ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 6, с. 1066–1073

УДК 517.946

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ[1)]

© 2020 г. В. Г. Романов

630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

e-mail: romanov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 24.10.2019 г.
Переработанный вариант 24.10.2019 г.
Принята к публикации 11.02.2020 г.

Для системы уравнений электродинамики, в которой диэлектрическая проницаемость определяется симметрической матрицей $\varepsilon(x) = (\varepsilon_{ij}(x), i, j = 1,2,3)$, рассматривается обратная задача об определении этой матрицы по информации о решениях уравнений электродинамики. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость является постоянной всюду вне некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и совпадает с заданной положительной постоянной $\varepsilon_0 > 0$, а внутри Ω анизотропна и разности $\varepsilon_{ij}(x) - \varepsilon_0\delta_{ij} =: \tilde{\varepsilon}_{ij}(x)$, $i, j = 1,2,3$, малы. Здесь δ_{ij} – символ Кронекера. Обратная задача исследуется в линейном приближении. Изучается структура решения линеаризованной прямой задачи для уравнений электродинамики и доказывается, что при некоторой специальной постановке системы наблюдений можно однозначно найти все элементы матрицы $\tilde{\varepsilon}(x) = \tilde{\varepsilon}_{ij}(x)$, $i, j = 1,2,3$. При этом оказывается, что задачи об определении компонент $\tilde{\varepsilon}_{ij}(x)$, $i = 1,2,3$, совпадают с обычными задачами рентгеновской томографии, что позволяет эффективно их вычислять. Отыскание остальных компонент приводит к более сложной алгоритмической процедуре. Библ. 31.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, анизотропия, обратная задача, линеаризация, плоская волна, структура решения, томография.

DOI: 10.31857/S0044466920060083

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим нестационарную систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E}_t \epsilon(x), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{H}_t, \tag{1.1}$$

в которой $\epsilon(x) = (\varepsilon_{ij}(x), i, j = 1,2,3)$ – положительно-определенная симметрическая матрица и $\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_0\delta_{ij}$, $i, j = 1,2,3$, $\varepsilon_0 > 0$, вне области $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| < R\}$, $R > 0$, μ_0 – некоторая положительная постоянная.

Обозначим через $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ скорость распространений электромагнитных волн в однородной среде. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $|\nu| = 1$, и j – единичный вектор, ортогональный ν, т.е. $j \cdot \nu = 0$.

Совокупность функций

$$\mathbf{E}^0(x, t, \nu, j) = jf(t + t_0 - (x\cdot\nu)/c), \quad \mathbf{H}^0(x, t, \nu, j) = \frac{\nu \times j}{\mu_0 c} f(t + t_0 - (x\cdot\nu)/c), \tag{1.2}$$

в которой $t_0 = \min_{x\in\Omega}(x\cdot\nu)/c = -R/c$, при произвольной обобщенной функции $f(t)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в направлении вектора ν и является обобщенным решением уравнений Максвелла для однородной среды

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_t^0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^0 = -\mu_0 \mathbf{H}_t^0. \tag{1.3}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН II.1 (проект 0314-2018-0010).

Рассмотрим задачу Коши для анизотропной среды

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{E}_t\varepsilon(x), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_0\mathbf{H}_t, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{E}|_{t<0} = jf(t + t_0 - (x\cdot\nu)/c), \quad \mathbf{H}|_{t<0} = \frac{\nu\times j}{\mu_0 c}f(t + t_0 - (x\cdot\nu)/c), \tag{1.5}$$

в которой $f(t)$ – некоторая гладкая функция такая, что $f(t) \equiv 0$ для $t \le 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) \ne 0$. Таким образом, $\mathbf{E}(x,t,\nu) = 0$, $\mathbf{H}(x,t,\nu) = 0$ для всех $(x\cdot\nu)/c \ge t_0$ при $t < 0$. При этом плоскость $\Sigma(\nu) =: \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x\cdot\nu = ct_0\}$ соответствует фронту плоской волны $\mathbf{E}^0(x,t,\nu,j)$, $\mathbf{H}^0(x,t,\nu,j)$, определенной формулами (1.2), в момент $t = 0$, когда этот фронт касается области Ω.

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос: можно ли найти матрицу $\epsilon(x)$, используя какие-либо наблюдения за решением задачи (1.4), (1.5) на границе области Ω? Ответ на этот вопрос дается ниже для линеаризованного варианта задачи. Пусть $\tilde\epsilon(x) = \tilde\varepsilon_{ij}(x)$, $\tilde\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon_{i,j}(x) - \varepsilon_0\delta_{ij}$, $i,j = 1,2,3$, и $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \widetilde{\mathbf{E}}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \widetilde{\mathbf{H}}$. В предположении, что $|\tilde\varepsilon_{ij}(x)| \ll 1$, линеаризация задачи (1.4), (1.5) приводит к задаче

$$\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}} = \varepsilon_0\tilde{\mathbf{E}}_t + \mathbf{E}_t^0\tilde\epsilon(x), \quad \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = -\mu_0\tilde{\mathbf{H}}_t, \quad (\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{H}})_{t<0} = 0. \tag{1.6}$$

Структура решения этой задачи исследована в разд. 2.

Пусть $S = \{|x| = R\}$ – граница области Ω и $S^+(\nu) = \{x \in S \,|\, x\cdot\nu > 0\}$ – ее теневая часть по отношению к потоку света, имеющего направление ν.

Ниже мы будем рассматривать задачу (1.6) для трех различных векторов j^k и соответствующих им ортогональных векторов ν^k, зависящих от углового параметра φ, а именно,

$$\begin{aligned} j^1 &= (1,0,0), \quad \nu^1(\varphi) = (0,\cos\varphi,\sin\varphi), \quad \varphi\in[0,\pi],\\ j^2 &= (0,1,0), \quad \nu^2(\varphi) = (\cos\varphi,0,\sin\varphi), \quad \varphi\in[0,\pi],\\ j^3 &= (0,0,1), \quad \nu^3(\varphi) = (\cos\varphi,\sin\varphi,0), \quad \varphi\in[0,\pi]. \end{aligned}$$

Обратная задача. Найти $\tilde\epsilon(x)$ по функциям $\tilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu^k(\varphi),j^k)$, $k = 1,2,3$, известным для всех $x \in S^+(\nu^k(\varphi))$, $\varphi\in[0,\pi]$, и $t \in [0, T(x,\nu^k(\varphi))]$, где $T(x,\nu^k(\varphi)) = (x\cdot\nu^k(\varphi))/c - t_0 + \delta_0$ и $\delta_0 > 0$ – произвольное число (возможно малое). Другими словами, требуется найти $\tilde\epsilon(x)$ по заданным функциям

$$\mathbf{F}^k(x,t,\varphi) = \tilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu^k(\varphi),j^k), \quad x\in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi\in[0,\pi], \quad t\in[0,T(x,\nu^k(\varphi))], \quad k = 1,2,3. \tag{1.7}$$

Обратные задачи для уравнений электродинамики начали изучаться в конце 40-х–начале 50-х годов прошлого века с работ А.Н. Тихонова [1]–[4] и Л. Каньяра (L. Kagniard) [5]. Единственным методом изучения электрических свойств глубоких слоев Земли, который широко использовался в то время в геофизике, был метод становления электрического тока. Он был основан на предположениях, что проводимость среды зависит от одной координаты (глубины), токи смещения малы, по сравнению с токами проводимости, поэтому ими можно пренебречь. Фактически рассматривалось одно дифференциальное уравнение второго порядка, в котором присутствовала частота переменного тока. В качестве информации о решении задавался импеданс (отношение магнитной горизонтальной компоненты напряженности H_x к электрической напряженности E_y на границе полупространства). Теорема Тихонова [4] утверждает, что импеданс, заданный как функция частоты, однозначно определяет проводимость среды. На этом был основан и алгоритм решения задачи.

Дальнейший прогресс в развитии теории обратных задач электродинамики был связан с использованием полной системы уравнений Максвелла. В этой системе уравнений токи смещения играют важную роль для описания волновых процессов распространения электромагнитных волн. Их присутствие делает систему гиперболической. До 80-х годов при изучении обратных задач токами смещения обычно пренебрегали. При этом система уравнений электродинамики описывает медленный процесс диффузии волн. Поэтому при изучении процессов становления поля в динамическом (не частотном) варианте измерения напряженности поля можно проводить с временным интервалом порядка одной секунды, или ее долей. Тот подход к исследованию обратных задач, который начал развиваться в 80-х годах, требовал прослеживания фронта электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью порядка 300 тысяч км/сек. Чтобы проследить изменения напряженности поля на расстояниях порядка одного метра (такого масштаба неоднородности необходимо зачастую различать в задачах электроразведки на переменном токе), надо проводить измерения с интервалом порядка 10^{-9} сек.

Первые рассмотренные обратные задачи для уравнений электродинамики были связаны со случаем, когда в полупространстве коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемостей и проводимости среды зависят от одной переменной. Было показано, что все три коэффициента могут быть однозначно найдены по электромагнитному полю, заданному на границе полупространства. Затем была исследована линеаризованная постановка задачи об определении этих коэффициентов как функций точки трехмерного пространства [6]–[10]. При этом линеаризация задачи была проведена в предположении, что искомые функции мало отличаются от соответствующих функций одной переменной. Было установлено, что информация, задаваемая о решении прямой задачи с точечными источниками типа диполей, пробегающими всю граничную плоскость, однозначно определяет искомые функции. Выполнены первые численные расчеты, связанные с ранней стадией процесса становления электрического тока [11].

В [12] изучена структура фундаментального решения задачи Коши для системы уравнений электродинамики. Эта работа явилась важной вехой на пути изучения многомерных обратных задач. Проведено исследование задачи об определении диэлектрической проницаемости и проводимости, зависящих от двух или трех пространственных переменных [13]–[17]. В этих работах предполагалось, что магнитная проницаемость – постоянна, диэлектрическая проницаемость и проводимость являются гладкими функциями и принимают постоянные значения вне заданной ограниченной области, а внутри этой области они неизвестны. Источниками электромагнитных волн являются внешние токи, которые сосредоточены в точке. Точка приложения источника – параметр задачи, который меняется по границе заданной области. В качестве дополнительной информации для решения задачи задается динамика волнового поля на границе области в окрестности прихода фронта электромагнитной волны. Показано, что поставленные задачи могут быть сведены к хорошо известной задаче интегральной геометрии (томографии – на геодезических линиях), для которой есть теоремы существования, единственности и устойчивости решения, а также существуют устойчивые численные методы решения.

Изучены также задачи об определении ядра интегрального оператора, учитывающего дисперсию среды [19], [20] и бесфазовые обратные задачи об определении диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической или магнитной напряженностей стационарного электромагнитного поля [21]–[23]. Задачи об определении параметров анизотропной среды рассмотрены в работах [24]–[26].

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть матрица* $\tilde{\epsilon}(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *и равна нулю вне* Ω, *а функция* $f(t)$ *имеет вид* $f(t) = \hat{f}(t)\theta_0(t)$, *в котором* $\hat{f}(t)$ *– гладкая функция класса* $C^2[0,\infty)$ *и* $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}'(0) \neq 0$, *а* $\theta_0(t)$ *– функция Хевисайда:* $\theta_0(t) = 1$ *для* $t \geq 0$ *и* $\theta_0(t) = 0$ *для* $t < 0$. *Тогда информация* (1.7) *однозначно определяет все элементы матрицы* $\tilde{\epsilon}(x)$ *в области* Ω.

Доказательство теоремы дано в разд. 3.

2. СТРУКТУРА КОМПОНЕНТЫ $\widetilde{\mathbf{E}}$ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.6)

Удобно вместо системы уравнений (1.6) рассматривать уравнение второго порядка для функции $\widetilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)$. С этой целью применим операцию rot ко второму уравнению (1.6) и воспользуемся первым уравнением для исключения возникающего члена $\operatorname{rot}\widetilde{\mathbf{H}}_t$. Тогда получим уравнение

$$(-\Delta + \nabla\operatorname{div})\widetilde{\mathbf{E}} = -\mu_0(\varepsilon_0\widetilde{\mathbf{E}}_{tt} + \mathbf{E}^0_{tt}\tilde{\epsilon}(x)). \tag{2.1}$$

Вычисляя $\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{E}}$ с помощью первого уравнения (1.6), находим, что

$$\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div}(\mathbf{E}^0\tilde{\epsilon}(x)). \tag{2.2}$$

Из равенств (2.1), (2.2) и (1.6) следует, что функция $\widetilde{\mathbf{E}}$ является решением задачи Коши:

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{tt} - c^2\Delta\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{G}(x,t,\nu,j), \quad \widetilde{\mathbf{E}}_{t<0} = 0, \tag{2.3}$$

в которой

$$\mathbf{G}(x,t,\nu,j) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(c^2\nabla\,\mathrm{div} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\mathbf{E}^0\tilde{\epsilon}(x)). \tag{2.4}$$

Нас будет интересовать поведение $\tilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)$ в окрестности волнового фронта $x\cdot\nu = c(t+t_0)$, когда этот фронт пересекает область $\Omega \cup S$.

Теорема 2. *Пусть для матрицы* $\tilde{\epsilon}(x)$ *и функции* $f(t)$ *выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функция* $\widetilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)$ *представима в виде*

$$\widetilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j) = [\alpha(x,\nu,j) + \widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)]\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c), \tag{2.5}$$

в котором функция $\alpha(x,\nu,j)$ *вычисляется по формуле*

$$\alpha(x,\nu,j) = -\frac{\hat{f}(0)}{2c\varepsilon_0}\int_0^\infty[(j\tilde{\epsilon}(x-s\nu)) - \nu((j\tilde{\epsilon}(x-s\nu))\cdot\nu)]ds, \tag{2.6}$$

а функция $\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)$ *является ограниченной функцией переменных* x,t *в области* $(x\cdot\nu)/c - t_0 \le t \le T$ *при любом* $T > 0$, *кроме того,* $\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j) = 0$ *на характеристической плоскости* $t = (x\cdot\nu)/c - t_0$ *и непрерывна при переходе через нее*.

Доказательство. Вычислим функцию $\mathbf{G}(x,t,\nu,j)$. Простые вычисления с учетом того, что $\hat{f}(0) = 0$ и $\theta_0'(t) = \delta(t)$, приводят к формулам

$$c\,\mathrm{div}(\mathbf{E}^0\tilde{\epsilon}(x)) = [c\hat{f}(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)\,\mathrm{div}(j\tilde{\epsilon}(x)) - \hat{f}(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)((j\tilde{\epsilon}(x))\cdot\nu)]\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c),$$

$$\begin{gathered}c^2\nabla\,\mathrm{div}(\mathbf{E}^0\tilde{\epsilon}(x)) = c\nabla[c\hat{f}(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)\,\mathrm{div}(j\tilde{\epsilon}(x)) - \hat{f}'(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)((j\tilde{\epsilon}(x))\cdot\nu)]\times\\ \times\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c) + \hat{f}'(0)(j\tilde{\epsilon}(x))\cdot\nu)\nu\delta(t+t_0-(x\cdot\nu)/c),\end{gathered}$$

$$\mathbf{E}^0_{tt}\tilde{\epsilon}(x) = \hat{f}''(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)(j\tilde{\epsilon}(x))\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c) + \hat{f}'(0)(j\tilde{\epsilon}(x))\delta(t+t_0-(x\cdot\nu)/c).$$

Тогда $\mathbf{G}(x,t,\nu,j)$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{G}(x,t,\nu,j) = \widetilde{\mathbf{G}}(x,t,\nu,j) - \frac{1}{\varepsilon_0}\hat{f}'(0)[(j\tilde{\epsilon}(x)) - \nu((j\tilde{\epsilon}(x))\cdot\nu)]\delta(t+t_0-(x\cdot\nu)/c), \tag{2.7}$$

в которой

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbf{G}}(x,t,\nu,j) = \frac{1}{\varepsilon_0}(c\nabla[c\hat{f}(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)\,\mathrm{div}(j\tilde{\epsilon}(x)) - \hat{f}'(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)((j\tilde{\epsilon}(x))\cdot\nu)] -\\ - \hat{f}''(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)(j\tilde{\epsilon}(x)))\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Представим решение задачи (2.3) в виде

$$\widetilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j) = \alpha(x,\nu,j)\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c) + \widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j). \tag{2.9}$$

При этом

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{tt} - c^2\Delta\widetilde{\mathbf{E}} = 2c((\nu\cdot\nabla)\alpha)\delta(t+t_0-(x\cdot\nu)/c) + \widehat{\mathbf{E}}_{tt} - c^2\Delta\widehat{\mathbf{E}} - (c^2\Delta\alpha)\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c). \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9), (2.10) в (2.3) и приравнивая коэффициенты при $\delta(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)$ и $\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c)$, получаем, что функция α удовлетворяет соотношениям

$$(\nu\cdot\nabla)\alpha = -\frac{\hat{f}'(0)}{2c\varepsilon_0}[(j\tilde{\epsilon}(x)) - \nu((j\tilde{\epsilon}(x))\cdot\nu)], \quad \alpha|_{x\cdot\nu\le ct_0} = 0, \tag{2.11}$$

а функция $\widetilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)$ является решением задачи Коши

$$\widehat{\mathbf{E}}_{tt} - c^2\Delta\widetilde{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{G}}(x,t,\nu,j), \quad \widetilde{\mathbf{E}}|_{t<0} = 0, \tag{2.12}$$

в которой

$$\widehat{\mathbf{G}}(x,t,\nu,j) = \widetilde{\mathbf{G}}(x,t,\nu,j) + (c^2\Delta\alpha(x,\nu,j))\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c). \tag{2.13}$$

Решение залачи (2.11) находится по формуле (2.6). Решение задачи Коши (2.12) дается формулой Кирхгофа

$$\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j) = \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{|\xi-x|\le ct}\frac{\widehat{\mathbf{G}}(\xi,t-|\xi-x|/c,\nu,j)}{|\xi-x|}d\xi. \tag{2.14}$$

Из формул (2.8), (2.13) следует, что подынтегральная функция $\widehat{\mathbf{G}}(x,t,\nu,j) = 0$ при $x\cdot\nu > c(t+t_0)$, поэтому аналогичным свойством обладает и решение задачи (2.12), а именно, $\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j) = 0$ для $t \le (x\cdot\nu)/c - t_0$. Кроме того, из тех же формул (2.8), (2.13) и предположений теоремы следует, что функция $\widehat{\mathbf{G}}(x,t,\nu,j)$ непрерывна и ограничена как функция переменных x,t по абсолютной величине в области $(x\cdot\nu)/c - t_0 \le t \le T$ при любом $T>0$, следовательно,

$$|\widehat{\mathbf{G}}(x,t,\nu,j)| \le M(T)\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c), \quad t\le T, \quad T>0.$$

Из формулы Кирхгофа тогда находим, что

$$|\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)| \le \frac{M(T)}{4\pi c^2}\int\limits_{|\xi-x|\le ct}\frac{\theta_0(t+t_0-(\xi\cdot\nu)/c-|\xi-x|/c)}{|\xi-x|}d\xi.$$

Полагая здесь $\xi = x + r\hat{\nu}$, $\hat{\nu} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$, приходим к неравенству

$$|\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)| \le \frac{M(T)}{4\pi c^2}\int\limits_0^{ct}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\theta_0(t+t_0-(x\cdot\nu)/c-[1+(\hat{\nu}\cdot\nu)]r/c)\sin\vartheta\, d\phi\, d\vartheta\, r dr.$$

Из этого неравенства следует, что функция $|\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)|$ ограничена в области $t\le T$ при любом $T>0$ и, кроме того,

$$\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j) \to 0 \quad \text{при} \quad t\to(x\cdot\nu)/c - t_0 + 0, \quad \text{или} \quad x\cdot\nu \to c(t+t_0) - 0,$$

т.е. $\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)$ является непрерывной при переходе через фронт $x\cdot\nu = c(t+t_0)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В силу формулы (2.5) и равенства $\widehat{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)|_{t\to(x\cdot\nu)/c-t_0+0} = 0$, верна формула

$$\alpha(x,\nu,j) = \widetilde{\mathbf{E}}(x,t,\nu,j)|_{t\to(x\cdot\nu)/c-t_0}.$$

Поэтому функция $\alpha(x,\nu,j)$ может быть вычислена по данным обратной задачи для j^k, $\nu^k(\varphi)$, и всех $x\in S^+(\nu^k(\varphi))$, $k=1,2,3$, а именно,

$$\alpha(x,\nu^k(\varphi),j^k) = \mathbf{F}^k(x,t,\varphi)|_{t\to(x\cdot\nu^k(\varphi))/c-t_0}, \quad x\in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi\in[0,\pi], \quad k=1,2,3. \tag{3.1}$$

Рассмотрим ортогональную тройку единичных векторов $j,\nu(\varphi),\nu_\varphi(\varphi)$, в которой $\nu_\varphi(\varphi) = d\nu(\varphi)/d\varphi$. Векторное равенство (2.6) эквивалентно трем скалярным:

$$\alpha(x,\nu,j)\cdot\nu = 0, \tag{3.2}$$

$$\alpha(x,\nu,j)\cdot j = -\frac{\hat{f}'(0)}{2c\varepsilon_0}\int\limits_0^{\infty}[(j\tilde{\varepsilon}(x-s\nu))\cdot j]ds, \tag{3.3}$$

$$\alpha(x,\nu,j)\cdot\nu_\varphi-\frac{\hat{f}'(0)}{2c\varepsilon_0}\int_0^\infty[(j\tilde{\epsilon}(x-s\nu))\cdot\nu_\varphi]ds. \tag{3.4}$$

Равенство (3.2) выражает факт ортогональности вектора α фронту волны. Равенства (3.3) и (3.4) связывают интегральные характеристики матрицы $\tilde{\epsilon}$ с теми значениями α, которые вычисляются по формуле (3.1) для $x\in S^+(\nu^k(\varphi))$, $\varphi\in[0,\pi]$, $k=1,2,3$. Следствиями равенств (3.2) являются следующие соотношения:

$$\alpha(x,\nu^k(\varphi),j^k)\cdot j^k=-\frac{\hat{f}'(0)}{2c\varepsilon_0}\int_0^\infty\tilde{\varepsilon}_{kk}(x-s\nu^k(\varphi))ds,\quad x\in S^+(\nu^k(\varphi)),\quad \varphi\in[0,\pi],\quad k=1,2,3. \tag{3.5}$$

Для каждых фиксированных k и $\varphi\in[0,\pi]$ левая часть равенства (3.5) известна, а правая часть пропорциональна интегралу от $\tilde{\varepsilon}_{kk}(x)$ вдоль любой прямой, пересекающей Ω и имеющей направление $\nu^k(\varphi)$.Варьируя φ, мы получаем, что в каждом сечении Ω плоскостью $x_k=\mathrm{const}$ известны интегралы по всевозможным прямым, лежащим в этой плоскости. В результате мы приходим к задаче рентгеновской томографии для $\tilde{\varepsilon}_{kk}(x)$. Известно, что эта задача решается однозначно. Существует обширная литература, посвященная методам ее решения, начиная с пионерской работы Радона [27] (см. также книги [28]–[30] и цитированную в них литературу). Таким образом, диагональные компоненты $\tilde{\varepsilon}_{kk}(x)$ матрицы $\tilde{\epsilon}(x)$ однозначно определяются задаваемой информацией.

Пусть $k=1$. Рассмотрим соотношение, следующее из равенства (3.4):

$$\begin{gathered}\alpha(x,\nu^1(\varphi),j^1)\cdot\nu^1_\varphi(\varphi)=\frac{\hat{f}'(0)}{2c\varepsilon_0}\int_0^\infty[\tilde{\varepsilon}_{12}(x-s\nu^1(\varphi))\sin\varphi-\tilde{\varepsilon}_{13}(x-s\nu^1(\varphi))\cos\varphi]ds,\\ x\in S^+(\nu^1(\varphi)),\quad \varphi\in[0,\pi].\end{gathered} \tag{3.6}$$

Равенство (3.6) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\alpha(x,\nu^1(\varphi),j^1)\cdot\nu^1_\varphi(\varphi)=\frac{\hat{f}'(0)}{2c\varepsilon_0}\int\limits_{L(x,\nu^1)}[\tilde{\varepsilon}_{12}(x-s\nu^1(\varphi))d\xi_3-\tilde{\varepsilon}_{13}(x-s\nu^1(\varphi))d\xi_2],\\ x\in S^+(\nu^1(\varphi)),\quad \varphi\in[0,\pi],\end{gathered} \tag{3.7}$$

в котором $\xi_2=s\cos\varphi$, $\xi_3=s\sin\varphi$, $L(x,\nu^1)$ – отрезок прямой линии, лежащий в области Ω, и выходящей из точки $x\in S^+(\nu^1)$ в направлении вектора $-\nu^1(\varphi)=-(0,\cos\varphi,\sin\varphi)$. В результате возникает задача об определении формы первого порядка по интегралам вдоль всевозможных прямых, лежащих в сечениях области Ω плоскостями $x_1=\mathrm{const}$. Более общая, чем эта задача, была рассмотрена в работе [31] для n мерного пространства. В этой работе был установлен следующий факт: если для дифференцируемой формы первого порядка $dP=\sum_{i=1}^n p_i(x)dx_i$ известно, что интегралы от этой формы вдоль всевозможных геодезических линий некоторой простой римановой метрики, соединяющих точки границы компактной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, равны нулю, то$(p_i)_{x_j}=(p_j)_{x_k}$ в области Ω для всех $i,j=1.2.\dots,n$. Для трехмерного пространства это означает, что вектор $\mathrm{rot}\,p$, $p=(p_1,p_2,p_3)$, однозначно определяется в Ω интегралами от формы первого порядка по всевозможным геодезическим римановой метрики. Применяя этот результат для частного случая евклидовой метрики и сечений области Ω плоскостями $x_1=\mathrm{const}$, заключаем, что из равенства (3.7) однозначно находится

$$\frac{\partial\tilde{\varepsilon}_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{\varepsilon}_{13}}{\partial x_3}=:Q_1(x),\quad x\in\Omega. \tag{3.8}$$

При $j = j^k$ и $\nu = \nu^k(\varphi)$, $k = 2,3$, приходим к соотношениям, аналогичным (3.7), а именно:

$$\alpha(x,\nu^2(\varphi), j^2)\cdot\nu^2_\varphi(\varphi) = \frac{\hat f'(0)}{2c\varepsilon_0}\int\limits_{L(x,\nu^2)}[\tilde\varepsilon_{21}(x - s\nu^2(\varphi))d\xi_3 - \tilde\varepsilon_{23}(x - s\nu^2(\varphi))d\xi_1], \quad x\in S^+(\nu^2(\varphi)),\quad \varphi\in[0,\pi], \tag{3.9}$$

$$\alpha(x,\nu^3(\varphi), j^3)\cdot\nu^3_\varphi(\varphi) = \frac{\hat f'(0)}{2c\varepsilon_0}\int\limits_{L(x,\nu^3)}[\tilde\varepsilon_{31}(x - s\nu^1(\varphi))d\xi_2 - \tilde\varepsilon_{32}(x - s\nu^1(\varphi))d\xi_1], \quad x\in S^+(\nu^3(\varphi)),\quad \varphi\in[0,\pi]. \tag{3.10}$$

В равенстве (3.9) $\xi_3 = s\cos\varphi$, $\xi_1 = s\sin\varphi$, а в равенстве (3.10) $\xi_2 = s\cos\varphi$, $\xi_1 = s\sin\varphi$. В этих равенствах $L(x,\nu^k)$ – отрезок прямой линии, лежащий в области Ω, и выходящей из точки $x\in S^+(\nu^k)$ в направлении вектора $-\nu^k(\varphi)$, $k = 2,3$.

Опять, используя результаты [31], заключаем, что из равенства (3.9) однозначно находится

$$\frac{\partial\tilde\varepsilon_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tilde\varepsilon_{23}}{\partial x_3} =: Q_2(x),\quad x\in\Omega, \tag{3.11}$$

а из равенства (3.10) однозначно находится величина

$$\frac{\partial\tilde\varepsilon_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tilde\varepsilon_{32}}{\partial x_2} =: Q_3(x),\quad x\in\Omega. \tag{3.12}$$

Продифференцируем равенство (3.8) по x_1, равенство (3.11) по x_2, а равенство (3.12) по x_3, сложим первые два получившиеся равенства и вычтем третье. Тогда, учитывая симметричность матрицы $\tilde\varepsilon$, приходим к равенству

$$2\frac{\partial\tilde\varepsilon_{12}(x)}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial Q_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_3(x)}{\partial x_3},\quad x\in\Omega. \tag{3.13}$$

Так как функция $\tilde\varepsilon_{12}(x)$ равна нулю на границе области Ω вместе с производными до второго порядка, равенство (3.13) однозначно определяет $\tilde\varepsilon_{12}(x)$ в Ω. Тогда из равенств (3.7) и (3.10) однозначно находятся в Ω функции $\tilde\varepsilon_{31}(x) = \tilde\varepsilon_{13}(x)$ и $\tilde\varepsilon_{23}(x) = \tilde\varepsilon_{32}(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* О становлении электрического тока в однородном проводящем полупространстве // Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. 1946. Т. 10. № 3. С. 213–231.
2. *Тихонов А.Н.* О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН ССС. 1949. Т. 60. № 5. С. 797–800.
3. *Тихонов А.Н.* Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. Вып. 2. С. 295–297.
4. *Тихонов А.Н.* К математическому обоснованию метода электромагнитных зондирований // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 3. С. 545–548.
5. *Cagniard L.* Basic theory of the magnito-tellurik method // Geophysics. 1953. V. 187. № 3. P. 605–635.
6. *Романов В.Г., Кабанихин С.И., Пухначева Т.П.* К теории обратных задач электродинамики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 5. С. 1070–1073.
7. *Романов В.Г.* Об однозначности определения коэффициентов системы Максвелла // Неклассические задачи для уравнений математической физики. 1982. Новосибирск, Институт математики СО АН СССР. С. 139–142.
8. *Романов В.Г., Кабанихин С.И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
9. *He S., Kabanikhin S.I., Romanov V.G., Ström S.* Analysis of the Green's function approach to one-dimensional inverse problems. I. One parameter reconstruction // J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 12. P. 5724–5746.
10. *He S., Kabanikhin S.I., Romanov V.G., Ström S.* Mathematical analysis of the Green's function approach to the inverse problem. II. Simultaneous reconstruction // J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 5. P. 2315–2335.

11. *Кабанихин С.И., Абдиев К.С.* Моделирование начальной стадии процесса становления электрического тока и его использование в задаче определения тензора проводимости // Вопросы корректности обратных задач математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982. С. 85–94.
12. *Романов В.Г.* О структуре фундаментального решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла // Дифференц. ур-ния. 1986. Т. 22. № 9. С. 1577–1587.
13. *Романов В.Г.* Обратная задача электродинамики // Докл. АН. 2002. Т. 386. № 3. С. 304–309.
14. *Романов В.Г.* Об устойчивости определения коэффициента проводимости в уравнениях электродинамики // Докл. АН. 2003. Т. 389. № 1. С. 27–31.
15. *Романов В.Г.* Оценка устойчивости решения в двумерной обратной задаче электродинамики // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 4. С. 837–850.
16. *Романов В.Г.* Оценка устойчивости решения трехмерной обратной задачи для системы уравнений Максвелла // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. № 6. С. 1347–1364.
17. *Романов В.Г.* Оценка устойчивости решения задачи об определении коэффициентов диэлектрической проницаемости и проводимости // Докл. АН. 2005. Т. 400. № 5. С. 612–617.
18. *Романов В.Г.* Оценка устойчивости решения в обратной задаче электродинамики // Сиб. матем. журн. 2011. Т 52. № 4. С. 861–875.
19. *Романов В.Г.* Оценка устойчивости решения задачи об определении ядра в интегро-дифференциальных уравнениях электродинамики // Докл. АН. 2011. Т. 439. № 4. С. 451–455.
20. *Романов В.Г.* Задача об определении ядра уравнений электродинамики для дисперсных сред // Докл. АН. 2011. Т. 440. № 1. С. 21–24.
21. *Романов В.Г.* Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электромагнитного поля // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 916–924.
22. *Романов В.Г.* Задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости в стационарной системе уравнений Максвелла // Докл. АН. 2017. Т 474. № 4. С. 413–417.
23. *Романов В.Г.* Определение диэлектрической проницаемости по модулю вектора электрической напряженности высокочастотного электромагнитного поля // Докл. АН. 2019. Т. 484. № 3. С. 269–272.
24. *Романов В.Г.* О единственности определения диэлектрической и магнитной проницаемостей в анизотропной одномерно-неоднородной среде // Дифференц. ур-ния. 1984. Т. 20. № 2. С. 325–332.
25. *Романов В.Г., Савин М.Г.* Задача определения тензора проводимости в неоднородной по глубине анизотропной среде // Изв. АН СССР, сер. Физика Земли. 1984. № 2. С. 84–92.
26. *Романов В.Г., Савин М.Г.* Об определении тензора проводимости в анизотропной трехмерно-неоднородной среде. Линейное приближение // Изв. АН СССР, сер. Физика Земли. 1984. № 5. С. 63–72.
27. *Radon J.* Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sachsische Akademie der Wissenschaften. Leipzig. 1917. Bande 29. S. 262–277.
28. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
29. *Deans Stanley R.* The Radon transform and some of its applications. New York: John Wiley & Sons, 1983.
30. *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography (Classics in Applied Mathematics, 32), Philadelphia, PA: SIAM. 2001.
31. *Anikonov Ju.E., Romanov V.G.* On uniqueness of determination of a form of first degree by its integrals along geodesics // J. Inv. Ill-Posed Probl. 1997. V. 5. № 6. P. 487–490.