ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 6, с. 963–974

УДК 517.988.68

ИТЕРАЦИОННЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ

© 2020 г. В. В. Васин

620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики УрО РАН; Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

e-mail: vasin@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 25.09.2019 г.
Переработанный вариант 25.09.2019 г.
Принята к публикации 11.02.2020 г.

Представлен краткий обзор по итерационным процессам фейеровского типа для основных постановок некорректно поставленных задач, которые включают задачи условной квадратичной и выпуклой минимизации, вариационные неравенства, линейные и нелинейные операторные уравнения в гильбертовом пространстве. Все эти постановки сводятся к задаче нахождения неподвижной точки нерастягивающего фейеровского оператора на основе метода последовательных приближений и его модификации с помощью корректирующих множителей. Представлен также материал, касающийся двухэтапного метода построения регуляризующего алгоритма для нелинейных некорректных задач с монотонным оператором, излагается экономичный способ учета в алгоритме дополнительной априорной информации о решении с помощью фейеровских отображений. Библ. 22.

Ключевые слова: фейеровский процесс, некорректно поставленная задача, регуляризующий алгоритм, аппроксимация неподвижной точки, априорная информация.

DOI: 10.31857/S0044466920060113

1. ВВЕДЕНИЕ

В небольшой заметке [1] Л. Фейер сформулировал следующее определение поточечной близости точки к некоторому множеству.

Определение 1. Пусть M – замкнутое множество из R^n (или гильбертова пространства). Если для точек p и p_1 из R^n выполнено неравенство $\|p-q\| > \|p_1-q\|$ для любого $q \in M$, то будем говорить, что p_1 поточечно ближе к M, чем p. Причем, если для p не существует точек p_1, которые поточечно ближе, чем p, тогда точку p назовем ближайшей к множеству M.

Кроме того, им было отмечено, что множество ближайших к M точек совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой $\overline{\mathrm{conv}(M)}$ множества M. Из этого факта непосредственно вытекает, что если точка p не принадлежит $\overline{\mathrm{conv}(M)}$, то можно найти точку p_1, которая поточечно ближе к множеству M, чем p.

На основе определения 1 поточечной близости точки к множеству и отмеченного геометрического факта Т. Моцкин и Дж. Шенберг [2] ввели определение монотонной фейеровской последовательности $\{x_k\}$, для которой $x_k \neq x_{k+1}$, $\|x_{k+1}-q\| \le \|x_k-q\|$ $\forall q \in M$, и предложили релаксационный метод решения систем линейных неравенств. Дальнейшие исследования по методам построения фейеровских последовательностей для задач линейного и выпуклого программирования были продолжены в работах [3], [4]. И.И. Ереминым были введены более общие понятия, связанные с именем Л. Фейера: фейеровский оператор, фейеровский процесс, установлены их свойства и важные факты, которые определили широкий простор для построения итерационных фейеровских методов решения задач математического программирования в R^n, в том числе, несобственных [5], [6] (см. также [7]).

В работе автора [8] было дано определение класса псевдосжимающих операторов, который в книге [8] в рамках единого подхода был переименован в класс сильно M-фейеровских операров, поскольку эти операторы обладают более сильным свойством сжимаемости, чем фейеровские операторы, введенные И.И. Ереминым, и удовлетворяют тем же базовым условиям. Свойство сильной M-фейеровости оказалось весьма полезным при исследовании итерационных методов решения линейных и нелинейных обратных некорректных задач в бесконечномерных пространствах, что обусловлено уникальными свойствами процессов с фейеровскими операторами шага, а именно.

1. Неединственность решения задачи не является препятствием для применения (сильно) фейеровского процесса.

2. Классы фейеровских операторов замкнуты относительно операций произведения отображений и взятия выпуклой суммы.

3. Возможность решения задачи с помощью разбиения на подзадачи, для каждой из которых строится итерационный процесс с фейеровским оператором шага, и формирование итерационного метода для исходной задачи в виде суперпозиции операторов шага из числа построенных для подзадач.

4. Возможность построения гибридных итерационных методов, в которых оператор шага образуется с помощью операций произведения и выпуклой суммы операторов шага различных фейеровских итерационных схем решения исходной обратной задачи.

5. Фейеровские процессы обладают внутренним параллелизмом, следовательно, хорошо приспособлены для применения параллельных технологий.

6. Гибкий учет в алгоритме дополнительных априорных ограничений, заданных в форме линейных соотношений, и систем линейных и выпуклых неравенств с помощью фейеровских отображений.

2. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ОПЕРАТОРОВ ФЕЙЕРОВСКОГО ТИПА И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

В приводимых ниже определениях классов нелинейных операторов используется двойная терминология. С одной стороны, в качестве основного понятия выступает свойство фейеровости, а с другой, в качестве сравнения привлекается терминология, которая встречается в несколько иной форме в различных разделах функционального анализа. Далее в статье мы будем использовать только ту терминологию, которая была введена в первых работах по фейеровским процессам и основана на идее поточечной аппроксимации множества, восходящей к работе [1]. Если не оговаривается особо, то в дальнейшем предполагается, что исследуемые операторы действуют в гильбертовом пространстве, для которого примем обозначение H, а через $\mathrm{Fix}(T)$ обозначим множество неподвижных точек оператора T, т.е.

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x : x \in D(T) \subset H, T(x) = x\}.$$

Определение 2. Оператор $T : H \to H$ называется слабо M-фейеровским (или M-квазинерастягивающим), если $M = \mathrm{Fix}(T) \neq \varnothing$ и выполнено неравенство

$$\|T(x) - z\| \le \|x - z\| \quad \forall x \in H, \quad \forall z \in M,$$

обозначим класс таких операторов через $\mathcal{K}_M$.

Определение 3. Оператор $T : H \to H$ называется M-фейеровским (или строго M-квазинерастягивающим), если $M = \mathrm{Fix}(T) \neq \varnothing$ и

$$\|T(x) - z\| < \|x - z\| \quad \forall x \in H, \quad x \notin M, \quad z \in M,$$

обозначаем этот класс через $\mathcal{F}_M$.

Определение 4. Оператор $T : H \to H$ называется сильно M-фейеровским (или M-псевдосжимающим), если $M = \mathrm{Fix}(T) \neq \varnothing$ и существут константа ν такая, что

$$\|T(x) - z\|^2 \le \|x - z\|^2 - \nu\|T(x) - z\|^2 \quad \forall x \in H, \quad z \in M,$$

обозначаем класс таких операторов через $\mathcal{P}_M^{\nu}$.

Определение 5. Оператор $T : H \to H$ называется нерастягивающим (нерасширяющим), если выполнено неравенство

$$\|T(x) - T(v)\| \le \|x - v\| \quad \forall x, v \in H;$$

обозначим этот класс операторов $\mathcal{K}$. Из определений 2–4 следует, что для введенных классов справедливы включения

$$\mathcal{P}_M^{\nu} \subset \mathcal{F}_M \subset \mathcal{K}_M,$$

причем, как показывают примеры (см. [9]), эти включения строгие.В дальнейшем при упоминании о свойстве фейеровости оператора, как правило, будут опускаться слова “слабо” и “сильно”, если из текста ясно, о каком классе фейеровских операторов идет речь. Заметим, что сильную M-фейеровость, с одной стороны, можно рассматривать как некоторое обобщение свойства псевдосжимаемости Б. Мартине [10] для нерастягивающего оператора, а с другой, как усиление свойства M-фейеровости, введенное в [6].

Лемма 1. *Если оператор* $V : H \to H$ *и* $V \in \mathcal{K}_M$, *тогда для* $\lambda \in (0,1)$ *оператор* $T = \lambda V + (1-\lambda)I$ *принадлежит классу* $\mathcal{P}_M^{\nu}$ *для* $\nu = (1-\lambda)/\lambda$. *Обратно, если* $T \in \mathcal{P}_M^{\nu}$, *то* $T = \dfrac{1}{1+\nu}V + \dfrac{\nu}{1+\nu}I$, *где* $V \in \mathcal{K}_M$.

3. ОСНОВНЫЕ ПОСТАНОВКИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

1. Минимизация выпуклого функционала

$$\min\{\phi(x) : \ x \in Q\} = \phi^*, \tag{3.1}$$

где ϕ: $H \to \mathrm{R}^1$ – полунепрерывный снизу выпуклый (в частности, квадратичный) функционал, Q – выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства H, которое называется допустимым множеством, ϕ^* – оптимальное значение, множество M решений задачи (3.1) называется оптимальным множеством. Если ϕ – сильно выпуклый функционал, то задача (3.1) корректно поставлена по Тихонову, однако выпуклость целевого функционала не гарантирует корректность задачи.

2. Решение вариационного неравенства

$$\langle F(x), x - v\rangle \le 0 \quad \forall v \in Q, \tag{3.2}$$

где F – оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, Q – выпуклое замкнутое подмножество пространства H, $\langle\, ,\rangle$ обозначает скалярное произведение в пространстве H.

3. Нахождение неподвижной точки нелинейного оператора $T : H \to H$, т.е. решение уравнения II рода

$$x = T(x). \tag{3.3}$$

4. Нахождение решения нелинейного операторного уравнения I рода

$$A(x) = y, \tag{3.4}$$

где оператор A действует на паре гильбертовых пространств, для которого обратный A^{-1}, в общем случае, разрывный.

Установим связь между базовыми постановками некорректных задач, чтобы убедиться, что все они могут быть представлены в форме (3.3) – нахождение неподвижной точки нелинейного оператора.

Теорема 1. *Для того чтобы точка x^* была решением задачи* (3.1) *минимизации выпуклого дифференцируемого по Гато функционала, необходимо и достаточно, чтобы точка x^* была решением вариационного неравенства*

$$\langle \nabla\phi(x), x - v\rangle \le 0 \quad \forall v \in Q. \tag{3.5}$$

Теорема 2. *Задача* (3.2), *в частности*, (3.5) *эквивалентна решению уравнения* II *рода*

$$x = P_Q(x - \gamma F(x)) \equiv T(x), \tag{3.6}$$

где γ *– произвольный положительный параметр*, P_Q *– оператор метрического проектирования на множество* Q. *В частности*, *ввиду теоремы* 1, *задача минимизации* (3.1) *эквивалентна задаче* (3.6) *при* $F(x) = \nabla\phi(x)$, *а задача* (3.4) *эквивалентна* (3.3) *при* $T(x) = x + A(x) - y$.

Таким образом, базовые постановки некорректно поставленных задач 1–4 можно рассматривать с единых позиций как задачу аппроксимации неподвижной точки нелинейного отображения, т.е. решения уравнения (3.3). Однако в приложениях выбор математической модели обычно диктуется типами входных данных, свойствами операторов и наличием для данной постановки сходящихся итерационных процессов.

4. СВОЙСТВА СИЛЬНО ФЕЙЕРОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Во многих случаях задача допускает разбиение на подзадачи, для каждой из которых строится итерационный оператор, а затем с помощью некоторых операций сборки из имеющихся фрагментов конструируется оператор шага итерационного метода для решения задачи в целом. При этом удается построить разрешающий оператор из того же класса, что и порождающие его операторы, отвечающие за подзадачи. Возможность использования такого подхода для фейеровских операторов из класса $\mathcal{P}_M^{\nu}$ устанавливает следующая теорема (см. [7, теорема 1.8], [8]).

Теорема 3. *Пусть операторы* $T_i : H \to H$, $T_i \in \mathcal{P}_{M_i}^{\nu_i}$ *и* $M = \bigcap_{i=1}^{m} M_i \neq \varnothing$. *Тогда верно следующее*:

1) $T = T_m T_{m-1} T \ldots T_1 \in \mathcal{P}_M^{\nu}$, $\nu = \min_{1\le i\le m}\{\nu_i\}/2^{m-1}$,

2) $T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T_i \in \mathcal{P}_M^{\nu}$, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, $\nu = \min_{1\le i\le m}\{\nu_i\}$.

Заметим, что порядок операторов в произведении из пункта 1 не имеет значение, т.е. соотношение справедливо для любой перестановки индексов.

Для аппроксимации неподвижных точек нелинейного оператора T, т.е. решения уравнения

$$x = T(x), \tag{4.1}$$

к которому сводятся основные постановки некорректных задач, применим метод последовательных приближений (МПП)

$$x^{k+1} = T(x^k). \tag{4.2}$$

Введем обозначения "$\rightharpoondown$" и "$\to$" для слабой и сильной сходимости элементов гильбертова пространства. Сформулируем теорему сходимости для оператора шага T из класса $\mathcal{P}_M^{\nu}$, которая была первоначально доказана для нерастягивающего оператора [10], а затем при более общих условиях [8].

Теорема 4. *Пусть оператор* $T : D(T) \subset H \to H$ *из класса* $\mathcal{P}_M^{\nu}$, *удовлетворяет соотношению*

$$x_j \rightharpoondown x, \quad x_j - T(x_j) \to 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Fix}(T) = M. \tag{4.3}$$

Тогда при любом x^0 *для итерационного процесса* (4.2) *справедливы следующие свойства*:

1) $x^k \rightharpoondown \hat{x} \in \operatorname{Fix}(T)$, *т.е. сходится слабо к решению уравнения* (4.1);

2) $\inf\{\lim_{k\to\infty}\|x^k - z\| : z \in \operatorname{Fix}(T)\} = \lim_{k\to\infty}\|x^k - \hat{x}\|$;

3) *либо* $\|x^{k+1} - \hat{x}\| < \|x^k - \hat{x}\|$ *для любого* k, *либо* x^k *стационарна, начиная с некоторого* $k_0 \ge 0$, *т.е.* $x^{k^0} = x^{k^0+1} = \ldots = \hat{x}$;

4) *справедлива оценка*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \le \|x^0 - z\|^2/\nu \quad \forall z \in \operatorname{Fix}(T).$$

С учетом леммы 1 из теоремы 4 получаем

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы вместо $T \in \mathcal{P}_M^{\nu}$ выполнено $T \in \mathcal{K}_M$. Тогда заключение теоремы справедливо для процесса

$$x^{k+1} = \lambda T(x^k) + (1 - \lambda)x^k,$$

где $0 < \lambda < 1$.

Замечание 1. Если дополнительно в теореме 4 оператор T является нерастягивающим (определение 5), тогда условие (4.3) выполнено. Таким образом, если множество $M = \bigcap_{i=1}^{m} M_i \neq \varnothing$ и известны операторы $T_i \in \mathcal{P}^{\nu_i}_{M_i}$, то, согласно теореме 3, для построения оператора $T \in \mathcal{P}^{\nu}_{M}$ достаточно положить

$$T = T_m T_{m-1} T \ldots T_1, \quad T = \sum_{i-1}^{m} \alpha_i T_i, \tag{4.4}$$

где $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Объединяя этот факт с теоремой 4, получаем утверждение о сходимости МПП с оператором шага T из (4.4).

Теорема 5. *Пусть* $M = \bigcap_{i=1}^{m} M_i \neq \varnothing$, $T_i \in \mathcal{P}^{\nu_i}_{M_i}$ *и для каждого выполнено условие* (4.3). *Тогда для МПП* (4.2), *где* T *— любой из операторов* (4.4), *справедливо заключение теоремы* 4.

Необходимо отметить, что, хотя сходимость итераций в теоремах 4, 5 только слабая, полученные результаты и развитые подходы можно применять при решении конечномерных задач, например, для систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в том числе, плохообусловленных

$$Ax = y, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad y \in \mathrm{R}^s, \tag{4.5}$$

где матрица A — произвольной структуры, а система, в общем случае, разрешима лишь в смысле наименьших квадратов. Во-первых, на примере СЛАУ легко продемонстрировать возможность разбиения на подзадачи (подсистемы), для каждой из которых строится фейеровский оператор, порождающий итерационный процесс, а затем из этих операторов генерируется фейеровский итерационный процесс для решения исходной СЛАУ (4.5) с помощью операций, указанных в теореме 3. В качестве подзадач здесь выступают подсистемы, на которые можно произвольным образом разрезать исходную СЛАУ. Во-вторых, покажем, как можно учитывать в алгоритме априорную информацию о решении СЛАУ с помощью фейеровских отображений.

Рассмотрим два итерационных метода решения СЛАУ — метод простой итерации и итерированный вариант метода Тихонова:

$$x^{k+1} = x^k - ((A^T A x^k - A^T y) \equiv T(x^k), \quad \|A\| \leq 1, \tag{4.6}$$

$$x^{k+1} = x^k - (A^T A + \alpha I)^{-1}(A^T y + \alpha x^k) \equiv T(x^k). \tag{4.7}$$

Предположим, что известна дополнительная априорная информация о решении СЛАУ (4.5) в форме систем выпуклых (в частности, линейных) неравенств

$$x \in Q = \{x \in \mathrm{R}^n : f_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{4.8}$$

Определим операторы

$$U_i(x) = x - \lambda \frac{f_i^+(x) \nabla f_i(x)}{\|\nabla f_i(x)\|^2}, \quad 0 < \lambda < 2, \tag{4.9}$$

где f_i — слабо полунепрерывный снизу функционал с ограниченным градиентом ∇f_i, и образуем с помощью операций умножения и выпуклой суммы операторы

$$U(x) = U_m U_{m-1} U \ldots U_1(x), \quad U(x) = \sum_{i-1}^{m} \alpha_i U_i(x). \tag{4.10}$$

Оказывается, что каждый из операторов шага T, определяемый процессами (4.6), (4.7), принадлежат классу $\mathcal{P}^1_M$, где M — множество решений СЛАУ (4.5) в смысле наименьших квадратов, оператор U_i, определяемый формулой (4.9), принадлежит $\mathcal{P}^{\nu}_{Q_i}$, где $\nu = (2 - \lambda)/\lambda$, (см. [7], лемма 3.14), а множество Q_i определяется i-м неравенством в системе (4.8). Следовательно, оператор U, определяемый каждой из формул (4.10), принадлежит классу $\mathcal{P}^{\nu}_{Q}$ при соответствующем ν (см. теорему 3). Поэтому из теоремы 5 получаем

Следствие 2. Для любого x^0 последовательность x^k, генерируемая фейеровским процессом

$$x^{k+1} = U(T(x^k)),$$

где U — любой из операторов (4.10), сходится к решению СЛАУ (4.5) в смысле наименьших квадратов, удовлетворяющему априорным ограничениям (4.8).

Замечание 2. Если априорное множество Q задано системой линейных неравенств, то при возмущенных входных данных СЛАУ и системы неравенств итерационный метод порождает регуляризующий алгоритм (РА). В [7], [9] можно найти доказательство приведенных здесь фактов и примеры использования априорных ограничений при решении прикладных задач.

5. МОДИФИКАЦИЯ МПП НА ОСНОВЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Цель этого раздела — исследование модифицированного варианта МПП, с помощью которого удается получить сильную сходимость итераций для нерастягивающего оператора и его приложений к некорректно поставленным задачам. Следующие две теоремы, полученные в работе Ф. Браудера [11], касаются существования неподвижных точек нерастягивающего оператора и их устойчивости относительно параметра.

Теорема 6. *Пусть D — выпуклое замкнутое ограниченное множество гильбертова пространства H и T — нерастягиващий оператор* (*определение* 5), *действующий из D в D. Тогда множество неподвижных точек* $\mathrm{Fix}(T)$ *не пусто, выпукло и замкнуто.*

Рассмотрим уравнение

$$x = \gamma T(x) + (1-\gamma)v_0 \tag{5.1}$$

с оператором $T \in \mathcal{K}$ и $0 < \gamma < 1$, где v^0 — некоторый элемент из D.

Теорема 7. *Пусть $T : H \to H$ — нерастягивающий оператор* (*определение* 5), *отображающий выпуклое замкнутое ограниченное подмножество D из H в D. Тогда для любого $v^0 \in D$ и параметра* $0 < \gamma < 1$ *существует единственное решение $x_\gamma \in D$ уравнения* (5.1) *и* $\lim_{\gamma\to 1}\|x_\gamma - \hat{x}\| = 0$, *где $\hat{x}$ — ближайшая к v^0 неподвижная точка оператора T.*

Б. Гальперин в своей статье [12] предложил модифицированный вариант МПП в форме

$$x^{k+1} = \gamma_{k+1}T(x^k) + (1-\gamma_{k+1})v_0 \tag{5.2}$$

и, используя результаты работы [11], установил сильную сходимость итераций к некоторой точке из $\mathrm{Fix}(T)$. Для формулировки теоремы сходимости нам понадобится определение допустимой последовательности γ_i.

Определение 6. Числовая последовательность γ_i называется допустимой, если следующие условия выполняются:

1) $0 < \gamma_i < 1$, $i = 1,2,\ldots$;

2) $\gamma_i < \gamma_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots$, $\lim_{i\to\infty}\gamma_i = 1$ и справедливы соотношения:

3) существует последовательность номеров $n(i)$ такая, что $n(i+1) > n(i)$ и справедливы соотношения:

4) $\lim_{i\to\infty}\varepsilon_{i+n(i)}\varepsilon_i^{-1} = 1$, где $\varepsilon_i = 1-\gamma_i$;

5) $\lim_{i\to\infty} n(i)\varepsilon_i = \infty$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 7. *Тогда для любого начального приближения $x^0 \in D$ и для любой допустимой последовательности γ_k последовательность x^k, порождаемая процессом* (5.2), *сходится сильно к $\hat{x} \in \mathrm{Fix}(T)$, ближайшей к v_0.*

Замечание 3. Если в теореме 8 наряду с условием $T \in \mathcal{K}$ оператор принадлежит классу $\mathcal{P}_M^{\nu}$ (или даже $\mathcal{K}_M$), то в качестве множества D можно взять шар $S(z;r)$ произвольного радиуса r с центром в неподвижной точке z, содержащий v_0. Это означает, что сходимость итерационного метода (5.2) будет гарантирована для любой начальной точки x^0.

Замечание 4. Последовательность $\gamma_i = 1 - i^{-p}$ при $0 < p < 1$ и $n(i) = i^{\nu}$, $0 < p < \nu < 1$ является допустимой в смысле определения 6. Как было отмечено в разд. 3, основные постановки некорректных задач могут быть сведены к нахождению неподвижной точки некоторого отображения на основе МПП (4.2) или его модифицированного аналога (5.2). Следовательно, в случае возмущенных данных задачи с уровнем погрешности δ необходимо формулировать правило останова итераций, которое бы гарантировало сильную сходимость $x^{k(\delta)} \to \hat{x} \in \operatorname{Fix}(T)$.

Исследуем регуляризующие свойства итерационного процесса (5.2). Рассмотрим наряду с (5.2) ее аналог с возмущенным оператором $\tilde{T}$

$$\tilde{x}^{k+1} = \gamma_{k+1}\tilde{T}(\tilde{x}^k) + (1 - \gamma_{k+1})v_0 \tag{5.3}$$

и с той же стартовой точкой x^0. Введем параметр δ, который характеризует ошибку входных данных задачи так, что выполнено одно из двух соотношений

$$\|\tilde{T}(\tilde{x}^k) - T(\tilde{x}^k)\| \le \phi(\delta), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5.4}$$

$$\|\tilde{T}(x^k) - T(x^k)\| \le \phi(\delta), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{5.5}$$

где $\phi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 8 *и имеет место либо соотношение* (5.4), *либо* (5.5), *причем в последнем случае дополнительно предполагается, что* $\tilde{T} \in \mathcal{K}$. *Тогда при связи параметров* $k(\delta)\phi(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$, *последовательность* $\tilde{x}^{k(\delta)}$, *сформированная процессом* (5.3), *сходится к* $\hat{x} \in \operatorname{Fix}(T)$, *ближайшей* к v_0.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ МПП С КОРРЕКТИРУЮЩИМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

Обратимся к уравнению (4.5) и рассмотрим процессы (4.6), (4.7), где теперь вместо матрицы линейный ограниченный оператор A, действующий на паре гильбертовых пространств, обратный оператор A^{-1} которого в общем случае разрывный. Нетрудно проверить, что оператор шага в каждом из этих процессов является нерастягивающим, поэтому из теоремы 8 получаем

Следствие 3. Итерационный процесс (5.2), где T — оператор шага любого из процессов (4.6), (4.7), сходится сильно к решению, в общем случае, в смысле наименьших квадратов, ближайшему к v_0.

Пусть вместо точной пары (A, y) известны приближенные данные A_δ, y_δ такие, что $\|A - A_\delta\| \le \delta$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Несложная проверка показывает, что в этом случае выполнены соотношения (5.4), (5.5) с функцией $\phi(\delta) = c\delta$, где c — некоторая константа, следовательно, из теоремы 9 имеем

Следствие 4. При связи параметров $k(\delta)\delta \to 0$, $\delta \to 0$ последовательность $\tilde{x}^{k(\delta)}$, построенная процессом (5.3) с возмущенными данными A_δ, y_δ сходится к решению операторного уравнения (4.5), ближайшему к v_0. Аналогичное утверждение справедливо для процесса

$$x^{k+1} = \gamma_{k+1}U(T(x^k)) + (1 - \gamma_k)v_0, \tag{6.1}$$

где $U \in \mathcal{P}_Q^{\nu} \cap \mathcal{K}$, $M \cap Q \ne \varnothing$ при наличии априорной информации о решении операторного уравнения в виде $x \in Q$.

В качестве примера множества априорных ограничений для операторного уравнения рассмотрим систему линейных неравенств

$$Q = \{x \in H: \ l_i(x) \equiv \langle x, a_i \rangle - q_i \le 0\} \tag{6.2}$$

и оператор, отвечающий за i-е неравенство

$$U_i(x) = x - \lambda \frac{l_i^+ a_i}{\|a_i\|}, \quad 0 < \lambda < 2. \tag{6.3}$$

Справедлива следующая [7]

Лемма 2. *Оператор U_i принадлежит классу $\mathcal{P}^{\nu}_{Q_i} \cap K$, т.е. является сильно фейеровским и нерастягивающим; здесь $Q_i = \{x \in H: \ \langle x, a_i \rangle - q_i \le 0\}$, $\nu = (2-\lambda)/\lambda$.*

Это означает, что в качестве оператора U в процессе (6.1) можно принять оператор, образованный произведением или выпуклой суммой операторов U_i. Заметим, что при $\lambda = 1$ оператор U_i совпадает с метрической проекцией на гиперплоскость $l_i(x) = 0$.

В приложениях часто используется априорная информация о неотрицательности, монотонности или выпуклости решения в разных сочетаниях. Вместе с ограниченностью эти свойства порождают компактные множества, например, в L_p. После дискретной аппроксимации априорные ограничения принимают вид выпуклых многогранников. В монографии [13] разработаны специальные методы, алгоритмы и программные средства построения регуляризованного семейства приближенных решений для линейных некорректных задач с учетом априорных ограничений такого типа.

Рассмотрим сначала частный случай задачи (3.1), когда целевой функционал – квадратичный

$$\min\{\|Ax - y\|^2: \ x \in Q\}, \tag{6.4}$$

где A – линейный ограниченный оператор, действующий на паре гильбертовых пространств H_1, H_2, а Q – выпуклое замкнутое необязательно компактное подмножество из H_1. Поскольку компактность множества не предполагается и допускается неограниченность обратного оператора A^{-1}, то задача некорректна по Тихонову. Предполагается, что задача (6.4) имеет непустое множество решений M. Согласно теоремам 1, 2 задача (6.4) эквивалентна решению операторного уравнения

$$x = P_Q[x - \beta(A^*Ax - A^*y)] \equiv T(x),$$

где P_Q – оператор метрического проектирования. Сформируем МПП с оператором шага T

$$x^{k+1} = P_Q[x^k - \beta(A^*Ax^k - A^*y)] \equiv T(x^k), \tag{6.5}$$

который называют обычно методом проекций градиента. При принятых условиях нельзя гарантировать сходимость итераций к решению задачи, однако его модификация с помощью корректирующих множителей позволяет решить эту проблему, поскольку оператор шага обладает свойством фейеровости и принадлежит классу $\mathcal{K}$ нерастягивающих операторов [14] (см. также лемму 2.14 из [10]).

Лемма 3. *При $0 < \beta < 2\|A\|^{-1}$ оператор шага T итерационного метода* (6.5) *принадлежит классу $\mathcal{P}^{\nu}_{Q_i} \cap K$, где параметр $\nu = (1/\beta\|A\|^2 - 1/2)$.*

Из теоремы 8, леммы 3 и замечания 3 выводим

Следствие 5. Если последовательность γ_k является допустимой, то для любого начального приближения x^0 процесс

$$x^{k+1} = \gamma_{k+1} P_Q[x^k - \beta(A^*Ax^k - A^*y)] + (1-\gamma_{k+1})v_0, \tag{6.6}$$

сходится к решению $\hat{x}$ задачи (6.4), ближайшему к v_0.

Замечание 5. Если пара (A, y) задана своим δ-приближением (A_δ, y_δ), то для процесса (6.6) справедливо заключение следствия 4 о сходимости итераций к решению $\hat{x}$ при выборе числа итераций $k(\delta)$ таким образом, чтобы $k(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Рассмотрим теперь задачу минимизации выпуклого функционала в общей форме (3.1). Из теорем 1, 2 следует, что решение задачи (3.1) сводится к нахождению неподвижной точки оператора

$$T(x) = P_Q(x - \gamma F(x)), \qquad \gamma > 0, \tag{6.7}$$

где $F(x) = \nabla\phi(x)$, Q – выпуклое замкнутое ограниченное подмножество из H, P_Q – оператор метрического проектирования. Справедливо следующее утверждение (см. [15, лемма 4.1]).

Лемма 4. *Если $\|F'(x)\| \le N$, $x \in Q$, то при $0 < \gamma \le 2/N$ оператор T, определяемый формулой* (6.7), *является нерастягивающим.*

Из теоремы 8 и леммы 4 получаем

Следствие 6. Пусть выполнены условия леммы 4 и задача (3.1) имеет непустое множество решений. Тогда для любого v_0 и для любой допустимой последовательности γ_k процесс

$$x^{k+1} = \gamma_{k+1}P_Q(x^k - \gamma\nabla\phi(x^k)) + (1-\gamma_{k+1})v_0 \tag{6.8}$$

сильно сходится к решению задачи (3.1), ближайшему к v_0.

Заметим, что при $\gamma_k = \dfrac{1}{1+(1+k)^p}$, $0 < p < 1$, $v_0 = 0$ утверждение о сильной сходимости (6.8) содержится в работе [14] (см. теорему 4.1).

Установим регуляризующие свойства построенного итерационного процесса.

Теорема 10. *Пусть целевой функционал* ϕ *в задаче* (3.1) *задан приближенно функционалом* ϕ_δ *и выполнены условия аппроксимации*

$$\|\nabla\phi(x) - \nabla\phi_\delta(x)\| \le \delta \quad \forall x \in Q. \tag{6.9}$$

Пусть последовательность $\{\tilde{x}^{k(\delta)}\}$ *построена процессом* (6.8), *в котором функционал* ϕ *заменен на* ϕ_δ. *Тогда при выборе числа итераций* $k(\delta)$, *удовлетворяющему соотношению* $k(\delta)\delta \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *последовательность* $\{\tilde{x}^{k(\delta)}\}$ *сходится к решению* $\hat{x}$ *задачи* (3.1), *ближайшему к* v_0.

Действительно, по теореме 9 для сходимости итераций в условиях возмущенных данных достаточно проверить для оператора $T(x) = P_Q(x - \gamma F(x))$ выполнение условия (5.4), которое в нашем случае, с учетом (6.9), принимает вид

$$\|T(x) - \tilde{T}(x)\| = \|P_Q(x - \gamma\nabla\varphi(x)) - P_Q(x - \gamma\nabla\phi_\delta(x))\| \le \|\nabla\phi(x) - \nabla\phi_\delta(x)\| \le \delta.$$

Prox-метод позволяет аппроксимировать решение некорректной задачи минимизации выпуклого функционала (3.1) последовательностью решений корректно поставленных задач с равномерно выпуклым целевым функционалом, которые эффективно решаются традиционными методами.

Определение 7. Отображение $S_Q^\phi\colon\ H \to Q \subset H$, определяемое соотношением

$$S_Q^\phi\colon\ v \to \operatorname{argmin}\{\phi(x) + (1/2)\|x - v\|^2\colon\ x \in Q\},$$

введенное Дж. Моро [16], называется prox-отображением, а итерационный процесс

$$x^{k+1} = S_Q^\varphi(x^k)$$

называется prox-методом; здесь Q — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства H.

Теорема 11. *Prox-отображение* S_Q^ϕ *принадлежит классу* $\mathcal{P}_M^1 \cap \mathcal{K}$, *т.е. является сильно* M*-фейеровским и нерастягивающим оператором, где* M *— множество решений задачи* (3.1).

Теорема 8 вместе с теоремой 11 влекут (см. [9, лемма 2.7])

Следствие 7. Пусть задача (3.1) разрешима и $\hat{x}$ — ее решение, ближайшее к v_0. Тогда для $x^0 \in Q$ и допустимой последовательности γ_k процесс

$$x^{k+1} = \gamma_{k+1}S_Q^\phi(x^k) + (1-\gamma_{k+1})v_0 \tag{6.10}$$

сходится сильно к $\hat{x}$.

Необходимо отметить, что при реализации процесса (6.10) требуется вычислять $w = S_Q^\phi(v)$ в каждой итерационной точке $v = x^k$, где prox-отображение задано неявно и элемент w находится как решение задачи на минимум для равномерно выпуклого функционала. Это означает, что для приближенного вычисления $w = S_Q^\phi(v)$ можно привлечь МПП со сжимающим оператором. Действительно, согласно теоремам 1, 2 вычисление w сводится к нахождению неподвижной точки оператора $T = P_Q(x - \gamma F(x))$, т.е. к решению уравнения

$$x = P_Q(x - \gamma F(x)) \equiv T(x),$$

где $F(x) = \nabla\phi(x) + (x - v)$.

Лемма 5. *Пусть* $\|F(x) - F(u)\| \le C\|x - u\|$, *тогда при* $\gamma < 2/C^2$, $\|T(x) - T(u)\| < \|x - v\|$, *а при* $\gamma = 1/C^2$, $C > 1$, *справедлива оценка*

$$\|T(x) - T(u)\| \le \sqrt{1 - (1/C^2)}\|x - v\|.$$

Таким образом, для приближенного вычисления $S_Q^{\phi}(x^k)$ в процессе (6.10) можно применить МПП со сжимающим оператором T. Если структура множества допускает экономичный алгоритм вычисления метрической проекции P_Q, то в целом процесс (6.10) может оказаться вполне эффективным.

7. ДВУХЭТАПНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Регуляризованное семейство приближенных решений для вариационного неравенства (3.2) может быть сформировано на основе принципа итеративной регуляризации А.Б. Бакушинского с помощью итерационной схемы [15]

$$x^{k+1} = P_Q[x^k - \gamma_k(F(x^k) + \varepsilon_k G(x^k))], \tag{7.1}$$

где $F(x)$ — монотонный оператор, G — равномерно (сильно) монотонный оператор, P_Q — оператор метрического проектирования, γ_k, ε_k — последовательности положительных параметров. Таким образом, идея итеративной регуляризации основана на предварительной регуляризации (первый этап) исходной задачи (в данном случае вариационного неравенства) и на втором этапе на применении к ней той или иной итерационной схемы (в данном случае МПП).

Теорема 12. *Пусть* $F(x) = A(x) - y$, A — *монотонный оператор, для которого* $\sup\{\|A'(x)\|\colon x \in Q\} \le C$, y *задан приближенно элементом* y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. *Пусть параметры* γ_k, ε_k *выбраны в соответствии с соотношениями*

$$0 < \varepsilon \le 1, \quad \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 = \infty,$$

$$\gamma_k = \theta\varepsilon_k, \quad 0 < \theta \le \frac{1}{1 + C^2}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_k{}^4} = 0.$$

Если число итераций $k(\delta)$ *выбрано так, что выполнены соотношения* $\lim_{\delta\to 0} k(\delta) = \infty$, $\lim_{\delta\to 0} \delta/\varepsilon_{k(\delta)} = 0$, *то*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\|y - y_\delta\| \le \delta} \|x_\delta^{k(\delta)} - \hat{x}\| = 0,$$

где x_δ^k *определяется процессом* (7.1), *в котором* y *заменен на* y_δ, *а* $\hat{x}$ — *решение вариационного неравенства* $\langle G(x), x - v\rangle \le 0 \ \ \forall v \in M$, M — *множество решений вариационного неравенства* (3.2).

Выше уже исследовалась некорректная задача с монотонным оператором в форме вариационного неравенства и итеративно регуляризованный метод последовательных приближений, который порождает регуляризованное семейство приближенных решений. Ниже рассмотрим некорректную задачу в форме операторного уравнения (3.4), где $A : H \to H$, — монотонный оператор с разрывным обратным A^{-1}, правая часть задана приближенно $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta$. Для построения устойчивого приближенного решения на первом этапе к операторному уравнению применяется схема Лаврентьева

$$S_\alpha \equiv A(x) + \alpha(x - v_0) - y_\delta = 0, \tag{7.2}$$

а на втором для аппроксимации регуляризованного решения x_α используются κ-процессы

$$x^{k+1} = x^k - \beta \frac{\left\langle (A'(x^0) + \alpha I)^{\kappa} S_\alpha(x^k), S_\alpha(x^k)\right\rangle}{\left\langle (A'(x^0) + \alpha I)^{\kappa+1} S_\alpha(x^k), S_\alpha(x^k)\right\rangle} S_\alpha(x^k), \tag{7.3}$$

где $\beta > 0$, $-1 \le \kappa < \infty$. Класс итерационных методов (7.3) как для корректно, так и некорректно поставленной задачи (3.4) в случае нелинейных уравнений ранее не исследовались. Эти методы, по-видимому, впервые были анонсированы автором в работе [17]. Для линейного оператора A итерационные схемы вида (7.3) (естественно, при замене оператора A' на A) и при $\beta = 1$, исследовались в книге [15], где при некотором выборе $\alpha_{k(\delta)}$ доказана сходимость итераций к нормальному решению уравнения (3.4). Очевидно, что для положительно-определенного оператора A при $\alpha = 0, \beta = 1, \kappa = \alpha$ схемы сводятся к классическим α-процессам, изложенным в монографии [18]. Обычно в линейном случае вместо κ используется параметр α, что дало основание назвать схемы α-процессами. Но поскольку в нашем нелинейном регуляризованном случае через α обозначен параметр регуляризации, было принято использовать в схемах (7.3) вместо привычного α параметр κ и назвать их κ-процессами.

Теорема 13. *Пусть A — монотонный оператор, $A'(x^0)$ — самосопряженный (неотрицательно определенный) оператор и выполнены условия*

$$\|A'(x^0)\| \le N_0, \quad \|A(x) - A(v)\| \le N\|x - v\| \quad \forall x, v \in S_{r_0}(u^0),$$

где $S_{r_0}(u^0)$ содержит x_α. Тогда для любого начального приближения $x^0 \in S_{r_0}(u^0)$ при

$$\beta < 2\alpha^3/(N_0 + \alpha)(N + \alpha)^2$$

последовательность $\{x^k\}$, порождаемая процессом (7.3), сходится к решению x_α уравнения (7.2), а при

$$\beta = \alpha^3/(N_0 + \alpha)(N + \alpha)^2$$

справедлива оценка

$$\|x^k - x_\alpha\| \le q^k\|x^0 - x_\alpha\|, \quad q = \left[1 - \frac{\alpha^4}{(N_0 + \alpha)^2(N + \alpha)^2}\right]. \tag{7.4}$$

Для получения оценки погрешности двухэтапного метода зададим класс корректности (равномерной регуляризации) в форме истокообразной представимости решения

$$v_0 - \hat{x} = A'(\hat{x})v, \quad \|v\| \le r.$$

Введем переобозначение для решения регуляризованного уравнения (7.2), теперь x_α^δ обозначаем решение с приближенной правой частью y_δ, а x_α в случае точно заданной y. Согласно результату из работы [19] для регуляризованного решения справедливы оценки

$$\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\| \le \frac{\delta}{\alpha}, \quad \|x_\alpha - \hat{x}\| \le \left(r + \frac{N_2 r^2}{2}\right)\alpha,$$

из которой при $\alpha = \sqrt{\delta/k_0}$ имеем

$$\|x_{\alpha(\delta)} - \hat{x}\| \le 2\sqrt{k_0\delta}, \quad k_0 = (1 + N_2 r/2)r. \tag{7.5}$$

Объединяя (7.5) с оценкой для κ-процесса (7.4) и выбирая число итераций по формуле

$$k(\delta) = [\ln(2\sqrt{k_0\delta}/r_0)/\ln q(\delta)],$$

получаем окончательную оценку для двухэтапного метода

$$\|x_{\alpha(\delta)}^{\delta,k(\delta)} - \hat{x}\| \le 4\sqrt{k_0\delta}, \tag{7.6}$$

которая является оптимальной по порядку δ (см. подробности в [20], [21]).

Рассмотрим двухэтапный метод решения нелинейного уравнения (3.4) с монотонным непрерывно дифференцируемым оператором $A : H \to H$, для которого выполнены условия

$$\|A'(x)\| \le N_1, \quad \|A'(x) - A'(v)\| \le N_2\|x - v\| \tag{7.7}$$

в шаре $S_{r_0}(u^0)$, содержащем v_0 — нормальное решение уравнения (3.4) и решение x_α уравнения (7.2). Как и в предыдущем пункте, применяется схема регуляризации Лаврентьева, а на втором для аппроксимации x_α регуляризованный модифицированный метод Ньютона [20]

$$x^{k+1} = x^k - \beta[A'(x^0) + \bar{\alpha}I]^{-1}S_\alpha(x^k) \equiv T(x^k). \tag{7.8}$$

Теорема 14. *Пусть производная $A'(x^0)$ является самосопряженным (неотрицательно определенным) оператором и выполнены условия (7.7). Пусть параметры $\alpha, \bar{\alpha}$ и начальное приближение x^0 удовлетворяют соотношениям:*

$$\|x_\alpha - x^0\| \le r_0, \quad 0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad r_0 = \alpha/(4N_2), \quad \bar{\alpha} \ge 3N_1.$$

Тогда при $\beta < \alpha\bar{\alpha}/(\alpha + N_1)^2$ *процесс* (7.8) *сходится к* x_α *и оператор шага* T *является сильно* $\{x_\alpha\}$*-фейеровским, а при* $\beta = \alpha\bar{\alpha}/2(\alpha + N_1)^2$ *справедлива оценка погрешности*

$$\|x^k - x_\alpha\| \le q^k r_0, \quad q = \left[1 - \frac{\alpha^2}{4(\alpha + N_1)^2}\right]^{1/2}, \tag{7.9}$$

где x_α *— единственное решение уравнения* (7.2).

Из изложенного в теореме 13 следует, что на том же классе корректности истокообразно представимых решений и при условиях теоремы 14 для двухэтапного метода Ньютона–Лаврентьева (7.2), (7.8) также справедлива оптимальная по порядку оценка (7.6) с той лишь разницей, что теперь параметр q определяется формулой (7.9).

Замечание 6. Ввиду известного факта, что градиент выпуклого функционала является монотонным оператором (см. [22, лемма 4.10, § 4, гл. III]) κ-процессы и регуляризованный метод Ньютона могут применяться при аппроксимации регуляризованного решения с выпуклым функционалом Тихонова

$$\min\{\phi(x) + \alpha\Omega(x):\ x \in H\},$$

в частности, для квадратичного функционала $\phi(x) = \|Ax - y\|^2$ и стабилизатора $\Omega(x) = \int_D \sqrt{|\nabla x(s)|^2 + \beta}ds$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fejér L.* Über die Lage der Nullstellen fon Polynomen, die aus Minimumforderungen gewsser Art entspringen // Math. Ann. 1922. B. 85. Nr 1. S. 41–48.
2. *Motzkin T.S., Schoenberg J.J.* The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. V. 6. № 3. P. 393–404.
3. *Agmon S.* The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. V. 6. № 3. P. 382–392.
4. *Брегман Л.М.* Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования // ДАН СССР. 1965. Т. 162. № 3. С. 487–490.
5. *Еремин И.И.* Обобщение релаксационного метода Моцкина-Агмона // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20. Вып. 2. С. 183–187.
6. *Еремин И.И.* Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании // Матем. заметки. 1968. Т. 3. Вып. 2. С. 217–234.
7. *Vasin V.V., Eremin I.I.* Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and applications. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2009.
8. *Васин В.В.* Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 7. С. 971–980.
9. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ “Наука”, 1993.
10. *Martinet B.* Determination approachee d’un point fixe d’une application pseudo-contractante. Cas de l’ application // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A-B. 1972. V. 274. P. A163–A165.
11. *Browder F.E.* Convergence of approximantes in fixed point of non-expansive nonlinear maps in Banach spaces // Arch. Ration. Mech. Anal.1967. V. 24. № 1. P. 82–90.
12. *Halperin B.* Fixed point of nonexpansive maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. P. 57–961.
13. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М: Наука, 1983.
14. *Eicke B.* Konvex-restringierte schlechtgestellte Probleme and ihre Regularizierung durch Iterationverfahren // Dr. diss. Berlin, 1991.
15. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
16. *Moreau J.J.* Proximite et dualite dans un espace Hilbertien // Bull. Soc. Math. 1965. V. 93. № 2. P. 273–299.
17. *Васин В.В.* Регуляризованные модифицированные α-процессы для нелинейных уравнений с монотонным оператором // ДАН. 2016. Т. 469. № 1. С. 13–16.
18. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. Москва.: Наука, 1969.
19. *Tautenhahn U.* On the method Lavrentiev regularisation for nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems. 2002. V. 18. № 1. P. 191–207.
20. *Васин В.В.* Итерационные процессы для некорректно поставленных задач с монотонным оператором // Математические труды. 2018. Т. 21. № 2. С. 117–135.
21. *Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.* Theory of linear ill-posed problems and its applications. Utrecht/Boston/Köln/Tokyo: VSP, 2002.
22. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.