2020 г.
Переработанный вариант 11.02.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2020 г.

В статье дано краткое определение обратных и некорректных задач, изложение истории и связи обратных задач с компьютерным моделированием. Библ. 4.

Ключевые слова: обратные и некорректные задачи, неустойчивость решения, минимизация функционала.

DOI: 10.31857/S0044466920060046

1. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Первые публикации по обратным и некорректным задачам, появившиеся в середине XX века, были связаны с различными разделами естествознания: физика (квантовая теория рассеяния, электродинамика, акустика), геофизика (электро-, сейсмо- и магнито-разведка), астрономия. С появлением мощных ЭВМ область приложений обратных и некорректных задач охватила практически все научные дисциплины, в которых используются математические модели, включая медицинскую и промышленную томографию, дефектоскопию, экологию, экономику и даже лингвистику, психологию и социальные процессы.

Прежде чем говорить об обратных задачах, необходимо определить, что такое прямые задачи. В прямых задачах математической физики исследователи стремятся найти (в явной форме или приближенно) функции, описывающие различные физические явления (распространение звука, тепла, сейсмических колебаний, электромагнитных волн, препарата в организме, новостей в интернете). Эти функции являются решениями уравнений математической физики, для исследования и решения которых необходимо задать коэффициенты уравнения, область, в которой оно задано, начальные и граничные условия. Однако свойства среды на практике довольно часто сами являются неизвестными. А это означает, что необходимо формулировать и решать обратные задачи, в которых по некоторой дополнительной информации относительно решения соответствующей прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений, или, например, начальные или граничные условия, местоположение и форму включений, границы и другие свойства области, в которой исследуется процесс. В некоторых обратных задачах неизвестен бывает и вид уравнения, которое описывает то или иное явление.

Ясно, что для решения обратной задачи необходимо иметь дополнительную информацию (например, значения решения внутри области или на ее границе, спектральные либо кинематические характеристики процесса, какие-либо топологические или групповые свойства). Обратные задачи в большинстве случаев интересны для теоретиков и практиков некорректны, а именно, в них нарушено хотя бы одно из трех свойств корректности – условие существования, единственности и устойчивости решения по отношению к малым вариациям данных задачи. Обратные и некорректные задачи объединяет одно наиболее важное свойство – неустойчивость решения по отношению к малым ошибкам измерений данных. В большинстве интересных случаев обратные задачи являются некорректными, а некорректные задачи, как правило, можно сформулировать как обратные по отношению к некоторым прямым (корректным) задачам. Но поскольку исторически обратные и некорректные задачи формулировались и изучались довольно часто независимо и параллельно, сейчас в научной литературе используются оба этих термина.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1675.

Суммируя вышеизложенное, можно сказать, что специалисты по обратным и некорректным задачам занимаются исследованием свойств и методов регуляризации неустойчивых задач, создают и изучают устойчивые методы приближения неустойчивых отображений.

2. НЕМНОГО ИСТОРИИ

Многие математические понятия и задачи возникали в результате исследования тех или иных физических процессов или явлений, и это особенно справедливо для обратных и некорректных задач. Философское утверждение Платона о том, что человеку в процессе познания доступны только тени на стене пещеры и эхо (данные обратной задачи), стало предвестником решенной Аристотелем задачи восстановления формы Земли по ее тени на Луне (обратной задачи проективной геометрии).

Введение физического понятия мгновенной скорости привело Ньютона к открытию производной, а проблема неустойчивости (некорректности) задачи численного дифференцирования функции, заданной приближенно, актуальна и по сей день. Исследования лорда Рэлея по акустике побудили его сформулировать вопрос о возможности нахождения плотности неоднородной струны по ее звучанию (обратная задача акустики), что предвосхитило развитие сейсмозведки, с одной стороны, и развитие теории спектральных обратных задач, с другой. Изучение движения небесных тел и задача оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки, привело Лежандра и Гаусса к изучению переопределенных систем алгебраических уравнений и к созданию метода наименьших квадратов. Коши предложил метод наискорейшего спуска для нахождения минимума функции нескольких переменных, а в 1948 г. Л.В. Канторович обобщил, развил и применил эти идеи к операторным уравнениям в гильбертовых пространствах.

Но хотя отдельные обратные и некорректные задачи с давних пор и были объектом внимания самых разных исследователей, математические особенности некорректных задач были сформулированы Адамаром лишь в начале XX века. Пример некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа, приведенный Адамаром, породил сомнения в целесообразности исследования некорректных задач. Тезис о том, что “некорректных задач нет, а есть задачи плохо поставленные”, одних исследователей охлаждал, а других, напротив, побуждал искать новые пути к их решению.

Например, в середине прошлого века Р. Курант исследовал некорректную задачу восстановления функции по ее сферическим средним. А выдающийся отечественный математик С.Л. Соболев стал научным консультантом докторской диссертации В.К. Иванова “Исследования по обратной задаче теории потенциала”, давшей теоретическое обоснование решения обратной задачи гравиразведки, используемой для исследования литосферы и поиска полезных ископаемых.

Невозможно рассказать обо всех аспектах теории обратных задач и ее приложений. Упомянем лишь два направления, существенный вклад в зарождение и развитие которых внесли ученые, работавшие в новосибирском Академгородке – В.Е. Захаров и А.Б. Шабат (метод обратной задачи рассеяния), А.С. Алексеев и С.В. Гольдин (обратные задачи геофизики). Метод обратной задачи рассеяния был применен для решения нелинейных уравнений математической физики (уравнение Кортевега-де Вриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Кадомцева-Петвиашвили и др.) и стимулировал новые исследования в различных областях математики и физики (спектральная теория дифференциальных операторов, классическая алгебраическая геометрия, релятивистские струны и др.). Метод обратной задачи рассеяния называют жемчужиной математической физики XX века. Результаты А.С. Алексеева и С.В. Гольдина по применению в геофизике спектральной теории обратных задач и интегральной геометрии стали теоретической основой многих геофизических методов (обратные кинематические и динамические задачи сейсмологии). Отметим, что признанные успехи нынешнего поколения сибирских геофизиков во многом определены их высокой математической подготовкой на геолого-геофизическом факультете НГУ. Автору данной статьи посчастливилось работать на кафедре геофизики НГУ в те годы, когда там был создан творческий союз ученых и преподавателей геофизиков (С.В. Гольдин, Л.А. Табаровский, М.И. Эпов, Ю.А. Дашевский и др.) и математиков (М.М. Лаврентьев, А.С. Алексеев, В.Г. Романов, Т.А. Годунова и др.). Обсуждения того, в каком виде и в каком объеме давать математику геофизикам, регулярно проводились на собраниях преподавателей, а споры часто напоминали дискуссии на научных конференциях.

Огромный вклад в создание основ теории обратных и некорректных задач внесли наши всемирно признанные соотечественники А.Н. Тихонов, В.К. Иванов и М.М. Лаврентьев. Одна из

главных идей состояла в том, что при исследовании некорректных задач необходимо сузить класс возможных решений. При этом важнейшую роль играет выбор множества (множество корректности), в котором ищется приближенное решение. Чаще всего такое множество выбирают компактным, что дает возможность обосновать сходимость регуляризирующих алгоритмов, помогает выбрать параметр регуляризации и оценить отклонение приближенного решения от точного решения некорректной задачи.

Несмотря на то что основы теории обратных и некорректных задач были заложены в СССР еще в середине XX века, последние десятилетия российской школа стала утрачивать лидирующие позиции в этой области. Много наших способных специалистов, особенно молодых, теперь работают за рубежом. И если в мире издано уже свыше 14 тыс. книг, в названии которых стоит словосочетание “обратные задачи”, то в России такие книги появляются не так часто. Тем не менее теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания и сейчас являются одним из наиболее приоритетных направлений российской науки.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

Определение прямой задачи хорошо известно: в некоторой области D с границей Γ задается уравнение $Lu = g$, начальные данные и граничные условия. В обратной задаче предполагается, что некоторые коэффициенты уравнения, и/или правая часть g , начальные и граничные данные, и/или функция, описывающая границу Γ , неизвестны. Все эти неизвестные параметры будем обозначать через q . Для того, чтобы найти решение обратной q , предполагаем, что относительно решения прямой задачи и задана некоторая дополнительная информация: значения функции u в некоторых точках пространства и/или в некоторые моменты времени, кинематические и/или динамические свойства процесса, описываемого функцией u , спектральные свойства оператора L , данные рассеяния, групповые или топологические свойства решения. Совокупность всей дополнительной информации будем обозначать буквой f . Таким образом, обратная задача может быть записана в виде (вообще говоря, нелинейного) операторного уравнения $A(q) = f$, в котором оператор A называется оператором обратной задачи. В общем случае A отображает некоторое пространство Q (евклидово, гильбертово, банахово, метрическое или топологическое) в пространство F , и это отображение не имеет ограниченного обратного.

Численные методы решения обратных задач можно разделить на две основные группы: прямые и итерационные. К прямым относятся линеаризация, обращение разностной схемы, методы Гельфанда–Левитана–Крейна–Марченко, граничного управления и сингулярного разложения. К итерационным – методы градиентного спуска, Ньютона–Канторовича и их обобщения.

Применение метода Ньютона–Канторовича

$$q_{n+1} = q_n - [A'(q_n)]^{-1}(Aq_n - f).$$

В силу некорректности обратной задачи требует регуляризации обращения производной Фреше оператора A (вообще говоря, компактного).

Решение операторного уравнения $A(q) = f$ часто сводят к поиску минимума функционала

$$J(q) = \langle A(q) - f, A(q) - f \rangle \rightarrow \min.$$

Используя методы градиентного спуска

$$q_{n+1} = q_n - a_n J'(q_n),$$

в которых градиент вычисляется по формуле

$$J'(q) = 2[A'(q)]^*(Aq - f).$$

4. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Сегодня область применения теории обратных задач крайне широка – при вводе ключевых слов “inverse problems” поисковая система Google выдает более двухсот млн ссылок!

С появлением ЭВМ математика, по словам основоположника отечественного математического моделирования А.А. Самарского, приобрела свойство экспериментальной науки. Это свойство становится особенно важным благодаря активному вторжению суперкомпьютерных технологий в нашу жизнь. Уже сейчас можно хранить в “облаке”, а при определенном навыке и обрабатывать свои файлы, имея при себе лишь небольшой персональный компьютер с выходом

в интернет. Появляется возможность не только покупать любые товары и получать любые консультации, включая юридические и медицинские, но и оперативно решать большие задачи по математическому моделированию.

Научиться контролировать ошибки в вычислениях жизненно важно. Поэтому уже сейчас ведутся работы по оптимизации моделей, созданию специальных алгоритмов для архитектуры параллельных систем, по учету и анализу ошибок вычислений. Например, в Японии при создании 10-петафлопсного суперкомпьютера одновременно создавался компьютер-дублер на графических платах, на котором должны отрабатываться программное обеспечение и исследоваться особенности параллельных алгоритмов.

Важно отметить, что наряду с неограниченным ростом “цифровых” возможностей увеличивается и вероятность появления ошибок. Очень важно замечание Сергея Константиновича Годунова о том, что в компьютерном моделировании надвигается “экологическая катастрофа”. Дело в том, что при выполнении даже элементарных машинных операций (умножения, деления) результат содержит ошибку вычисления, которая возрастает с увеличением количества машинных команд в алгоритме. А к примеру, при моделировании образования только одного белка методами молекулярной динамики потребуется около 10^{25} машинных команд!

Сейчас в научных исследованиях очень важна междисциплинарность. Важно всесторонне рассматривать проблему. Со стороны математиков – это исследование прямых и обратных задач, создание математических моделей, разработка и обоснование новых алгоритмов их решения. С появлением суперкомпьютерных вычислений математическое моделирование становится инструментом эксперимента. Во многих случаях натурные испытания можно заменить виртуальными.

5. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ОБРАЗОВАНИИ

В высшем образовании теория обратных и некорректных задач становится одним из наиболее эффективных средств изложения естественно-научных дисциплин по ряду причин.

Во-первых, эта теория наиболее полно отвечает принципу интеграции наук, объединяя на основе математических уравнений все основные направления естествознания, что позволяет эффективно использовать в образовании междисциплинарный подход. Студенты, изучая курс обратных и некорректных задач, заново “проходят” практически все изученные ранее дисциплины, глубже проникают в их математические особенности и взаимосвязи. Во-вторых, изучение теории обратных и некорректных задач приводит к новому пониманию роли математики в обществе, а также внутреннего единства и красоты самой математики. Наконец, изучение этой теории позволяет глубже осознать роль моделирования в процессе познания человеком окружающего его мира.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Популярность обратных задач растет пропорционально мощности компьютеров, поскольку одним из самых доступных и понятных прикладникам методов решения обратных задач является метод подбора (метод палеток). Имея надежный численный метод решения прямой задачи (а значит, достаточно адекватную модель изучаемого явления), исследователь может решать обратную задачу, целенаправленно меняя интересующие его параметры модели. С появлением суперкомпьютеров открываются возможности использовать градиентные методы, стохастические алгоритмы, изучать и применять генетические алгоритмы и нейронные сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Третье изд. М.: Наука, 1986.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008.